

ТЕЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ С ЧАСТИЧНО ПРОВОДЯЩИМИ СТЕНКАМИ

А. М. БУБЕНЧИКОВ, В. С. ПОПОНИН, А. В. КОЛЕСНИКОВА

Томский государственный университет, Россия

e-mail: Bubenchikov@mail.tomsknet.ru, posv@mail.tomsknet.ru

The simplest algorithm that solves a self-similar problem of the flow of conductive fluid in a channel with partially conductive walls embedded in a transversal magnetic field. Calculations show that the velocity field has two maximums in this case.

Теоретическому и экспериментальному изучению установившихся ламинарных течений в круглых трубах посвящены многие работы. Аналитические решения задач о распределении скорости и индуцированного магнитного поля представляются в виде тригонометрических рядов [1], которые довольно громоздки и иногда плохо сходятся даже при больших значениях чисел Гартмана [2, 3]. Имеются также теоретические работы, базирующиеся на приближенном подходе, основанном на выделении в потоке характерных областей, для каждой из которых выписываются свои приближенные уравнения. Такой метод впервые был применен Дж. Шерклифом для трубы с непроводящими стенками [4] и затем обобщен на случай проводящих стенок [5]. Этот метод впоследствии был развит и усовершенствован А.Г. Куликовским [6]. Численное решение внутренних автомодельных задач магнитной гидродинамики выполнено в [7, 8]. Причем в [7] для реализации математической постановки задачи использован метод установления с расщеплением вычислительного процесса по координатным направлениям. В [8] интегрируются непосредственно стационарные уравнения магнитной гидродинамики и построенная численная процедура опирается на использование метода простой итерации.

В настоящей работе представлено численное решение новой задачи о магнитно-гидродинамическом течении вязкой жидкости в канале, имеющем вид рельсовой камеры. Таким образом, в нашем случае отдельные части стенки канала были проводящими. Если речь идет о системе охлаждения жидким металлом, то составная стенка предоставляет новые возможности в реализации усилий по оптимизации теплообменных процессов, а также в решении вопроса о снижении сопротивления при том же уровне интенсивности теплосъема. В работе проанализировано влияние чисел Гартмана и углового размера окон проводимости на индуцированные электрические поля и поля скорости жидкости.

Будем рассматривать течение электропроводящей жидкости на участке стабилизированного движения в канале круглого поперечного сечения, находящемся в однородном по длине канала электромагнитном поле. В работе [9] Дж. Хант показал, что в трубах

постоянного сечения при воздействии на них поперечным магнитным полем устанавливается течение с параллельными оси канала линиями тока. Это дает возможность исключить нелинейные конвективные члены в уравнении движения, а градиент давления считать функцией только продольной координаты. Поэтому в математической постановке задачи останется единственное из трех возможных скалярных уравнений импульсов, определяющее продольную компоненту скорости. Кроме того, в постановку задачи будет входить уравнение для продольной компоненты индуцированного магнитного поля. Если рассматривать течение с постоянным расходом, то определяющие уравнения лучше обезразмерить с помощью следующих масштабных параметров: $r_* = x_* = R$ — радиус канала; $U_* = V_0$ — средняя скорость потока; $B_* = \sigma\mu_0 B_0 V_0 R$; $p_* = \mu V_0 / R$. Здесь B_0 — величина магнитной индукции внешнего однородного магнитного поля; ρ , μ , σ , μ_0 — соответственно плотность, вязкость, проводимость и магнитная проницаемость жидкости. Тогда безразмерный вид уравнений будет следующим [10]:

$$\Delta U = Ha^2 \left(\cos \theta \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) + p'_z; \quad (1)$$

$$\Delta B = \cos \theta \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad (2)$$

причем угловая координата θ отсчитывается от направления вектора \vec{B}_0 оси x по стрелке часов. Здесь r — радиальная координата; $Ha = B_0 R \sqrt{\sigma/\mu}$ — число Гартмана; $p'_z = \partial p / \partial z$ — перепад давления, приходящийся на единицу длины; $\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ — плоский оператор Лапласа, записанный в полярных координатах.

