

# ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ИЗОГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ БИГАРМОНИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ\*

Б. И. КВАСОВ

*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*  
e-mail: kvasov@lchd.ict.nsc.ru

This paper addresses a new approach for solving the problem of a shape preserving spline interpolation. Based on the formulation of the latter problem as a differential multipoint boundary value problem for a thin plate tension spline, its finite-difference approximation is considered. The resulting system of linear equations can be efficiently solved by successive over-relaxation (SOR) iterative method or using finite-difference schemes in fractional steps. We consider the basic computational aspects and illustrate the main advantages of this original approach.

## Введение

Теория сплайнов базируется на двух основных подходах: алгебраическом, когда сплайны понимаются как гладкие кусочные функции (см., например, [1]), и вариационном, когда сплайны получаются посредством минимизации квадратических функционалов с ограничениями типа равенств и/или неравенств (см., например, [2]). Менее известен третий подход [3], когда сплайны определяются как решения дифференциальных многоточечных краевых задач (ДМКЗ). В одномерном случае этот подход был рассмотрен в [4, 5]. Он тесно связан с идеей полисплайнов [6]. Хотя некоторые из важных классов сплайнов могут быть получены по любому из перечисленных выше трех подходов, специфические особенности делают порой последний подход важным инструментом при решении практических задач. В данной статье этот факт иллюстрируется на примере интерполяции дискретных данных на прямоугольной сетке с помощью изогеометрических бигармонических сплайнов. В вариационной формулировке эта задача ранее была рассмотрена в [7, 8] и других работах.

Для численного решения ДМКЗ дифференциальный оператор заменяется его конечно-разностной аппроксимацией. Это дает линейную систему разностных уравнений с матрицей специальной структуры. Последняя система может быть эффективно решена итерациями по методу верхней релаксации или используя схемы в дробных шагах [9]. Приводится числовой пример, иллюстрирующий основные особенности и преимущества предлагаемого подхода.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российской академии наук по программе “Современные проблемы теоретической математики” (проект № 1.1.2).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2005.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим прямоугольную область  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ , где

$$\Omega = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\},$$

а  $\Gamma$  – граница  $\Omega$ . На  $\bar{\Omega}$  рассмотрим сетку  $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_x : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = b, \\ \Delta_y : c = y_0 < y_1 < \dots < y_{M+1} = d, \end{aligned}$$

которая делит область  $\bar{\Omega}$  на прямоугольные ячейки  $\bar{\Omega}_{ij} = \Omega_{ij} \cup \Gamma_{ij}$ , где

$$\Omega_{ij} = \{(x, y) \mid x \in (x_i, x_{i+1}), y \in (y_j, y_{j+1})\},$$

а  $\Gamma_{ij}$  – граница ячейки  $\Omega_{ij}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ .

С сеткой  $\Delta$  свяжем данные

$$\begin{aligned} (x_i, y_j, f_{ij}), \quad i = 0, \dots, N+1, \quad j = 0, \dots, M+1, \\ f_{ij}^{(2,0)}, \quad i = 0, N+1, \quad j = 0, \dots, M+1, \\ f_{ij}^{(0,2)}, \quad i = 0, \dots, N+1, \quad j = 0, M+1, \\ f_{ij}^{(2,2)}, \quad i = 0, N+1, \quad j = 0, M+1, \end{aligned}$$

где

$$f_{ij}^{(r,s)} = \frac{\partial^{r+s} f(x_i, y_j)}{\partial x^r \partial y^s}, \quad r, s = 0, 2.$$

Через  $C^{2,2}[\bar{\Omega}]$  обозначим множество всех непрерывных на  $\bar{\Omega}$  функций  $f$ , имеющих непрерывные частные и смешанные производные до второго порядка включительно по переменным  $x$  и  $y$ . Задачу поиска функции  $S \in C^{2,2}[\bar{\Omega}]$  такой, что  $S(x_i, y_j) = f_{ij}$ ,  $i = 0, \dots, N+1$ ,  $j = 0, \dots, M+1$ , и  $S$  сохраняет форму исходных данных, назовем *задачей изогеометрической интерполяции*. Это означает, что если данные монотонно возрастают (убывают), то  $S$  ведет себя таким же образом и  $S$  выпукла (вогнута) на интервалах выпуклости (вогнутости) данных.

