Вычислительные технологии **Том 11, Специальный выпуск, 2006**

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И НОРМА ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА

Л. И. Санеева, Е. Н. Булгатова
Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ, Россия
e-mail: `ili04@mail.ru, belena77@mail.ru`

Cubature formulas containing values of function and its derivatives are considered in this work. General form of the periodic functional which accounts for coefficients of the sum of derivatives is given. Coefficients of the best periodic error functional are calculated.

В настоящей работе рассматриваются квадратурные формулы общего вида в периодическом случае, в которые входят значения функции и ее производных до некоторого порядка. Пусть $\varphi(x)$ — заданная на всей числовой оси периода единицы функция, имеющая абсолютно непрерывную на всей оси производную $(m-1)$-го порядка и интегрируемую на $(0;1)$ по Лебегу производную $\varphi^m(x)$, $\dfrac{1}{N}=h$, $X=\{x_\gamma=h_\gamma,\ y=0,1,\dots,N\}$ — совокупность узлов, $P=\{C_{\gamma,k},\gamma=0,1,\dots,N,\ k=0,1,\dots,\rho_\gamma\}$ — совокупность коэффициентов квадратурных формул и $\Delta=[0;1)$. Введем пространство классов периодических функций $\widetilde{L}_p^m(\Delta)$ с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{\widetilde{L}_p^m(\Delta)}=\left[\int\limits_0^1|\varphi^{(m)}(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Элементами пространства $\widetilde{L}_p^m(\Delta)$ служат классы периодических функций, отличающихся друг от друга на постоянную.

Квадратурная формула общего вида выглядит так:

$$\int\limits_0^1\varphi(x)dx\approx\sum_{\gamma=0}^{N}\sum_{k=0}^{\rho_\gamma}C_{\gamma,k}\varphi^{(k)}(h\gamma). \tag{1}$$

Квадратурная формула (1) содержит в себе при $\rho_0,\dots,\rho_N$ как частный случай формулу [1]

$$\int\limits_0^1\varphi(x)dx\approx\sum_{\gamma=0}^{N}\sum_{k=0}^{\rho}C_{\gamma,k}\varphi^{(k)}(h\gamma).$$

Для построения периодического функционала рассмотрим простейшую формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \approx \sum_{\gamma=0}^{N}\sum_{k=0}^{\rho_\gamma} C_{\gamma,k}\varphi^{(k)}(\gamma) \tag{2}$$

с функционалом погрешности

$$\langle l,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\xi_{(0;1)}(x) - \sum_{\gamma=0}^{N}\sum_{k=0}^{\rho_\gamma}(-1)^k\delta^{(k)}(x-\gamma)\right]\varphi(x)dx.$$

Пусть m — гладкость пространства и функционал погрешности $l(x)$ ортогонален многочленам степени m, т. е.

$$\langle l, x^\alpha\rangle = 0,\ \ \alpha = 0,1,\ldots,m.$$

Коэффициенты $C_{\gamma,k}$ формулы (2) определяются из следующей линейной системы уравнений:

$$\sum_{\gamma=0}^{N}\sum_{k=0}^{\rho_\gamma} C_{\gamma,k}\frac{\alpha!}{k!}\gamma^{[\alpha-k]} = \frac{1}{\alpha+1}, \tag{3}$$

где

$$\gamma^{[\alpha-k]} = \begin{cases} \gamma^{[\alpha-k]}, & \text{если } \alpha \ge k, \\ 0, & \text{если } \alpha \le k, \end{cases} \qquad \text{и } \alpha = 0,1,\ldots,m = \rho_0+\rho_0+\ldots+\rho_s+s.$$

Будем считать, что числа $s,\rho_0,\rho_0,\ldots,\rho_s$ выбраны так, чтобы система (3) имела решение при условии $m = \rho_0+\rho_0+\ldots+\rho_s+s$.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \approx \sum_{\gamma=0}^{s}\sum_{k=0}^{s-\gamma} C_{\gamma,k}\varphi^{(k)}(\gamma).$$

Продолжим функционал погрешности

$$l(x) = \xi_{(0;1)}(x) - \sum_{\gamma=0}^{s}\sum_{k=0}^{s-\gamma}(-1)^k C_{\gamma,k}\delta^{(k)}(x-\gamma)$$

на всю числовую ось путем суммирования по β. Следовательно, периодический функционал погрешности общего вида записывается как

$$\widetilde{l}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{s} D_k(-1)^k\varphi_0^{(k)},$$

где $D_k = \sum\limits_{\gamma=0}^{s-\gamma} C_{\gamma,k}$.

