

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПОЛИТРОПНОГО ГАЗА В ОКРЕСТНОСТИ ОСИ ИЛИ ЦЕНТРА СИММЕТРИИ\*

С. Л. ДЕРЯБИН

*Уральский государственный университет путей сообщения,*

*Екатеринбург, Россия*

e-mail: SDeryabin@math.usart.ru

One-dimensional isotropic flows of an ideal polytropic gas that occur as a result of the development of a discontinuity are considered. Solution of the problem was constructed in the special functional space in the form of the converging series up to the moment of the focusing of the surface of a weak discontinuity onto the axis or centre of symmetry. In the physical space, in the vicinity of the centre of symmetry various analytical (exact or asymptotic) representations of the flows adjacent to the region of the gas at rest were constructed.

Задачи об истечении газа в вакуум рассматривались ранее. При помощи характеристических рядов в окрестности слабого разрыва были построены двумерные течения идеального газа [1], примыкающие к области покоящегося газа. Изучено течение [2], возникшее в результате схлопывания одномерной полости; решение построено в виде сходящихся характеристических рядов во всей области течения до свободной поверхности включительно и доказано, что свободная поверхность движется некоторое время с постоянной скоростью. Этот результат обобщен на случай дву- и трехмерных течений [3, 4], трехмерных течений в условиях действия внешних массовых сил [5], одномерных течений в условиях самогравитации [6].

В ряде работ рассматривались течения, возникающие при фокусировке слабого разрыва на ось или в центр симметрии. Подробное исследование одномерных течений приведено в [7], где в том числе получены формулы, определяющие время и место возникновения бесконечных производных на слабом разрыве. В [8, 9] исследовались первые члены некоторых асимптотических разложений, описывающие одномерные течения, возникающие в волне разрежения после отражения слабого разрыва от оси или центра симметрии. При этом предполагалось, что бесконечные значения производных в центре симметрии не приводят к разрушению непрерывного течения и слабый разрыв отражается от центра симметрии в виде звуковой характеристики. В волне сжатия, близкой к автотельной, в окрестности оси или центра симметрии для задачи с наперед заданными в момент фокусировки слабого разрыва непостоянными распределениями скорости и плотности газа построены одномерные течения [10]. Выбор начального распределения скорости газа гарантировал, что

---

\*Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00205).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2005.

слабый разрыв от центра симметрии отражается в виде ударной волны, идущей с конечной скоростью. Было доказано существование локально-аналитического решения за ударной волной. При исследовании конических течений в волнах сжатия построено автомодельное решение, описывающее течение в окрестности вершины конуса, и сделана попытка приближенно построить течение, через слабый разрыв к нему примыкающее [11, 12].

Также в ряде работ проводилось приближенное исследование течений возле свободной поверхности и в средней части волны разрежения. В [2] установлено, что как на самой свободной границе  $\Gamma_0$ , так и в некоторой ее окрестности течение газа при всех  $t > 0$  особенностей не имеет. Численное исследование транспортных уравнений, описывающих поведение выводящих со свободной границы производных газодинамических параметров, а также их приближенное аналитическое исследование, проведенное в [13], показали, что при всех  $t > 0$  как на самой  $\Gamma_0$ , так и в некоторой ее окрестности особенностей в течении газа нет: свободная поверхность  $\Gamma_0$  движется с постоянной скоростью, а производные, выводящие со свободной границы, стремятся к нулю у всех газодинамических параметров при  $t \rightarrow +\infty$ . Приближенное аналитическое исследование течений газа в рассматриваемой задаче [14, 15] дало следующие результаты. В главных порядках при больших значениях времени имеет место инерционный разлет, приближенно описываемый автомодельными решениями с произвольными функциями, которые отражают предысторию неавтомодельной стадии расширения газа в вакуум. При этом траектории частиц являются прямыми, вдоль которых плотность уменьшается по степенному закону от времени. Распределение плотности по радиусу не меняется с течением времени, а только растягивается с ростом  $r$ , оставаясь подобным самому себе. Полученные асимптотические формулы второго приближения (малые при  $t \rightarrow +\infty$ ) описывают отклонение траекторий частиц от прямых, а также отклонение от степенной зависимости по времени плотности газа вдоль этих траекторий. При этом добавка к скорости частиц оказывается малой, но сами траектории могут сколь угодно сильно отличаться от прямолинейных траекторий инерционного разлета частиц газа. В частном предельном случае  $\gamma \rightarrow 1$ , и во втором приближении траектории частиц — прямые линии. Таким образом, как в средней части течения, так и возле свободной границы  $\Gamma_0$  особенностей в течении разлетающегося газа не имеется.

В данной работе для завершения исследования задачи о разлете в вакуум газового шара или цилиндра осталось рассмотреть поведение волны разрежения в окрестности точки  $B(t = 1, r = 0)$  (рис. 1) в моменты времени, близкие к моменту фокусировки слабого разрыва в центр или на ось симметрии.

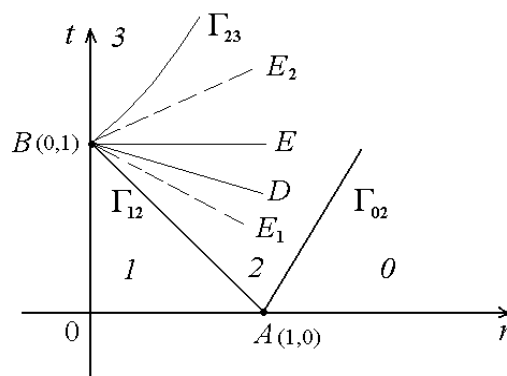


Рис. 1.

## 1. Постановка задачи

Пусть в момент времени  $t = 0$  поверхность  $\Gamma$  (сфера или цилиндр радиуса  $R$ ) отделяет идеальный политропный однородный покоящийся газ от вакуума. Предполагается, что скорость звука газа  $c = c_0 > 0$ .

В момент времени  $t = 0$  поверхность  $\Gamma$  мгновенно разрушается и начинается разлет газа в вакуум. Возникшее в результате распада специального разрыва течение имеет следующую конфигурацию (рис. 1): в области  $0$  — вакуум; в области  $1$  — однородный покоящийся газ; в области  $2$  — искомая волна разрежения; в области  $3$  — течение, возникшее за отраженной звуковой характеристикой.  $\Gamma_{02}$  — поверхность, отделяющая движущийся газ от вакуума (свободная поверхность),  $\Gamma_{12}$  — звуковая характеристика, приходящая на ось или в центр симметрии,  $\Gamma_{23}$  — звуковая характеристика, отразившаяся от оси или от центра симметрии.