Решение задачи изогеометрической интерполяции неединственно. Мы будем искать решение этой задачи в виде обобщенного бигармонического сплайна.

**Определение 1.** *Интерполяционным обобщенным бигармоническим сплайном  $S$  с двумя множествами параметров контроля формы*

$$\begin{aligned} \{0 \leq p_{ij} < \infty \mid i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M+1\}, \\ \{0 \leq q_{ij} < \infty \mid i = 0, \dots, N+1, j = 0, \dots, M\} \end{aligned}$$

назовем решение ДМКЗ

$$\frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 S}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 S}{\partial y^4} - \left( \frac{\bar{p}_{ij}}{h_i} \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \left( \frac{\bar{q}_{ij}}{l_j} \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

для всех  $(x, y) \in \Omega_{ij}$ ,  $h_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $l_j = y_{j+1} - y_j$ ,  $\bar{p}_{ij} = \max(p_{ij}, p_{i,j+1})$ ,  $\bar{q}_{ij} = \max(q_{ij}, q_{i+1,j})$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ ,

$$\frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \left( \frac{p_{ij}}{h_i} \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N, \quad y = y_j, \quad j = 0, \dots, M+1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^4 S}{\partial y^4} - \left(\frac{q_{ij}}{l_j}\right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = 0, \quad y \in (y_j, y_{j+1}), \quad j = 0, \dots, M, \quad x = x_i, \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad (3)$$

$$S \in C^{2,2}[\bar{\Omega}] \quad (4)$$

с условиями интерполяции

$$S(x_i, y_j) = f_{ij}, \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad j = 0, \dots, M + 1, \quad (5)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} S^{(2,0)}(x_i, y_j) &= f_{ij}^{(2,0)}, \quad i = 0, N + 1, \quad j = 0, \dots, M + 1, \\ S^{(0,2)}(x_i, y_j) &= f_{ij}^{(0,2)}, \quad i = 0, \dots, N + 1, \quad j = 0, M + 1, \\ S^{(2,2)}(x_i, y_j) &= f_{ij}^{(2,2)}, \quad i = 0, N + 1, \quad j = 0, M + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно этому определению, интерполяционный обобщенный бигармонический сплайн  $S$  образован множеством обобщенных бигармонических функций, удовлетворяющих уравнению (1) и условиям интерполяции (5), таких, что они гладко состыкованы между собой и образуют дважды непрерывно дифференцируемую функцию по обоим переменным  $x$  и  $y$

$$\begin{aligned} S^{(r,s)}(x_i - 0, y) &= S^{(r,s)}(x_i + 0, y), \quad r, s = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, N, \\ S^{(r,s)}(x, y_j - 0) &= S^{(r,s)}(x, y_j + 0), \quad r, s = 0, 1, 2, \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

$C^2$  — гладкость интерполяционных гиперболических сплайнов в (2) и (3) была доказана в [4, 5]. Вычисление интерполяционного обобщенного бигармонического сплайна равносильно вычислению бесконечно большого числа существенно одномерных интерполяционных гиперболических сплайнов.

При  $p_{ij}, q_{ij} \rightarrow 0$  для всех  $i, j$  решение задачи (1)–(6) переходит в бигармонический сплайн [10], тогда как в другом предельном случае при  $p_{ij}, q_{ij} \rightarrow \infty$  в ячейке  $\bar{\Omega}_{ij}$  сплайн  $S$  становится линейной функцией отдельно по переменным  $x$  и  $y$  и очевидным образом сохраняет свойства формы исходных данных на  $\bar{\Omega}_{ij}$ . При увеличении значений одного или более параметров контроля формы  $p_{ij}, q_{ij}$  получаемая при решении задачи (1)–(6) поверхность стремится к поверхности, присущей исходным данным, и в то же время сохраняет свою гладкость. Таким образом, ДМКЗ дает разумный подход к решению задачи изогео-метрической интерполяции.