Уравнение импульсов (1) интегрируется с использованием условия прилипания жидкости на стенки канала:

$$U|_{r=1} = 0, \quad (3)$$

а уравнение индукции (2) с условиями, характеризующими проводящие свойства стенок, имеет вид

$$\frac{\partial B}{\partial r} \Big|_{\Gamma_{1,3}} = 0; \quad B \Big|_{\Gamma_{2,4}} = 0. \quad (4)$$

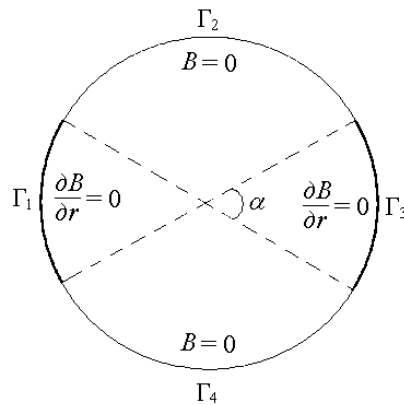


Рис. 1. Контур поперечного сечения с указанными на нем зонами изоляции и проводимости (жирные линии).

Как видно из рис. 1, стенки рассматриваемого канала выполнены в виде рельсовой камеры, в которой два рельса (Γ_1, Γ_3) являются участками идеальной проводимости, а два других (Γ_2, Γ_4) — участками изоляции канала.

Введем сетку, покрывающую область интегрирования с равномерными шагами h и η соответственно по r - и θ -координатам: $h = 1/N$, $\eta = 2\pi/M$. Здесь N и M — заданные числа, определяющие частоту разбиения исходных координатных отрезков $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Аппроксимируем дифференциальные члены, входящие в (1), следующим образом:

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right]_{i,j} = \frac{1}{hr_j} \left[r_{j+\frac{1}{2}} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{h} - r_{j-\frac{1}{2}} \frac{U_{i,j} - U_{i,j-1}}{h} \right] + O(h^2); \quad (5)$$

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right]_{i,j} = \frac{1}{r_j^2} \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{\eta^2} + O(\eta^2). \quad (6)$$

Тогда, если придерживаться обозначений [11], с учетом (5) и (6) разностный аналог (1) будет иметь вид

$$a_p U_{i,j} = a_e U_{i-1,j} + a_w U_{i+1,j} + a_s U_{i,j-1} + a_n U_{i,j+1} - b - p'_z, \quad (7)$$

где

$$a_e = a_w = \frac{1}{r_j^2 \eta^2}, \quad a_s = \frac{r_{j-\frac{1}{2}}}{r_j h^2},$$

$$a_n = \frac{r_{j+\frac{1}{2}}}{r_j h^2}, \quad a_p = a_e + a_w + a_s + a_n, \quad (8)$$

$$b = \text{Ha}^2 F_{i,j}, \quad F = \left(\cos \theta \frac{\partial B}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right).$$

Задачи о течении жидкости в трубах и каналах с заданным расходом целесообразно решать с использованием подхода Л.М. Симуни [12]. Согласно этому подходу для сеточного значения скорости делаем представление

$$U_{i,j} = W_{i,j} + Z_{i,j} p'_z. \quad (9)$$

Тогда из уравнений (7) получим следующие две системы уравнений:

$$a_p W_{i,j} = a_e W_{i-1,j} + a_w W_{i+1,j} + a_s W_{i,j-1} + a_n W_{i,j+1} - b; \quad (10)$$

$$a_j Z_{i,j} = a_e Z_{i-1,j} + a_w Z_{i+1,j} + a_s Z_{i,j-1} + a_n Z_{i,j+1} - 1. \quad (11)$$

Проинтегрируем численно обе части уравнения (9), тогда для градиента давления можно получить соотношение

$$p'_z = \frac{(1 - J_w)}{J_z}. \quad (12)$$

Здесь J_w и J_z — разностные представления следующих интегралов:

$$\frac{1}{S} \iint_s W ds, \quad \frac{1}{S} \iint_s Z ds,$$

где S — площадь поперечного сечения канала.

Таким образом, вместо системы (7), содержащей неизвестный градиент давления p'_z , мы разрешаем две системы — (10) и (11), в которые указанный градиент не входит, после чего по соотношению (12) находим p'_z и далее по (9) — сеточные значения продольной компоненты скорости.

Разностный аналог уравнения для B будет таким же, как и для W , т. е. иметь вид (10), за исключением коэффициентов b , которые в данном случае будут определяться соотношением

$$b' = \cos \theta_i \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j-1}}{2h} - \frac{\sin \theta_i}{r_j} \frac{U_{i+1,j} - U_{i-1,j}}{2\eta}.$$

Поэтому формула для нахождения значений B на новом итерационном слое будет выглядеть следующим образом:

$$B_{i,j} = (a_e B_{i-1,j} + a_w B_{i+1,j} + a_s B_{i,j-1} + a_n B_{i,j+1} - b') / a_p, \quad (13)$$

где коэффициенты a_e, a_s, a_n, a_w определяются формулами (8). Формула (13) вместе с соотношением (14) для B_0 используется для простого пересчета значений B во всех внутренних точках области, т. е. применяется многократно до сходимости.