Требуется построить течение в области  $2$  и исследовать его поведение вблизи оси или центра симметрии. В данной работе предполагается, что все течения состыкованы непрерывно и отраженный разрыв есть звуковая характеристика  $\Gamma_{23}$ .

Рассматривается система уравнений газовой динамики [16], описывающая одномерные изэнтропические течения идеального политропного газа с уравнением состояния  $p = S_0^2 \frac{\rho^\gamma}{\gamma}$ ;  $p$  — давление,  $S_0 = \text{const}$  — энтропия,  $\gamma = \text{const} > 1$  — показатель политропы газа. Будут исследоваться цилиндрически ( $\nu = 1$ ) или сферически ( $\nu = 2$ ) симметричные течения, зависящие от времени  $t$  и расстояния до оси или центра симметрии  $r$ . В качестве неизвестных функций возьмем  $u(t, r)$  — скорость газа и  $c(t, r)$  — скорость звука газа ( $c = S_0 \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ ). Тогда система уравнений газовой динамики имеет вид

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \frac{\gamma-1}{2}c \left( u_r + \nu \frac{u}{r} \right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{2}{\gamma-1}cc_r = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Условия на характеристике  $\Gamma_{12}$ :

$$c|_{\Gamma_{12}} = c_0, \quad u|_{\Gamma_{12}} = 0. \quad (1.2)$$

В дальнейшем, не нарушая общности, будем предполагать, что  $c_0 = 1$ ,  $R = 1$ , а закон движения поверхности слабого разрыва  $\Gamma_{12}$ :  $r = 1 - t$ .

Для описания начального разрыва за независимые переменные возьмем  $c, t$ , а за неизвестные функции —  $r, u$  [3, 4]. Якобиан преобразования равен  $J = r_c$ . В пространстве переменных  $r, t$  в начальный момент времени неограничена производная  $c_r|_{\Gamma}$ , а в пространстве переменных  $c, t$  особенностей нет:  $r_c|_{\Gamma} = 0$ . В новых переменных система (1.1) запишется в виде

$$\begin{cases} r_t = u + \frac{\gamma-1}{2}c \left( u_c + \nu r_c \frac{u}{r} \right), \\ r_c u_t + (u - r_t)u_c + \frac{2}{\gamma-1}c = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Для системы (1.3) начальные данные задаются на характеристике  $\Gamma_{12}$ . Поскольку  $\Gamma_{12}$  является характеристикой кратности один, для единственности решения задачи (1.2), (1.3)

необходимо задать одно дополнительное условие [17]. Если бы поверхность  $\Gamma$  убиралась медленно, то таким условием было бы условие непротекания на ней. В случае мгновенного разрушения стенки таким условием является условие “вертикали” [18]:

$$r(0, c) = 1. \quad (1.4)$$

В работе [2] решение задачи (1.2)–(1.4) построено в виде сходящегося ряда по степеням  $t$ . Это решение в точке  $(t = 1, c = 1)$ , соответствующей моменту фокусировки поверхности  $\Gamma_{12}$ , имеет особенность. Для раскрытия этой особенности в системе (1.3) вводятся новые независимые переменные

$$\theta = \sqrt{1-t}, \quad C = \frac{c-1}{\sqrt{1-t}}$$

и новые неизвестные функции

$$U = \frac{u}{\theta}, \quad x = \frac{r}{\theta^2}.$$

Якобиан такого преобразования  $J_1 = 2\theta^2$ . При  $\theta = 0$  в момент фокусировки  $\Gamma_{12}$  на ось или в центр симметрии  $J_1 = 0$ .

При этих двух заменах система (1.3) перейдет в следующую систему:

$$\begin{cases} \theta x_\theta + 2x - Cx_C + (\gamma - 1)(1 + \theta C) \left( U_C + \nu \frac{U}{x} x_C \right) + 2\theta U = 0, \\ (\theta x_\theta + 2x)U_C - (\theta U_\theta + U)x_C + 2\theta U U_C + \frac{4}{\gamma - 1}(1 + \theta C) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

В новых переменных характеристика  $\Gamma_{12}$  задается соотношением  $C = 0$ , а условия (1.2), (1.4) будут иметь вид

$$C(\theta, 0) = 0, \quad U(\theta, 0) = 0; \quad (1.6)$$

$$x(1, C) = 1. \quad (1.7)$$

## 2. Исследование в окрестности оси или центра симметрии решения задачи о распаде специального разрыва

Поставленная задача (1.5)–(1.7) является задачей о распаде специального разрыва. В результате вырожденных замен переменных в окрестности точки  $A$  — начальной точки движения газа (рис. 1) — система (1.5) особенностей не имеет. Поэтому справедлива следующая

**Теорема 2.1.** *Существует единственное локально-аналитическое решение задачи (1.5)–(1.7) о распаде специального разрыва в некоторой окрестности точки ( $C = 0, \theta = 1$ ).*

**Доказательство** теоремы проводится сведением задачи к характеристической задаче Коши стандартного вида [17, 18] и здесь опускается.

В силу аналитичности решение задачи (1.5)–(1.7) представляется в виде рядов по степеням  $C$

$$\mathbf{f}(\theta, C) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f}_n(\theta) \frac{C^n}{n!}, \quad \mathbf{f} = \{x, U\}. \quad (2.1)$$

При построении коэффициентов этих рядов применяется стандартная процедура. Для этого в системе (1.5) полагается  $C = 0$  и с учетом (1.7) получается, что

$$U_1 = -\frac{2}{\gamma - 1}.$$

Далее система (1.5) дифференцируется по  $C$ , полагается  $C = 0$  и при учете условий (1.7) и вида функции  $U_1$  получается следующая система двух уравнений:

$$\theta x'_1 + (1 - 2\nu)x_1 = -(\gamma - 1)U_2 + 4\alpha\theta,$$

$$\theta x'_1 + x_1 = (\gamma - 1)U_2 + 4\alpha\theta.$$

Сложение этих уравнений дает уравнение

$$\theta x'_1 + (1 - \nu)x_1 = 4\alpha\theta,$$

интегрирование которого при учете условий (1.6) приводит к следующим результатам: при  $\nu = 1$   $x_1 = 4\alpha(\theta - 1)$ , при  $\nu = 2$   $x_1 = 4\alpha\theta \ln \theta$  и в обоих случаях

$$U_2 = \frac{\nu}{\gamma - 1}x_1.$$

После определения первых коэффициентов рядов (2.1) система (1.5) дифференцируется по  $C$  два раза, полагается  $C = 0$  и с учетом условия (1.7) получается система

$$\theta x'_2 - 4\nu x_2 = -(\gamma - 1)U_3 + (4 - \nu)\nu x_1^2 + \frac{2(\gamma - 2)}{\gamma - 1}\nu\theta x_1,$$

$$\theta x'_2 = (\gamma - 1)U_3 + \nu x_1^2 + \frac{1}{2}\nu x_1(\theta x'_1 + x_1) - \frac{6}{\gamma - 1}\theta x_1.$$