## 2. Конечно-разностная аппроксимация ДМКЗ

Для практических целей часто нужно знать значения решения ДМКЗ  $S$  только на некоторой заданной сетке, а не иметь для него какого-либо аналитического выражения. В этом параграфе рассматривается конечно-разностная аппроксимация ДМКЗ, приводящая к линейной системе алгебраических уравнений, решение которой называется сеточным решением. Очевидным образом, сеточное решение не является сеточной выборкой значений  $S$ , но обеспечивает некоторую ее аппроксимацию.

Пусть заданы  $n_i, m_j \in \mathbb{N}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ , такие, что  $h_i/n_i = l_j/m_j = h$ . Будем искать сеточную функцию

$$\{u_{ik;jl} \mid k = -1, \dots, n_i + 1, i = 0, \dots, N; l = -1, \dots, m_j + 1, j = 0, \dots, M\},$$

удовлетворяющую разностным уравнениям

$$\left[ \Lambda_1^2 + 2\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_2^2 - \left( \frac{\bar{p}_{ij}}{h_i} \right)^2 \Lambda_1 - \left( \frac{\bar{q}_{ij}}{l_j} \right)^2 \Lambda_2 \right] u_{ik;jl} = 0, \quad (7)$$

$$k = 1, \dots, n_i - 1, \quad i = 0, \dots, N, \quad l = 1, \dots, m_j - 1, \quad j = 0, \dots, M,$$

$$\left[ \Lambda_1^2 - \left( \frac{p_{ij}}{h_i} \right)^2 \Lambda_1 \right] u_{ik;jl} = 0, \quad (8)$$

$$k = 1, \dots, n_i - 1, \quad i = 0, \dots, N, \quad l = \begin{cases} 0, & \text{если } j = 0, \dots, M - 1, \\ 0, m_M, & \text{если } j = M, \end{cases}$$

$$\left[ \Lambda_2^2 - \left( \frac{q_{ij}}{l_j} \right)^2 \Lambda_2 \right] u_{ik;jl} = 0, \quad (9)$$

$$k = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 0, \dots, N - 1, \\ 0, n_N, & \text{если } i = N, \end{cases} \quad l = 1, \dots, m_j - 1, \quad j = 0, \dots, M,$$

где

$$\Lambda_1 u_{ik;jl} = \frac{u_{i,k+1;jl} - 2u_{ik;jl} + u_{i,k-1;jl}}{h^2},$$

$$\Lambda_2 u_{ik;jl} = \frac{u_{ik;j,l+1} - 2u_{ik;jl} + u_{ik;j,l-1}}{h^2}.$$

Условия гладкости (4) дают соотношения

$$\begin{aligned} u_{i-1,n_{i-1};jl} &= u_{i0;jl}, \\ \frac{u_{i-1,n_{i-1}+1;jl} - u_{i-1,n_{i-1}-1;jl}}{2h} &= \frac{u_{i1;jl} - u_{i,-1;jl}}{2h}, \\ \Lambda_1 u_{i-1,n_{i-1};jl} &= \Lambda_1 u_{i0;jl}, \\ i = 1, \dots, N, \quad l = 0, \dots, m_j, \quad j = 0, \dots, M, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_{ik;j-1,m_{j-1}} &= u_{ik;j0}, \\ \frac{u_{ik;j-1,m_{j-1}+1} - u_{ik;j-1,m_{j-1}-1}}{2h} &= \frac{u_{ik;j1} - u_{ik;j,-1}}{2h}, \\ \Lambda_2 u_{ik;j-1,m_{j-1}} &= \Lambda_2 u_{ik;j0}, \\ k = 0, \dots, n_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (11)$$