Чтобы найти решение систем разностных уравнений (10), (11) и (13), опираясь на использование полярных координат (r, θ) , необходимо определить значения всех искомых функций в начале используемой системы координат, т. е. при $r = 0$. В работе [10] найдены соотношения, определяющие значения искомых функций в начале полярной системы отсчета. Наиболее простая форма этих соотношений определяется как

$$\Phi_0 = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^M \Phi_{1,k}, \quad \Phi = W, Z, B. \quad (14)$$

С математической точки зрения это означает, что *при стабилизированном движении значение всех магнитно-гидродинамических параметров на оси трубы есть среднее арифметическое соответствующих значений на ближайшей к оси сеточной окружности.*

Соотношение (14) является приближенным и обладает погрешностью аппроксимации порядка h^2 . В случае, если b в (10) равно нулю (или $b' = 0$ в (11)), то оно переходит в точное разностное соотношение.

Как видно из (10), (11) и (13), дискретный аналог определяющих уравнений может быть представлен следующим образом:

$$a_p \Phi_p = \sum a_{nb} \Phi_{nb} + b,$$

где согласно введенным в [11] обозначениям индекс “ nb ” представляет соседнюю точку. Новые значения во всех внутренних узловых точках расчетной области, за исключением точки, лежащей на оси канала, будут определяться по соотношению

$$\Phi_p = \left(\sum a_{nb} \Phi_{nb}^* + b \right) / a_p, \quad (15)$$

а в начале полярной системы отсчета — по соотношению

$$\Phi_0 = \frac{1}{M} \sum \Phi_{1,k}^*, \quad (16)$$

где звездочкой отмечены соседние значения рассчитываемой величины, находящиеся в памяти вычислительной машины. Для соседних точек, к которым уже обращались в ходе текущей итерации, это новые рассчитанные значения, для остальных — значения с предыдущей итерации. Когда перебор всех внутренних точек по соотношениям (15), (16) закончен, а также перевычислены новые значения расчетных величин на границе (если это необходимо), одна глобальная итерация метода Гаусса — Зейделя считается законченной.

Для сеточного значения продольной компоненты скорости жидкости на стенке канала следует записать

$$U_{N,j} = 0, i = \overline{1, M}. \quad (17)$$

Здесь M — полное число точек по окружной координате. Аналогичные условия мы используем для W и Z . Так как участки проводимости расположены симметричным образом относительно θ , значение M должно быть четным. Пусть M_1 — число точек по θ в секторе проводимости, тогда граничные условия (4) в разностном виде можно представить следующим образом:

$$B_{N,i} = B_{N-1,i}, \quad i = \overline{1 + M_1} \cup i = \overline{\frac{M}{2} + 1, \frac{M_2}{2} + M_1}; \quad (18)$$

$$B_{N,i} = 0, \quad i = \overline{M_1 + 1, \frac{M}{2}} \cup i = \overline{\frac{M}{2} + M_1 + 1, M}. \quad (19)$$

Реализация построенного алгоритма выполнена на языке программирования Visual C++.

Первоначально нами было рассмотрено течение проводящей жидкости в канале с непроводящими стенками и рассчитано сопротивление магнитно-гидродинамического потока для круглой трубы при различных числах Гартмана. На рис. 2 представлены результаты сопоставления расчетных величин с данными опытов Дж. Гартмана [13].

Как видно из рисунка, имеется хорошее согласование экспериментальных и расчетных значений коэффициента трения в широком диапазоне чисел Гартмана. Наряду с этим было проведено тестирование на режиме течения непроводящей среды и получен параболоид Пуазейля. В случае же течения проводящей среды в канале с непроводящими стенками мы имеем весьма характерную поверхность скоростей, представляющую собой результат сжатия магнитным полем упомянутого параболоида по двум взаимно перпендикулярным направлениям: оси течения и вектору магнитной индукции (рис. 3).