Сложение полученных уравнений и подстановка  $x_1$  дают следующие уравнения:

при  $\nu = 1$

$$\theta x'_2 - 2x_2 = \frac{3(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2}[4\gamma\theta^2 - (7\gamma + 3)\theta + 3(\gamma + 1)],$$

при  $\nu = 2$

$$\theta x'_2 - 4x_2 = \frac{2(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2}[32(\gamma + 1)\theta^2 \ln^2 \theta + 3(\gamma - 3)\theta^2 \ln^2 \theta].$$

Интегрирование этих уравнений с учетом условий (1.6) приводит к выражениям для следующих коэффициентов рядов (2.1):

при  $\nu = 1$

$$x_2 = \frac{3(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2}\left[4\gamma\theta^2 \ln \theta + (7\gamma + 3)(\theta - \theta^2) - \frac{3}{2}(\gamma + 1)(1 - \theta^2)\right],$$

при  $\nu = 2$

$$x_2 = \frac{2(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2}\left[16(\gamma + 1)\theta^2 \ln^2 \theta + \frac{35\gamma + 23}{2}\theta^2 \ln \theta + \frac{35\gamma + 23}{2}(\theta^2 - \theta^4)\right]$$

и в обоих случаях

$$U_3 = \frac{\nu}{\gamma-1}x_2 + \frac{\gamma+1}{(\gamma-1)^2}\nu\theta x_1 + \frac{2(3-\nu)\nu}{2(\gamma-1)}x_1^2 - \frac{\nu}{4(\gamma-1)}x_1(\theta x_1' + x_1).$$

Дифференцирование системы (1.5)  $n$  раз по  $C$ , подстановка  $C = 0$ , учет (1.7) и уже найденных  $\mathbf{f}_k$  ( $k < n$ ) приводят к системе уравнений

$$\theta x_n' - (2n\nu + n - 2)x_n = -(\gamma - 1)U_{n+1} + F_{1n}(\theta),$$

$$\theta x_n' - (n - 2)x_n = (\gamma - 1)U_{n+1} + F_{2n}(\theta),$$

где

$$F_{1n}(\theta) = (\gamma - 1)n\theta U_n + (\gamma - 1)\nu \left[ \theta n \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k U_k \left( \frac{x_C}{x} \right)^{(n-k-1)} + \sum_{k=2}^{n-1} C_n^k U_k \left( \frac{x_C}{x} \right)^{(n-k)} \right],$$

$$F_{2n}(\theta) = \frac{\gamma - 1}{2} \left[ \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k U_{n-k+1} (\theta x_k' + 2x_k) + \sum_{k=1}^n C_n^k U_k U_{(n-k+1)} - \sum_{k=2}^n C_n^k (\theta U_k' + U_k) x_{n-k+1} \right].$$

После сложения этих двух уравнений и интегрирования уравнения, полученного в результате этого, имеем формулы для коэффициентов рядов (2.1):

$$x_n = \theta^{n\nu+n-2} \int_1^\theta \frac{F_{1n} + F_{2n}}{2} \theta^{1-n-n\nu} d\theta,$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{2(\gamma-1)} (2\nu n x_n + F_{1n} - F_{2n}).$$

В случае плоской симметрии  $\nu = 0$  при  $n > 1$  получаются равенства  $x_n = U_{n+1} = 0$ , т. е. ряды обрываются и в качестве решения имеем простую центрированную волну Римана.

Итак ряды, решающие задачу (1.5)–(1.7), построены.

**Лемма 2.1.** Коэффициенты рядов (2.1) имеют следующий вид: при  $\nu = 1$   $P_n(\theta, \theta^2 \ln \theta)$ ; при  $\nu = 2$   $Q_n(\theta, \theta \ln \theta)$ , где  $P_n, Q_n$  — это многочлены от указанных аргументов, степени которых не превосходят  $An$ ,  $A = \text{const}$ .

**Доказательство** леммы аналогично соответствующему доказательству из [2, 6] и проводится по индукции. Сначала доказывается, что правые части уравнений  $F_{in}$  обладают нужной структурой, а затем непосредственным интегрированием выясняется, что и  $\mathbf{f}_n$  обладают указанной структурой.

На основании леммы доказывается

**Теорема 2.2.** При  $0 \leq C \leq C_*$ , где  $C_* > 0$ , область сходимости рядов (2.1), а также рядов  $\mathbf{f}_C, \mathbf{f}_\theta$  в случае  $\nu = 1$  и рядов  $\mathbf{f}_C, \theta \mathbf{f}_\theta$  в случае  $\nu = 2$  покрывает весь интервал  $0 \leq \theta \leq 1$ , в том числе ряды сходятся при  $\theta = 0$ .

**Доказательство** теоремы аналогично доказательству из [18, 19]. Поскольку ряды (2.1) локально сходятся, а коэффициенты рядов — многочлены от  $\theta, \theta \ln \theta$  и степени многочленов не выше  $An$ , то, как и в [18, 19], доказывается, что существует постоянная  $M > 0$ , такая, что ряды (2.1) сходятся в области

$$M\xi|C| < 1; \quad \xi = \max\{\theta, |\theta \ln \theta|, 1\}.$$

Последнее неравенство определяет значение  $C_*$ . Следовательно, для  $|C| \leq C_*$  точка  $\theta = 0$ , соответствующая моменту фокусировки  $\Gamma_{12}$  в центр симметрии, включается в область сходимости рядов (2.1). При  $\nu = 2$  ряд  $f_\theta$  расходится, но поскольку система (1.5) содержит только  $f$ ,  $f_C$ ,  $\theta f_\theta$ , сходимость которых установлена теоремой 2.2, ряды (2.1) полностью решают задачу (1.5)–(1.7) от  $\theta = 1$  до  $\theta = 0$  включительно.