Условия (5) и (6) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} u_{i0;j0} &= f_{ij}, \quad u_{N,n_N;j0} = f_{N+1,j}, \\ u_{i0;M,m_M} &= f_{i,M+1}, \quad u_{N,n_N;M,m_M} = f_{N+1,M+1}, \\ i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M, \end{aligned} \quad (12)$$

и

$$\begin{aligned} \Lambda_1 u_{00;j0} &= f_{0j}^{(2,0)}, \quad j = 0, \dots, M; & \Lambda_1 u_{00;M,m_M} &= f_{0,M+1}^{(2,0)}, \\ \Lambda_1 u_{N,n_N;j0} &= f_{N+1,j}^{(2,0)}, \quad j = 0, \dots, M; & \Lambda_1 u_{N,n_N;M,m_M} &= f_{N+1,M+1}^{(2,0)}, \\ \Lambda_2 u_{i0;00} &= f_{i0}^{(0,2)}, \quad i = 0, \dots, N; & \Lambda_2 u_{N,n_N;00} &= f_{N+1,0}^{(0,2)}, \\ \Lambda_2 u_{i0;M,m_M} &= f_{i,M+1}^{(0,2)}, \quad i = 0, \dots, N; & \Lambda_2 u_{N,n_N;M,m_M} &= f_{N+1,M+1}^{(0,2)}, \\ \Lambda_1 \Lambda_2 u_{00;00} &= f_{00}^{(2,2)}, & \Lambda_1 \Lambda_2 u_{N,n_N;00} &= f_{N+1,0}^{(2,2)}, \\ \Lambda_1 \Lambda_2 u_{00;M,m_M} &= f_{0,M+1}^{(2,2)}, & \Lambda_1 \Lambda_2 u_{N,n_N;M,m_M} &= f_{N+1,M+1}^{(2,2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

### 3. Алгоритм

Для получения решения системы разностных уравнений (7)–(13) предлагается вначале найти это решение на линиях основной сетки  $\Delta$ . Последнее может быть сделано путем выполнения следующих четырех шагов.

*Первый шаг.* Вычисляются все параметры  $p_{ij}$  на прямых  $y = y_j$ ,  $j = 0, \dots, M + 1$ , и  $q_{ij}$  на прямых  $x = x_i$ ,  $i = 0, \dots, N + 1$ , по одному из одномерных алгоритмов автоматического выбора параметров контроля формы (см., например, [5, 11, 12 и др.]).

*Второй шаг.* Строятся дискретные гиперболические сплайны [4, 5] по направлению  $x$  путем решения  $M + 2$  линейных систем (8). Как результат, находятся значения сеточного решения на линиях  $y = y_j$ ,  $j = 0, \dots, M + 1$ , сетки  $\Delta$  в направлении переменной  $x$ .

*Третий шаг.* Строятся дискретные гиперболические сплайны в направлении переменной  $y$  путем решения  $N + 2$  линейных систем (9). Это дает значения сеточного решения на прямых  $x = x_i$ ,  $i = 0, \dots, N + 1$ , сетки  $\Delta$  в направлении переменной  $y$ .

*Четвертый шаг.* Строятся дискретные гиперболические сплайны по направлениям  $x$  и  $y$ , интерполирующие данные  $f_{ij}^{(2,0)}$ ,  $i = 0, N + 1$ ,  $j = 0, \dots, M + 1$ , и  $f_{ij}^{(0,2)}$ ,  $i = 0, \dots, N + 1$ ,  $j = 0, M + 1$ , на границе  $\Gamma$ . Это дает значения

$$\begin{aligned} \Lambda_1 u_{00;jl}, \quad \Lambda_1 u_{N,n_N;jl}, \quad l = 0, \dots, m_j, \quad j = 0, \dots, M, \\ \Lambda_2 u_{ik;00}, \quad \Lambda_2 u_{ik;M,m_M}, \quad k = 0, \dots, n_i, \quad i = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (14)$$

Теперь система разностных уравнений (7)–(13) может быть существенно упрощена исключением неизвестных

$$\begin{aligned} u_{ik;jl}, \quad k = -1, n_i + 1, \quad i = 0, \dots, N, \quad l = 0, \dots, m_j, \quad j = 0, \dots, M, \\ u_{ik;jl}, \quad k = 0, \dots, n_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad l = -1, m_j + 1, \quad j = 0, \dots, M, \end{aligned}$$

путем использования соотношений (10), (11) и краевых величин (14).