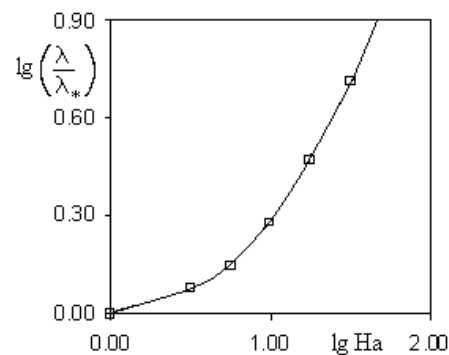


Рис. 2. Результаты расчета (сплошная линия) и экспериментальные данные Дж. Гартмана [13] (символы \diamond). Все расчеты выполнены при $\alpha = 0$. Здесь $\lambda_* = 64/\text{Re}$.

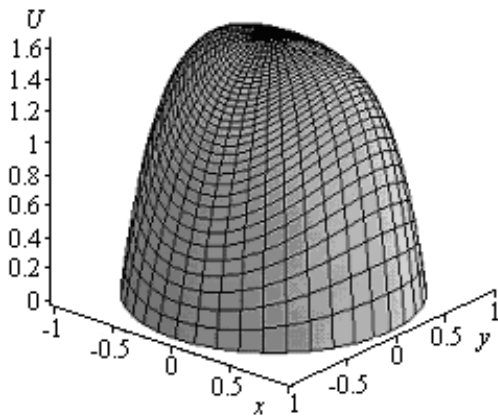


Рис. 3. Поверхность скоростей в канале с непроводящими стенками ($Ha = 7$, $\alpha = 0$).

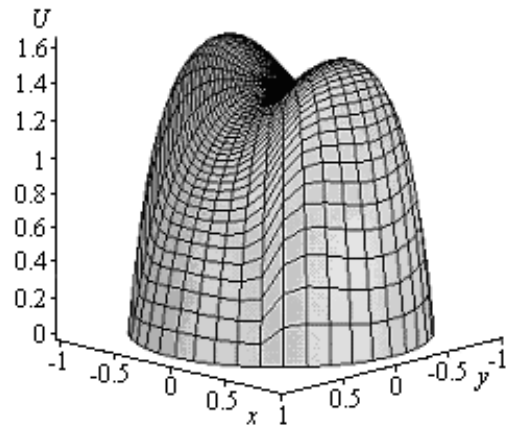


Рис. 4. Поверхность скоростей в канале с частично проводящими стенками ($Ha = 7$, $\alpha = \pi/2$).

Так что в результате распределение скоростей остается симметричным лишь относительно двух центральных сечений (сечений, проходящих через ось канала), одно из которых параллельно, а другое перпендикулярно \vec{B}_0 . При малых же числах Гартмана ($Ha < 3$) поверхность скоростей является практически осесимметричной. В то же время с ростом Ha описанные выше характерные особенности в распределении скоростей проявляются все более отчетливо.

Поверхность скоростей в канале с частично проводящими стенками в случае, когда угловой размер окна проводимости α равен $\pi/2$, приведена на рис. 4.

Как видим, в этом случае течение не является осесимметричным, но имеет две центральные плоскости симметрии, переходящие через ось трубы параллельно и перпендикулярно вектору напряженности внешнего однородного магнитного поля. Указанная симметрия поверхности скоростей есть отражение физического содержания задачи, поскольку при проведении вычислений мы не выделяли прямых или поверхностей, на которых выставлялись бы условия вида $\partial F/\partial n = 0$, где n — нормаль к упомянутой прямой или поверхности. В принципе в данном случае можно было бы построить численные решения на одной четверти круга и далее дополнить его по соображениям симметрии. Однако при проведении настоящих расчетов мы использовали универсальную сквозную (по всей физической области) технологию проведения вычислений, опирающуюся на использование соотношений (14). Такая технология пригодна и для случая, когда нельзя выделить даже одной плоскости (линии) симметрии или антисимметрии.

Из рис. 4 следует, что в этом случае поверхность скоростей имеет два максимума, расположенных симметрично относительно сечения, которое проходит через ось трубки и вектор магнитной индукции. Причем эти максимумы выражены тем значительнее, чем выше число Гартмана. Безразмерный градиент давления в рассматриваемом случае совпадает с безразмерной величиной сопротивления единичного участка канала, т. е. с коэффициентом сопротивления, поэтому $c_f = p'_z$. Число Гартмана как безразмерный комплекс вида $Ha = B_0 R (\sigma/\mu)^{0.5}$ может изменяться при вариации B_0 либо геометрического размера задачи R , либо с изменением отношения физических параметров σ/μ . Однако в настоящей работе для простоты рассуждений мы соотносим рост или уменьшение числа Гартмана с изменением напряженности внешнего однородного магнитного поля. Продолжая даль-

нейший анализ влияния числа Гартмана, следует отметить, что с его ростом существенно увеличивается c_f как для каналов с $\alpha = 0$, так и для каналов с проводящими вставками.