С использованием теоремы об обратной функции решение (2.1) восстанавливается в физическом пространстве:

при  $\nu = 1$

$$c = 1 + \sqrt{1-t} \left\{ \frac{1}{4\alpha(\sqrt{1-t}-1)} \left( \frac{r}{1-t} - 1 \right) - \frac{3(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} \times \right. \\ \times \frac{3(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} \left[ \frac{2\gamma(1-t)\ln(1-t) + (7\gamma+3)(\sqrt{1-t}-1+t) - \frac{3}{2}(\gamma+1)t}{[4\alpha(\sqrt{1-t}-1)]^2} \right] \times \\ \left. \times \left( \frac{r}{1-t} - 1 \right)^2 + \dots \right\}; \quad (2.2)$$

при  $\nu = 2$

$$c = 1 + \sqrt{1-t} \left\{ \frac{1}{2\alpha\sqrt{1-t}\ln(1-t)} \left( \frac{r}{1-t} - 1 \right) - \frac{2(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{\left( 4(\gamma+1)(1-t)\ln^2(1-t) + \frac{35\gamma+23}{2} [(1-t)\ln\sqrt{1-t} + 1-t - (1-t)^2] \right)}{[2\alpha\sqrt{1-t}\ln(1-t)]^2} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{r}{1-t} - 1 \right)^2 + \dots \right\}. \quad (2.3)$$

Формулы для  $u$  здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

Первые коэффициенты построенного решения совпадают с первыми членами асимптотических разложений решения, используемого в работах [8, 9] для приближенного построения как отраженной характеристики  $\Gamma_{23}$ , так и для приближенного описания течения в окрестности точки  $B(t=1, r=0)$ . Однако, в отличие от упомянутых приближений, построенные бесконечные ряды (2.1) сходятся и, следовательно, являются соответствующими полными разложениями точного решения задачи (1.5)–(1.7).

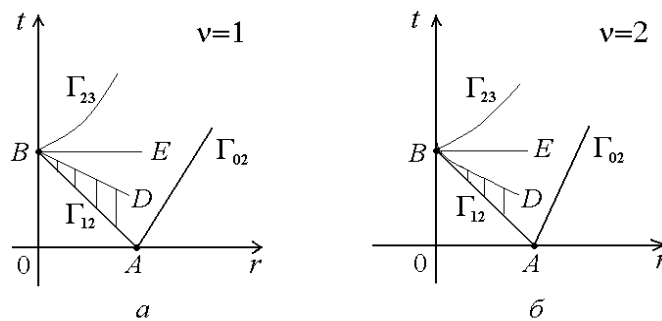


Рис. 2.

Анализ коэффициентов рядов (2.1) показывает, что область сходимости этих рядов в окрестности точки  $B(t = 1, r = 0)$  является сектором, ограниченным с одной стороны прямой  $AB$  (звуковой характеристикой  $\Gamma_{12}$ ), а с другой: при  $\nu = 1$  — прямой  $BD$  (рис. 2, *a*), при  $\nu = 2$  — кривой  $BD$  (рис. 2, *б*), у которой касательная в точке  $B$  совпадает с прямой  $AB$ . Следовательно, область существования построенного решения (2.2), (2.3) не дотягивается даже до прямой  $t = 1$  (рис. 2, *a, б*), не говоря уже о приближении к отраженной характеристике  $\Gamma_{23}$ .

Таким образом, предложенные вырожденные замены переменных хотя и привели к сходящимся рядам, в том числе передающим определенные закономерности течения, тем не менее не позволили до конца раскрыть особенность течения в точке  $B(t = 1, r = 0)$ .

### 3. Построение решения в окрестности оси или центра симметрии

В разд. 2 в виде рядов (2.1) построено решение

$$c = 1 + c \left( \sqrt{1-t}, \frac{r}{1-t} \right) \sqrt{1-t},$$

$$u = u \left( \sqrt{1-t}, \frac{r}{1-t} \right) \sqrt{1-t}.$$

Заметим, что построенное решение в принципе не позволяет получить распределения параметров газа  $c, u$  при  $t > 1$ , поскольку переменная  $\theta = \sqrt{1-t}$  не определена, а переменная  $x = \frac{r}{1-t}$  при  $t = 1, r > 0$  на линии  $BE$  (см. рис. 1) стремится к бесконечности. Поэтому далее будем строить решение системы (1.1) в окрестности точки  $B(t = 1, r = 0)$  с помощью задания условий на прямой  $t = 1$  (см. рис. 1). Для этого в системе (1.1) вводятся новые независимые переменные

$$y = \sqrt{r}, \quad \tau = \frac{t-1}{r}$$

и новые неизвестные функции

$$\sigma = \frac{c-1}{y}, \quad v = \frac{u}{y}.$$

Эти новые независимые переменные  $y, \tau$  с переменными  $x, \theta$  связаны соотношениями

$$x = -\frac{1}{\tau}, \quad \theta = y\sqrt{-\tau}.$$

В новых переменных ряды (2.1) имеют вид

$$\mathbf{f}(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f}_n(y\sqrt{-\tau}) \frac{(1 + \frac{1}{\tau})^n}{n!}, \quad \mathbf{f} = \{c, u\}.$$

Хотя ряды (2.1) сходятся при  $y = 0, -1 < \tau < \tau_0$ , но при  $y = 0$  они не являются аналитическими и использовать их в качестве начальных условий для построения локально-аналитических решений задачи Коши нельзя. Эта ситуация типична [2-6] для задач об



истечении газа в вакуум. Решения задач о распаде разрыва не являются аналитическими во всей области течения и могут быть использованы только приближенно в качестве начальных данных для задач о непрерывном примыкании газа к вакууму в физическом пространстве. Отличие этой задачи от ранее рассмотренных состоит в том, что в физическом пространстве исследуется особенность, возникающая на звуковой характеристике, а не на свободной поверхности (энтропийной характеристике).