Как результат, получаем систему  $(n_i - 1)(m_j - 1)$  разностных уравнений с тем же самым числом неизвестных в каждой ячейке  $\Omega_{ij}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ . Эта линейная система может быть эффективно решена методом последовательной верхней релаксации или применением разностных схем в дробных шагах на одно- или многопроцессорных ЭВМ.

### 4. Метод последовательной верхней релаксации

Используя кусочно-линейную интерполяцию сеточного решения с разбиением основной сетки  $\Delta$  внутрь ячеек  $\Omega_{ij}$ , определим сеточную функцию

$$\{u_{ik;jl}^{(0)} \mid k = 0, \dots, n_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad l = 0, \dots, m_j, \quad j = 0, \dots, M\}. \quad (15)$$

В каждой ячейке  $\Omega_{ij}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ , разностное уравнение (7) можно переписать в покомпонентной форме

$$\begin{aligned} u_{ik;jl} = \frac{1}{\alpha_{ij}} \left\{ \beta_{ij} [u_{i,k-1;jl} + u_{i,k+1;jl}] + \gamma_{ij} [u_{ik;j,l-1} + u_{ik;j,l+1}] - \right. \\ \left. - 2[u_{i,k-1;j,l-1} + u_{i,k-1;j,l+1} + u_{i,k+1;j,l-1} + u_{i,k+1;j,l+1}] - \right. \\ \left. - u_{ik;j,l-2} - u_{ik;j,l+2} - u_{i,k-2;jl} - u_{i,k+2;jl} \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\alpha_{ij} = 20 + 2\left(\frac{\bar{p}_{ij}}{n_i}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{q}_{ij}}{m_j}\right)^2, \quad \beta_{ij} = 8 + \left(\frac{\bar{p}_{ij}}{n_i}\right)^2, \quad \gamma_{ij} = 8 + \left(\frac{\bar{q}_{ij}}{m_j}\right)^2.$$

Теперь, используя (16), можно записать итерационный процесс метода последовательной верхней релаксации

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ik;jl} &= \frac{1}{\alpha_{ij}} \left\{ \beta_{ij} [u_{i,k-1;jl}^{(\nu+1)} + u_{i,k+1;jl}^{(\nu)}] + \gamma_{ij} [u_{ik;j,l-1}^{(\nu+1)} + u_{ik;j,l+1}^{(\nu)}] - \right. \\ &\quad - 2[u_{i,k-1;j,l-1}^{(\nu+1)} + u_{i,k-1;j,l+1}^{(\nu)} + u_{i,k+1;j,l-1}^{(\nu+1)} + u_{i,k+1;j,l+1}^{(\nu)}] - \\ &\quad \left. - u_{ik;j,l-2}^{(\nu+1)} - u_{ik;j,l+2}^{(\nu)} - u_{i,k-2;jl}^{(\nu+1)} - u_{i,k+2;jl}^{(\nu)} \right\}, \\ u_{ik;jl}^{(\nu+1)} &= u_{ik;jl}^{(\nu)} + \omega(\bar{u}_{ik;jl} - u_{ik;jl}^{(\nu)}), \quad 1 < \omega < 2, \quad \nu = 0, 1, \dots, \\ k &= 1, \dots, n_i - 1, \quad i = 0, \dots, N, \quad l = 1, \dots, m_j - 1, \quad j = 0, \dots, M. \end{aligned}$$

Заметим, что вне области  $\bar{\Omega}$  дополнительные неизвестные  $u_{0,-1;jl}$ ,  $u_{N,n_N+1;jl}$  для  $l = 0, \dots, m_j$ ,  $j = 0, \dots, M$ , и  $u_{ik;0,-1}$ ,  $u_{ik;M,m_M+1}$  для  $k = 0, \dots, n_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , исключаются путем использования (14) и не участвуют в итерациях.