При течении проводящей жидкости в канале с изолированными стенками возникает структура поперечных токов, показанная на рис. 5. Как видим, у стенок канала траектории зарядов загущены (эффект Дж. Гартмана для контуров тока). Расчеты показывают, что движением жидкости индуцируется такое электромагнитное поле, которое препятствует перемещению жидкости в направлении среднего потока. Поэтому, если среднее движение жидкости осуществляется от нас перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 5 или 6), то в ядре потока заряды должны перемещаться сверху вниз. Сила Лоренца будет направлена здесь против среднего движения. Так как траектории движения заряженных частиц все замкнутые, частицы, двигавшиеся изначально сверху вниз, рано или поздно приобретают обратное направление, т. е. снизу вверх. Обратное направление на этом участке движения имеет и сила Лоренца, которая теперь уже не сдерживает жидкие частицы, а, напротив, их ускоряет. В результате этого поверхность скоростей имеет заполненный вид (большие радиальные градиенты скорости у поверхности) и значительный плоский участок в приосевой зоне (см. рис. 3).

Необходимо также отметить, что заряды, двигающиеся у поверхности на участках, которые примыкают к вертикальному диаметру, практически не генерируют пондеромоторной силы, поскольку здесь их скорости почти параллельны вектору \vec{B}_0 . Поэтому магнитное поле не оказывает локального действия на движение жидких частиц на этих участках. В результате поверхность скоростей немного сжата в направлении вектора \vec{B}_0 .

Если же стенки канала составлены из участков изоляции и проводимости, то траектории зарядов не лежат целиком внутри области течения, а замыкаются на проводящие участки стенки канала. Попадая на эти участки, заряженные частицы некоторую часть своего пути двигаются внутри стенки канала, а потом начинают обратное по отношению к стенкам перемещение по траекториям, почти перпендикулярным к поверхности канала.

Таким образом, интегрально в случае канала с проводящими вставками заряженные

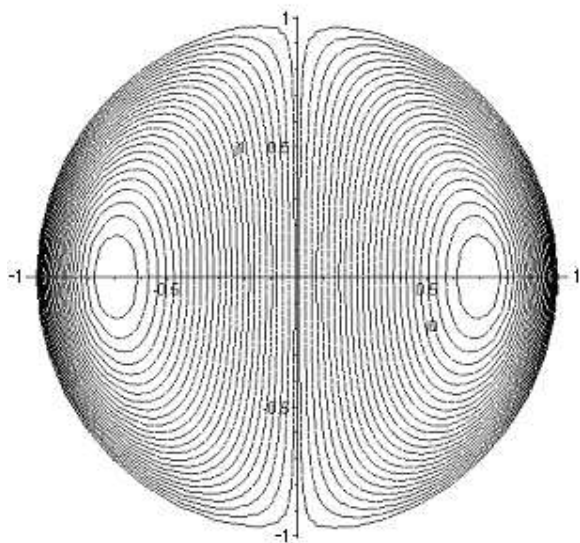


Рис. 5. Траектории движения заряженных частиц ($\alpha = 0$).

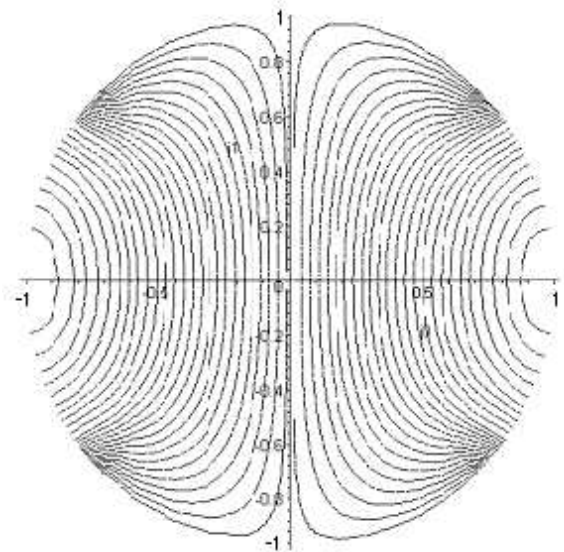


Рис. 6. Траектории движения заряженных частиц ($\alpha = 2\pi/3$).