В новых переменных система (1.1) будет иметь вид

$$\begin{cases} \sigma_\tau - \frac{\gamma-1}{2}\tau v_\tau = -\frac{\gamma-1}{4}[(2\nu+1)v + yv_y] + F(\tau, y), \\ v_\tau - \frac{2}{\gamma-1}\tau\sigma_\tau = -\frac{1}{\gamma-1}(\sigma + y\sigma_y) + G(\tau, y). \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь

$$F(\tau, y) = y[\tau(v\sigma_\tau + \frac{\gamma-1}{2}\sigma v_\tau) - \frac{\gamma-1}{4}(2\nu+1)v\sigma - \frac{\gamma-1}{4}y\sigma v_y - \frac{1}{2}(\sigma + y\sigma_y)v],$$

$$G(\tau, y) = y[\tau(vv_\tau + \frac{2}{\gamma-1}\sigma\sigma_\tau) - \frac{1}{\gamma-1}(\sigma + y\sigma_y)\sigma - \frac{1}{2}(v + yv_y)v].$$

Система (3.1) преобразуется к нормальному виду

$$\begin{cases} (1-\tau^2)\sigma_\tau = -\frac{\gamma-1}{4}[(2\nu+1)v + yv_y] - \frac{1}{2}\tau(\sigma + y\sigma_y) + F(\tau, y) + \frac{\gamma-1}{2}\tau G(\tau, y), \\ (1-\tau^2)v_\tau = -\frac{1}{2}\tau[(2\nu+1)v + yv_y] - \frac{1}{\gamma-1}(\sigma + y\sigma_y) + \frac{2}{\gamma-1}\tau F(\tau, y) + G(\tau, y). \end{cases} \quad (3.2)$$

Полученная система (3.2) имеет особенность при  $\tau = \pm 1$ , т.е. в точке  $B$  на звуковых характеристиках  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{23}$ .

В новых переменных данные на  $\Gamma_{12}$  имеют вид

$$\sigma(-1, y) = 0, \quad v(-1, y) = 0. \quad (3.3)$$

Решение системы (3.2) будем искать в виде рядов по степеням  $y$

$$\mathbf{f}(\tau, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{f}_n(\tau) \frac{y^n}{n!}, \quad \mathbf{f} = \{\sigma, v\}. \quad (3.4)$$

Для определения коэффициентов этих рядов система (3.2)  $n$  раз дифференцируется по  $y$  и полагается  $y = 0$ . В результате получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} (1-\tau^2)\sigma'_n &= -\frac{n+1}{2}\tau\sigma_n - \frac{\gamma-1}{4}(2\nu+1+n)v_n + F_n(\tau) + \frac{\gamma-1}{2}\tau G_n(\tau), \\ (1-\tau^2)v'_n &= -\frac{n+1}{\gamma-1}\sigma_n - \frac{\tau}{2}(2\nu+1+n)v_n + G_n(\tau) + \frac{2}{\gamma-1}\tau F_n(\tau). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для построения решений системы (3.5) сначала находятся функции  $\bar{\sigma}_n$ ,  $\bar{v}_n$ , являющиеся общими решениями однородной системы, которая получается занулением функций  $F_n(\tau)$ ,

$G_n(\tau)$ . Для этого из первого уравнения однородной системы исключается  $\bar{v}_n(\tau)$ :

$$(\tau^2 - 1)\bar{\sigma}_n'' - (n + \nu - 1)\tau\bar{\sigma}_n' + \frac{(n + 1)(2\nu - 1 + n)}{4}\bar{\sigma}_n = 0, \quad (3.6)$$

$$\bar{v}_n = \frac{4}{(\gamma - 1)(2\nu + n + 1)} \left[ (\tau^2 - 1)\bar{\sigma}_n' - \frac{n + 1}{2}\tau\bar{\sigma}_n \right].$$

При интегрировании первого из этих уравнений в случаях  $\nu = 0$  и  $\nu = 2$  будем иметь [20]

$$\bar{\sigma}_n = \sigma_{1n}(1 + \tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}} + \sigma_{2n}(1 - \tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}},$$

$$\bar{v}_n = \frac{4}{(\gamma - 1)(2\nu + n + 1)} \left[ \sigma_{1n}(1 + \tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}} \left( \tau - \frac{n + \nu + 1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \sigma_{2n}(1 - \tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}} \left( \tau + \frac{n + \nu + 1}{2} \right) \right].$$

Для интегрирования первого из уравнений (3.6) в случае  $\nu = 1$  вводится новая независимая переменная  $\tilde{\theta} = \frac{\tau + 1}{2}$  или  $\tilde{\theta} = \frac{-\tau + 1}{2}$ . В первом случае  $\tilde{\theta} = 0$  соответствует звуковой характеристике  $\Gamma_{12}$ , приходящей на ось симметрии, во втором  $\tilde{\theta} = 0$  — звуковой характеристике  $\Gamma_{23}$ , отразившейся от оси симметрии.

В обоих случаях получается одно и то же гипергеометрическое уравнение Гаусса [20]. Тильду в дальнейшем опускаем.

$$\theta(\theta - 1)\bar{\sigma}_n'' - \left( n\theta - \frac{n}{2} \right) \bar{\sigma}_n' + \frac{(n + 1)^2}{4}\bar{\sigma}_n = 0$$

или в стандартных обозначениях [20]

$$H(\alpha, \beta, \mu, \bar{\sigma}_n, \theta) = 0,$$

где

$$\alpha = \beta = -\frac{n + 1}{2}; \quad \mu = \frac{n}{2}.$$

В случае нечетных значений  $2n - 1$  интегрирование этого уравнения приводит к следующим функциям:

$$\bar{\sigma}_{2n-1} = \sigma_{2n-1,1}\theta^{\frac{(n+1)}{2}}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2n+3}{2}, \theta\right) + \sigma_{2n-1,2}F\left(-n, -n, -\frac{2n-1}{2}, \theta\right),$$

$$\bar{v}_{2n-1} = -\frac{2}{(\gamma - 1)(n + 1)} \left[ \sigma_{2n-1,2} \left\{ n(2\theta - 1)F\left(-n, -n, -\frac{2n-1}{2}, \theta\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4n^2}{2n-1}\theta(\theta - 1)F\left(1 - n, 1 - n, -\frac{2n-3}{2}, \theta\right) \right\} + \right. \\ \left. + \sigma_{2n-1,1}\theta^{\frac{(n+1)}{2}} \left\{ (\theta - 1) \left( \theta - \frac{(2n+1)}{2} \right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2n+3}{2}, \theta\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4n+6}\theta(\theta - 1)F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2n+5}{2}, \theta\right) \right\} \right].$$