## 5. Метод дробных шагов

Система разностных уравнений разд. 3 может быть эффективно решена методом дробных шагов [9]. Используя начальное приближение (15), в каждой ячейке  $\Omega_{ij}$ ,  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ , рассмотрим следующую схему расщепления:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau} + \Lambda_{11}u^{n+1/2} + \Lambda_{12}u^n &= 0, \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau} + \Lambda_{22}u^{n+1} + \Lambda_{12}u^{n+1/2} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \Lambda_1^2 - p\Lambda_1, \quad \Lambda_{22} = \Lambda_2^2 - q\Lambda_2, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_1\Lambda_2, \quad p = \left(\frac{\bar{p}_{ij}}{h_i}\right)^2, \quad q = \left(\frac{\bar{q}_{ij}}{l_j}\right)^2, \\ u &= \{u_{ik;jl} \mid k = 1, \dots, n_i - 1, \quad i = 0, \dots, N; \quad l = 1, \dots, m_j - 1, \quad j = 0, \dots, M\}. \end{aligned}$$

Исключая здесь дробный шаг  $u^{n+1/2}$ , приходим к схеме в целых шагах, эквивалентной схеме (17):

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (\Lambda_{11} + \Lambda_{22})u^{n+1} + 2\Lambda_{12}u^n + \tau(\Lambda_{11}\Lambda_{22}u^{n+1} - \Lambda_{12}^2u^n) = 0. \quad (18)$$

Отсюда следует, что схема (18) и эквивалентная схема (17) обладают свойством полной аппроксимации [9] только в случае, если

$$\Lambda_{11}\Lambda_{22} = \Lambda_{12}^2 \quad \text{или} \quad p_{ij} = q_{ij} = 0 \quad \text{для всех} \quad i, j.$$

Докажем безусловную устойчивость схемы (17) или, что то же самое, схемы (18). Используя стандартный гармонический анализ [9], предположим, что

$$u^n = \eta_m e^{i\pi z}, \quad u^{n+1/2} = \eta_{m+1/2} e^{i\pi z}, \quad z = k_1 \frac{x - x_i}{h_i} + k_2 \frac{y - y_j}{l_j}. \quad (19)$$

Подставляя соотношения (19) в уравнения (17), получаем следующие выражения для множителей перехода:

$$\rho_1 = \frac{\eta_{n+1/2}}{\eta_n} = \frac{1 - a_1 a_2}{1 - p\sqrt{\tau}a_1 + a_1^2}, \quad \rho_2 = \frac{\eta_{m+1}}{\eta_{m+1/2}} = \frac{1 - a_1 a_2}{1 - q\sqrt{\tau}a_2 + a_2^2},$$

$$\rho = \rho_1 \rho_2 = \frac{(1 - a_1 a_2)^2}{(1 - p\sqrt{\tau}a_1 + a_1^2)(1 - q\sqrt{\tau}a_2 + a_2^2)},$$

где

$$a_1 = -\frac{4\sqrt{\tau}}{h^2} \sin^2 \left( \frac{k_1 h \pi}{2 h_i} \right), \quad k_1 = 1, \dots, n_i - 1, \quad n_i h = h_i,$$

$$a_2 = -\frac{4\sqrt{\tau}}{h^2} \sin^2 \left( \frac{k_2 h \pi}{2 l_j} \right), \quad k_2 = 1, \dots, m_j - 1, \quad m_j h = l_j.$$

Отсюда следует, что

$$0 \leq \rho \leq \frac{(1 - a_1 a_2)^2}{(1 + a_1^2)(1 + a_2^2)} \leq \left( \frac{1 - a_1 a_2}{1 + a_1 a_2} \right)^2 < 1$$

для всех  $\tau$ . Это доказывает безусловную устойчивость схемы (17).