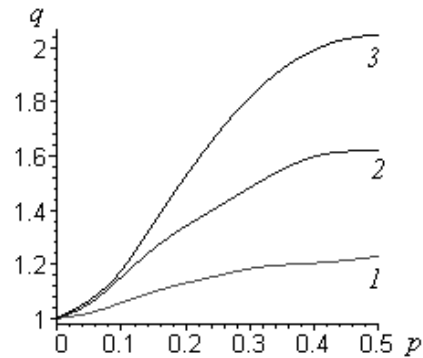


Рис. 7. Распределения относительного коэффициента трения $q = \lambda/\lambda_0$ в зависимости от углового размера окон проводимости $p = \alpha/2\pi$. Здесь λ_0 отвечает расчету при $\alpha = 0$; кривые 1–3 соответствуют $Na = 4, 7, 10$.

частицы, так же как и в реперном варианте, движутся по замкнутым траекториям, только при этом в области течения отсутствуют участки возвратного движения зарядов, на которых сила Лоренца способствует перемещению жидких частиц в направлении основного потока. Поэтому с введением участков проводимости сопротивление движению жидкости всегда увеличивается. Если $\alpha = 0$, то участки возвратного движения зарядов в какой-то мере компенсируют тормозящее действие поперечных токов в центральной части канала, в то время как при $\alpha = \pi/2$ выстраивается целая полоса с направлением перемещения зарядов, перпендикулярным к вектору \vec{B}_0 . Эта полоса оказывает сдерживающее влияние на движение жидких частиц, осуществляемое в направлении среднего потока.

На рис. 7 представлены распределения коэффициентов трения λ , рассчитанные для канала с проводящими вставками, отнесенные к соответствующей величине λ_0 , найденной при $\alpha = 0$. Как видно из представленных обобщающих графиков, сопротивление только растет с увеличением как чисел Гартмана, так и углового размера окон проводимости.

Список литературы

- [1] ВАТАЖИН А.Б., ЛЮБИМОВ Г.А., РЕГИРЕР С.А. Магнитодинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
- [2] IHARA S., TAJIMA K., MATSUSHIMA A. The flow of conducting fluids in circular pipes with finite conductivity under uniform traverse magnetic fields // Bull. Sci. and Engng. Res. Lab. Waseda Univ. 1963. Vol. 22. P. 1–9.
- [3] IHARA S., TAJIMA K., MATSUSHIMA A. The flow of conducting fluids in circular pipes with finite conductivity under uniform traverse magnetic fields // Trans. ASME. 1967. Vol. 89, N 1. P. 29–36.
- [4] SHERCLIFF J.A. Steady motion of conducting fluids in pipes under traverse magnetic fields // Proc. Cambrige. Philos. Soc. 1953. Vol. 49, N 1. P. 136–144.
- [5] SHERCLIFF J.A. Steady motion of conducting fluids in circular pipes under traverse magnetic fields // J. Fluid Mech. 1956. Vol. 1, pt 6. P. 644–666.

- [6] Куликовский А.Г. О модельных стационарных течениях проводящей жидкости при больших числах Гартмана // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 2. С. 3–10.
- [7] БУБЕНЧИКОВ А.М., ЛИВАЕВ Р.З. Некоторые автомодельные задачи магнитной гидродинамики // Вест. ТГУ. Бюл. оперативной науч. информации. 2001. № 4. С. 32–52.
- [8] БУБЕНЧИКОВ А.М., КОЛЕСНИКОВА А.В. Стабилизированное течение электропроводящей жидкости в круглой трубе // Вычисл. технологии. 2005. Т 10, № 5. С. 5–12.
- [9] HUNT J.C.R. Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts // Fluid Mech. 1965. Vol. 21, pt 4. P. 577–590.
- [10] GOLD R.R. Magnetohydrodynamic pipe flow. Pt. 1 // Fluid Mech. 1962. Vol. 13, pt 4. P. 505–512.
- [11] ПАТАНКАР С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
- [12] СИМУНИ Л.М. Численное решение задач теплообмена при неизотермическом движении вязкой жидкости в плоской трубе // Инж.-физ. журн. 1966. Т. 10, № 1. С. 89–91.
- [13] ТАНАНАЕВ А.В. Течения в каналах МГД-устройств. М.: Атомиздат, 1979. 428 с.

*Поступила в редакцию 24 марта 2005 г.,
в переработанном виде — 14 июля 2005 г.*