В случае четных значений  $2n$  решения следующие:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{2n} &= \sigma_{2n,1} \theta^{n+1} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+2, \theta\right) + \sigma_{2n,2} \left[ \lambda_\mu \theta^{n+1} \ln \theta F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+2, \theta\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\left(C_{k-\frac{1}{2}}^k\right)^2}{C_n^k} \theta^k + \lambda_\mu \theta^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(C_{n+k+\frac{1}{2}}^k\right)^2}{C_{n+k+1}^k} A_k \theta^k \right], \\ \bar{v}_{2n} &= -\frac{4}{(\gamma-1)(2n+3)} \left[ \sigma_{2n,1} \theta^{n+1} \left\{ \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) (2\theta - 1) - (n+1)(\theta - 1) \right] F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+2, \theta\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\theta(\theta - 1) F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, n+3, \theta\right) \right\} + \sigma_{2n,2} \left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right) (2\theta - 1) \left[ \lambda_\mu \theta^{n+1} \ln \theta F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+2, \theta\right) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\left(C_{k-\frac{1}{2}}^k\right)^2}{C_n^k} \theta^k + \lambda_\mu \theta^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(C_{n+k+\frac{1}{2}}^k\right)^2}{C_{n+k+1}^k} A_k \theta^k \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2\theta(\theta - 1) \left[ \lambda_\mu \theta^n ((n+1) \ln \theta + 1) F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+2, \theta\right) + \lambda_\mu \theta^{n+1} F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, n+3, \theta\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\left(C_{k-\frac{1}{2}}^k\right)^2}{C_n^k} k \theta^{k-1} + \lambda_\mu \theta^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(C_{n+k+\frac{1}{2}}^k\right)^2}{C_{n+k+1}^k} (n+k+1) A_k \theta^k \right] \right\} \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $A_k = \sum_{p=0}^k \left( \frac{2}{p-1/2} - \frac{2p+1}{p(p+1)} \right)$ ;  $\lambda_\mu = (-1)^n \frac{[(2n+1)!!]^2}{4^{n+1} n!}$ ,  $\lambda_0 = \frac{1}{4}$ .

Гипергеометрические функции  $F(\alpha, \beta, \mu, \theta)$  есть аналитические функции в интервале  $0 < \theta < 1$  и представляются гипергеометрическим рядом [20]:

$$F(\alpha, \beta, \mu, \theta) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{\alpha+k-1}^k C_{\beta+k-1}^k}{C_{\mu+k-1}^k} \theta^k.$$

При возвращении к переменной  $\tau$  и введении соответствующих обозначений в случае  $\nu = 1$  получатся следующие решения однородной системы (3.6):

$$\bar{\sigma}_n = \sigma_{1n} B_n^{11}(\tau) + \sigma_{2n} B_n^{12}(\tau),$$

$$\bar{v}_n = \sigma_{1n} B_n^{21}(\tau) + \sigma_{2n} B_n^{22}(\tau).$$

После этого при решении неоднородной системы (3.5) методом вариации произвольных постоянных определяются величины  $\sigma_{1n}$ ,  $\sigma_{2n}$ . В результате в случаях  $\nu = 0$  и  $\nu = 2$  решения

системы (3.5) имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \sigma_{1n}(1+\tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}} + \sigma_{2n}(1-\tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}} + \\
&+ \frac{(1+\tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}}}{n+\nu+1} \int_0^\tau \left[ \frac{n+\nu+1}{2} F_n - \frac{\gamma-1}{2} \left( \tau + \frac{n+\nu+3}{2} \right) G_n \right] (1+\tau)^{-\frac{n+\nu+3}{2}} d\tau + \\
&+ \frac{(1-\tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}}}{n+\nu+1} \int_0^\tau \left[ \frac{n+\nu+1}{2} F_n - \frac{\gamma-1}{2} \left( \tau - \frac{n+\nu+3}{2} \right) G_n \right] (1-\tau)^{-\frac{n+\nu+3}{2}} d\tau, \\
v_n &= \frac{4}{(\gamma-1)(2\nu+n+1)} \left[ \sigma_{1n}(1+\tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}} \left( \tau - \frac{n+\nu+1}{2} \right) + \right. \\
&+ \sigma_{2n}(1-\tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}} \left( \tau + \frac{n+\nu+1}{2} \right) + \frac{(1+\tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}} \left( \tau - \frac{n+\nu+1}{2} \right)}{n+\nu+1} \times \\
&\times \int_0^\tau \left[ \frac{n+\nu+1}{2} F_n - \frac{\gamma-1}{2} \left( \tau + \frac{n+\nu+3}{2} \right) G_n \right] (1+\tau)^{-\frac{n+\nu+3}{2}} d\tau + \\
&\quad \left. + \frac{(1-\tau)^{\frac{n+\nu+1}{2}} \left( \tau + \frac{n+\nu+1}{2} \right)}{n+\nu+1} \int_0^\tau \left[ \frac{n+\nu+1}{2} F_n - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\gamma-1}{2} \left( \tau - \frac{n+\nu+3}{2} \right) G_n \right] (1-\tau)^{-\frac{n+\nu+3}{2}} d\tau \right], \tag{3.7}
\end{aligned}$$

где  $\sigma_{1n}$ ,  $\sigma_{2n}$  уже являются произвольными постоянными.

В случае  $\nu = 1$  решения системы (3.5) следующие:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \sigma_{1n} B_n^{11}(\tau) + \sigma_{2n} B_n^{12}(\tau) + \\
&+ B_n^{11}(\tau) \int_0^\tau \frac{1}{\Delta_n} \left[ \left( F_n + \frac{\gamma-1}{2} \tau G_n \right) B_n^{22}(\tau) - \left( G_n + \frac{2}{\gamma-1} \tau F_n \right) B_n^{12}(\tau) \right] d\tau + \\
&+ B_n^{12}(\tau) \int_0^\tau \frac{1}{\Delta_n} \left[ \left( F_n + \frac{\gamma-1}{2} \tau G_n \right) B_n^{11}(\tau) - \left( G_n + \frac{2}{\gamma-1} \tau F_n \right) B_n^{21}(\tau) \right] d\tau, \\
v_n &= \sigma_{1n} B_n^{21}(\tau) + \sigma_{2n} B_n^{22}(\tau) + \\
&+ B_n^{21}(\tau) \int_0^\tau \frac{1}{\Delta_n} \left[ \left( F_n + \frac{\gamma-1}{2} \tau G_n \right) B_n^{22}(\tau) - \left( G_n + \frac{2}{\gamma-1} \tau F_n \right) B_n^{12}(\tau) \right] d\tau + \\
&+ B_n^{22}(\tau) \int_0^\tau \frac{1}{\Delta_n} \left[ \left( F_n + \frac{\gamma-1}{2} \tau G_n \right) B_n^{11}(\tau) - \left( G_n + \frac{2}{\gamma-1} \tau F_n \right) B_n^{21}(\tau) \right] d\tau, \tag{3.8}
\end{aligned}$$