На каждом дробном шаге в (17) нужно решить линейную систему с симметричной положительно определенной пятидиагональной матрицей. Это существенно легче, чем прямое решение линейной системы (7). Схема (17), однако, вообще говоря, не обладает свойством полной аппроксимации [9]. По этой причине при выполнении итераций следует использовать малые значения итерационного параметра  $\tau$ , например,  $\sqrt{\tau}/h^2 = \text{const}$ .

## 6. Числовой пример

Рассмотренный подход был апробирован на ряде практических примеров. В силу ограниченности объема статьи здесь рассматривается только один такой пример. Исходные

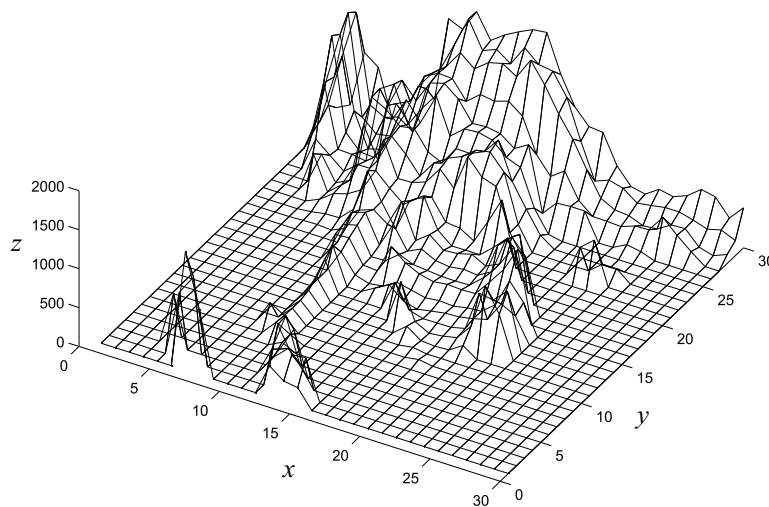


Рис. 1. Исходные топографические данные.

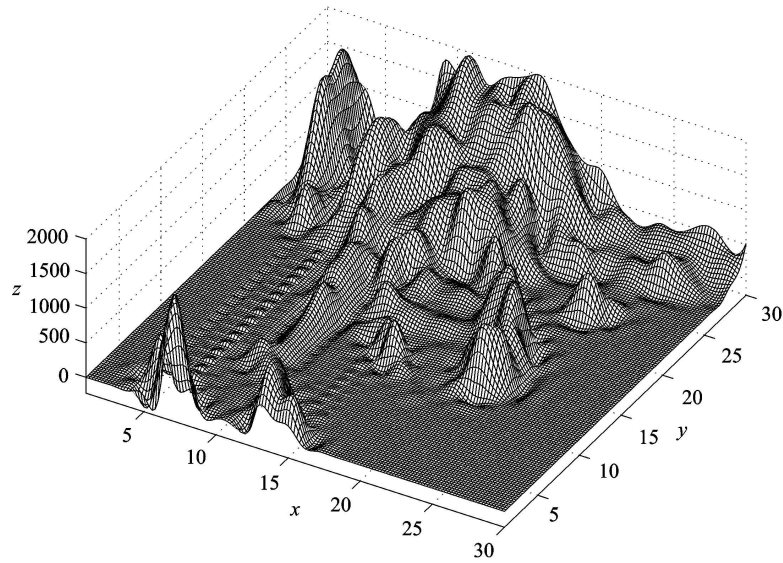


Рис. 2. Бигармоническая поверхность.