где

$$\Delta_n = B_n^{11} B_n^{22} - B_n^{12} B_n^{21}.$$

Определение произвольных постоянных  $\sigma_{1n}, \sigma_{2n}$  производится при решении следующей задачи. Пусть в момент  $\tau = 0$  (т. е. при  $\theta = 0.5$ ) на прямой  $BE$ , т. е. в момент времени  $t = 1$  (см. рис. 1), заданы распределения параметров газа

$$\sigma(0, y) = \sigma_0(y), \quad v(0, y) = v_0(y). \quad (3.9)$$

Предполагается, что  $\sigma_0(y), v_0(y)$  — аналитические функции и условия (3.3), (3.9) согласованы:

$$v_0(0) = \sigma_0(0) = 0.$$

Условия (3.9) позволяют строить решение системы (3.2) как выше прямой  $BE$  в секторе  $EVE_2$ , так и ниже этой прямой в секторе  $EVE_1$  (см. рис. 1). При разложении функций  $\sigma_0(y), v_0(y)$  в ряды по степеням  $y$  получаются начальные условия для определения произвольных постоянных  $\sigma_{1n}, \sigma_{2n}$ .

Таким образом, для задачи (3.2), (3.9) строится единственное решение в виде рядов (3.4), которое по теореме Ковалевской [21] является локально-аналитическим.

Результат анализа структуры коэффициентов ряда (3.4) содержит

**Лемма 3.1.** *Коэффициенты рядов (3.4) при  $n > 0$  являются многочленами от аргументов*

$$(1 + \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad (1 - \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad (1 + \tau)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1 - \tau)^{-\frac{1}{2}}, \\ (1 + \tau)^2 \ln(1 + \tau), \quad (1 - \tau)^2 \ln(1 - \tau),$$

*и степени этих многочленов не выше  $An$ . Коэффициенты многочленов — аналитические функции от  $\tau$  в интервале  $-1 < \tau < 1$ ,  $A = \text{const}$ .*

На основании леммы доказано, что при  $\tau = \pm 1$  ряды (3.4) расходятся, область сходимости рядов (3.4) является сектором  $E_1BE_2$  (см. рис. 1) и не дотягивается до характеристик  $\Gamma_{12}, \Gamma_{23}$ . Поэтому построенное решение нельзя состыковать с покоящимся газом через поверхность слабого разрыва  $\Gamma_{12}$ . Кроме того, ряды (3.4) нельзя использовать для построения характеристики  $\Gamma_{23}$ .

Однако в случае  $\nu = 1$  области сходимости рядов (3.4) и (2.1) пересекаются (сектор  $DBE_1$  (см. рис. 1)). Следовательно, остается возможность, подбирая соответствующим образом условия (3.9), непрерывно состыковать решения (3.4) и (2.1) на линии, лежащей в общей области сходимости рядов (3.4) и (2.1), т. е. на линии, проходящей в секторе  $DBE_1$ .

Далее исследуется другая возможность для определения произвольных функций  $\sigma_{1n}, \sigma_{2n}$ : из условий (3.3) непрерывной состыковки решения системы (3.2) с однородным покоящимся газом. Для этого в (3.4) слева полагается нуль, а в правую часть подставляется  $\tau = -1$ . В результате при  $\nu = 2$  определяются константы

$$\sigma_{2n} = -\frac{1}{n+3} \int_0^{-1} \left[ \frac{n+3}{2} F_n - \frac{\gamma-1}{2} \left( \tau - \frac{n+5}{2} \right) G_n \right] (1-\tau)^{-\frac{n+5}{2}} d\tau.$$

Следовательно, в случае  $\nu = 2$

$$\sigma_n = \sigma_{1n}(1+\tau)^{\frac{n+3}{2}} + \frac{(1+\tau)^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \int_0^{\tau} \left[ \frac{n+3}{2} F_n - \frac{\gamma-1}{2} \left( \tau + \frac{n+5}{2} \right) G_n \right] (1+\tau)^{-\frac{n+5}{2}} d\tau + \\ + \frac{(1-\tau)^{\frac{n+3}{2}}}{n+3} \int_{-1}^{\tau} \left[ \frac{n+3}{2} F_n - \frac{\gamma-1}{2} \left( \tau - \frac{n+5}{2} \right) G_n \right] (1-\tau)^{-\frac{n+5}{2}} d\tau,$$

$$\begin{aligned}
v_n = & \frac{4}{(\gamma - 1)(n + 5)} \left\{ \sigma_{1n}(1 + \tau)^{\frac{n+3}{2}} \left( \tau - \frac{n+3}{2} \right) + \right. \\
& + \frac{(1 + \tau)^{\frac{n+3}{2}} \left( \tau - \frac{n+3}{2} \right)}{n + 3} \int_0^\tau \left[ \frac{n+3}{2} F_n - \frac{\gamma - 1}{2} \left( \tau + \frac{n+5}{2} \right) G_n \right] (1 + \tau)^{-\frac{n+5}{2}} d\tau + \\
& \left. + \frac{(1 - \tau)^{\frac{n+3}{2}} \left( \tau + \frac{n+3}{2} \right)}{n + 3} \int_{-1}^\tau \left[ \frac{n+3}{2} F_n - \frac{\gamma - 1}{2} \left( \tau - \frac{n+5}{2} \right) G_n \right] (1 - \tau)^{-\frac{n+5}{2}} d\tau \right\}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Аналогичные формулы получаются и в случае  $\nu = 0; 1$ .

**Лемма 3.2.** Коэффициенты рядов (3.4), решающих задачу (3.2), (3.3), имеют следующий вид:

в случае  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$

$$(\tau + 1)P_n[(\tau + 1)^{\frac{1}{2}}, \tau + 1, (\tau + 1) \ln(\tau + 1)];$$

в случае  $\nu = 0$

$$P_n[(\tau + 1)^{\frac{1}{2}}, \tau + 1, (\tau + 1) \ln(\tau + 1)].$$

Здесь  $P_n$  — многочлены от указанных аргументов, степени которых не выше  $n$ . Коэффициенты этих многочленов в интервале  $-1 < \tau < 1$  являются аналитическими функциями от  $\tau$  ( $A = \text{const}$ ).

**Доказательство.** Лемма доказывается по индукции. Далее приводится ее доказательство в случае  $\nu = 2$ . База индукции очевидна, поскольку

$$\sigma_0 = \sigma_{10}(1 + \tau)^{\frac{3}{2}}, \quad v_0 = \frac{4}{5(\gamma - 1)} \sigma_{10}(1 + \tau)^{\frac{3}{2}} \left( \tau - \frac{3}{2} \right).$$

При подстановке полученных выражений в соотношения (3.10) и после интегрирования получатся следующие функции:

$$\sigma_1 = a_{10}(1 + \tau)^2 \ln(1 + \tau) + w_{10}(\tau)(1 + \tau)^2,$$

$$v_1 = b_{10}(1 + \tau)^2 \ln(1 + \tau) + v_{10}(\tau)(1 + \tau)^2,$$

где  $a_{10}, b_{10} - \text{const}$ , а  $w_{10}(\tau), v_{10}(\tau)$  — аналитические функции от  $\tau$  в интервале  $-1 < \tau < 1$ .

Далее делается индуктивное предположение, что  $\sigma_l, v_l$  ( $l < n$ ) обладают необходимой структурой. Подстановка их выражений в (3.10) и последующее интегрирование показывают, что  $\sigma_n, v_n$  обладают нужной структурой. Лемма доказана.  $\square$

Оставшиеся произвольные постоянные  $\sigma_{1n}$  определяются при задании в точке  $\tau = 0$  одного из распределений (3.9): либо  $\sigma_0(y)$ , либо  $v_0(y)$ . То есть задача (3.2), (3.3) имеет единственное решение при задании одного дополнительного условия, что соответствует общей теореме существования решения у характеристической задачи Коши стандартного вида.

Однако в этом случае сходимость ряда не доказана, в том числе и потому, что трудно анализировать при  $\tau = 1$  поведение специальных функций, задающих коэффициенты рядов (3.4) в случае  $\nu = 1$ , хотя в случае  $\nu = 2$  коэффициенты рядов (3.4) при  $\tau = 1$

особенностей не имеют, что легко проверяется. Кроме того, поскольку коэффициенты рядов (3.4) в случае  $\nu = 0$  (когда решением является простая волна) и коэффициенты рядов для  $\nu = 1$  и  $\nu = 2$  имеют практически одинаковую структуру, это позволяет надеяться на сходимость рядов (3.4).

Таким образом, про особенность течения разрежения в окрестности точки  $B(t = 1, r = 0)$  установлено следующее. Возможно построение рядов, решающих систему уравнений газовой динамики в окрестности точки  $B(t = 1, r = 0)$  и имеющих в этой точке различные особенности. Произволом, имеющимся в таких решениях, можно распорядиться разными способами.

1. Если удовлетворяются условия на звуковой характеристике  $\Gamma_{12}$ , то область сходимости таких рядов имеет секториальный вид и не дотягивается до прямой  $t = 1$  (например, решение задачи о распаде специального разрыва) (см. рис. 2, *a, б*).

2. Если задавать данные при  $t = 1$ , то в качестве области сходимости рядов получается некий сектор  $E_1BE_2$  (см. рис. 1), не дотягивающийся до звуковых характеристик  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{23}$ .

3. Если удовлетворяются условия на звуковой характеристике  $\Gamma_{12}$  и одно дополнительное условие на прямой  $t = 1$ , то построено только формальное решение задачи.

Каждое из построенных решений имеет свои особенности, поэтому состыковать их можно только приближенно. Построенные решения описывают волну разрежения, однако поскольку в течении отсутствуют сильные разрывы, их можно использовать и для описания волн сжатия.

В заключение автор благодарит С.П. Баутина за полезное обсуждение данной работы.

## Список литературы

- [1] СИДОРОВ А.Ф. Приближенный метод решения некоторых задач о пространственном истечении газа в вакуум // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1976. Т. 7, № 5. С. 137–148.
- [2] БАУТИН С.П. Схлопывание одномерной полости // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, вып. 1. С. 50–59.
- [3] БАУТИН С.П. Двумерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 3. С. 433–439.
- [4] ДЕРЯБИН С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 65. С. 56–74.
- [5] ДЕРЯБИН С.Л. Трехмерное истечение в вакуум неоднородного движущегося газа в условиях действия внешних массовых сил // Динамика сплошной среды: Сб. науч.тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 83. С. 60–71.
- [6] ДЕРЯБИН С.Л., ЧУЕВ Н.П. Сферически-симметричное истечение самогравитирующего идеального газа в вакуум // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 77–84.
- [7] JEFFREY A. The development of jump discontinuities nonlinear hyperbolic systems of equations in two independent variables // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1963. Vol. 14, N 1. P. 3–97 (1989. P. 27–37).

- [8] КРАЙКО А.Н. Структура течений разрежения и сжатия в окрестности точки отражения “граничной” характеристики // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 1998. Т. 223. С. 187–195.
- [9] КРАЙКО А.Н. Структура сферического течения разрежения в окрестности точки отражения “граничной” характеристики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, вып. 6. С. 972–979.
- [10] БАУТИН С.П., КАЗАКОВ А.Л. Течения газа с ударными волнами, расходящимися от оси или центра симметрии с конечной скоростью // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 465–474.
- [11] СИДОРОВ А.Ф. Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа // Докл. АН СССР. 1993. Т. 329, № 4. С. 444–448.
- [12] СИДОРОВ А.Ф. Исследование особенностей нестационарных конических течений газа // Докл. АН СССР. 1994. Т. 335, № 6. С. 732–735.
- [13] ТИТОВ С.С. Асимптотика некоторых функций, описывающих сферически-симметричный разлет газа в вакуум // Аналитические и численные методы исследования задач механики сплошной среды: Тр. ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1987. С. 113–118.
- [14] ЗЕЛЬДОВИЧ Я.Б., РАЙЗЕР Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука. 1966. 632 с.
- [15] КРАЙКО А.Н. Асимптотические закономерности нестационарного расширения идеального газа в пустоту // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 70–80.
- [16] ОВСЯННИКОВ Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 336 с.
- [17] БАУТИН С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.
- [18] БАУТИН С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997. 160 с.
- [19] БАУТИН С.П. Исследование области сходимости специальных рядов, решающих некоторые задачи газовой динамики // Численные методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1978. Т. 9, № 4. С. 5–17.
- [20] КАМКЕ Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука. 1971. 576 с.
- [21] КУРАНТ Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

*Поступила в редакцию 23 марта 2004 г.,  
в переработанном виде — 30 июня 2005 г.*