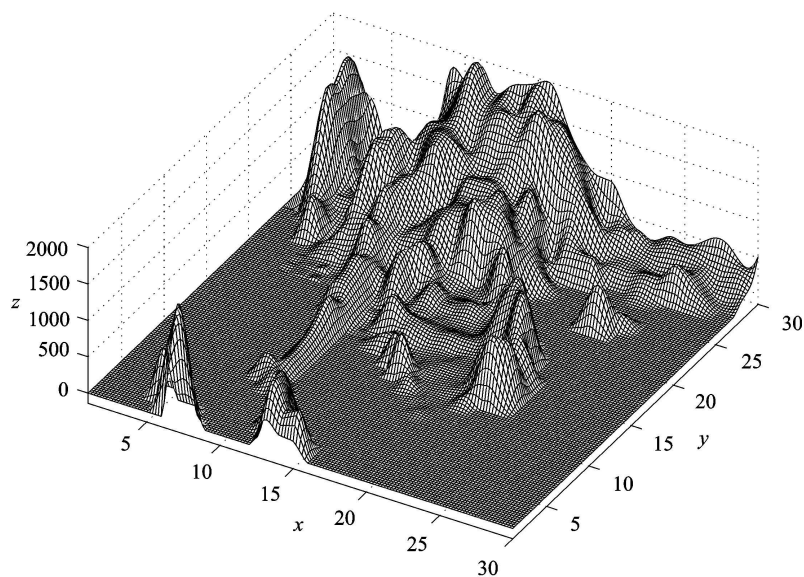


Рис. 3. Изогеометрическая поверхность.

топографические данные показаны на рис. 1. Рисунок 2 получен при нулевых значениях всех параметров контроля формы, т. е. рассматривается обычный интерполяционный дискретный бигармонический сплайн. Это приводит к осцилляциям, не характерным для исходных данных. Ситуация существенно улучшается при использовании интерполяционного обобщенного бигармонического сплайна с автоматическим выбором параметров контроля формы. Результирующий дискретный изогеометрический интерполянт на рис. 3 не имеет осцилляций и одновременно обеспечивает визуальную гладкую поверхность.



## Список литературы

- [1] ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
- [2] ЛОРАН П.Ж. Аппроксимация и оптимизация: Пер. с фран. М.: Мир, 1975.
- [3] ЯНЕНКО Н.Н., КВАСОВ Б.И. Итерационный метод построения поликубических сплайн-функций // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195. С. 1055–1057.
- [4] COSTANTINI P., KVASOV B.I., MANNI C. On discrete hyperbolic tension splines // Adv. Comput. 1999. Vol. 11. P. 331–354.
- [5] KVASOV B.I. Methods of Shape-Preserving Spline Approximation. Singapore: World Scientific Publ. Co. Pte. Ltd., 2000.
- [6] KOUNCHEV O. Multivariate Polysplines: Applications to Numerical and Wavelet Analysis. San Diego: Academic Press, 2001.
- [7] BOUHAMEDI A., LE MÉHAUTÉ A. Spline curves and surfaces with tension // Wavelets, Images, and Surface Fitting / P.-J. Laurent, A. Le Méhauté, L.L. Schumaker (eds.). Wellesley: A.K. Peters, 1994. P. 51–58.
- [8] FRANKE R. Thin plate splines with tension // Surfaces in CAGD'84 / R. E. Barnhill and W. Böhm (eds.). North-Holland, 1985. P. 87–95.
- [9] ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
- [10] DUCHON J. Splines minimizing rotation invariant semi-norms in Sobolev spaces // Constructive Theory of Functions of Several Variables / W. Schempp, K. Zeller (eds.). Springer, 1977. P. 85–100. (Lecture Notes in Mathematics; Vol. 571.).
- [11] RENKA R.J. Interpolation tension splines with automatic selection of tension factors // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1987. Vol. 8. P. 393–415.
- [12] RENTROP P. An algorithm for the computation of exponential splines // Numer. Math. 1980. Vol. 35. P. 81–93.

*Поступила в редакцию 19 июля 2004 г.,  
в переработанном виде — 11 ноября 2004 г.*