Пусть $\varphi \in \widetilde{L}_p^m(\Delta)$ и $\widetilde{l} \in \widetilde{L}_p^{m^*}(\Delta)$. Из условия рефлексивности пространства $\widetilde{L}_p^m(\Delta)$ при $1 < p < \infty$ имеем

$$\langle\widetilde{l},\varphi_0\rangle = \|\widetilde{l}\|_{\widetilde{L}_p^{m^*}(\Delta)},\ \ \|\varphi_0\|_{\widetilde{L}_p^m(\Delta)} = 1. \tag{4}$$

Решая вариационную задачу (4) по методу Эйлера, находим

$$\langle \widetilde{l}, \varphi_0 \rangle = \|\widetilde{l}\|_{\widetilde{L}_p^{m*}(\Delta)} \int\limits_{\Delta} |\varphi_0^m(x)|^{p-1} \mathrm{sgn} \varphi_0^m(x) \varphi^m(x) dx \quad \forall \varphi \in \widetilde{L}_p^m(\Delta). \tag{5}$$

Положим $\psi_0^m(x) = \|\widetilde{l}\|^{\frac{1}{p-1}}_{\widetilde{L}_p^{m*}(\Delta)} \varphi_0^m(x)$. Тогда

$$\|\varphi_0\|_{\widetilde{L}_p^m(\Delta)} = \|l\|^{\frac{1}{p-1}}_{\widetilde{L}_p^{m*}(\Delta)}.$$

В этом случае уравнение (5) принимает вид

$$\int\limits_{\Delta} |\psi_0^m(x)|^{p-1} \mathrm{sgn} \psi_0^m(x) \varphi^m(x) dx = \langle \widetilde{l}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \widetilde{L}_p^m(\Delta).$$

По определению производной функции получаем

$$\frac{d^m}{dx^m} |\psi_0^m(x)|^{p-1} \mathrm{sgn} \psi_0^m(x) = (-1)^m l(x). \tag{6}$$

Находим решение уравнения (6) с помощью преобразования Фурье. В результате имеем

$$\psi_0^m(x) = \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{s} D_k (-2\pi i \beta)^k e^{-2\pi i \beta x}}{(-2\pi i \beta)^m} \right|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{sgn} \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{s} D_k (-2\pi i \beta)^k e^{-2\pi i \beta x}}{(-2\pi i \beta)^m}. \tag{7}$$

Правую часть равенства (5) разложим в ряд Фурье

$$\psi_0^{(m)}(x) = \sum_{\gamma \neq 0} c_\gamma e^{-2\pi i \gamma x},$$

где

$$c_\gamma = \int\limits_{\Delta} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{s} D_k (-2\pi i \beta)^k e^{-2\pi i \beta y}}{(-2\pi i \beta)^m} \right|^{\frac{1}{p-1}} \mathrm{sgn} \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{s} D_k (-2\pi i \beta)^k e^{-2\pi i \beta y}}{(-2\pi i \beta)^m} e^{2\pi i \gamma y} dy. \tag{8}$$

Решение уравнения (7) определяется равенством

$$\psi_0(x) = \sum_{\gamma \neq 0} \frac{c_\gamma e^{-2\pi i \gamma x}}{(-2\pi i \gamma)^m}, \tag{9}$$

где c_γ выражается формулой (8).

Вернемся к решению вариационной задачи. В силу $\langle \widetilde{l}, 1 \rangle = 0$ находим

$$\int\limits_{\Delta} \left((-1)^{m+1} \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{s} D_k (-2\pi i \beta)^k e^{-2\pi i \beta x}}{(-2\pi i \beta)^m} + c \right) \varphi^m(x) dx = \langle \widetilde{l}, \varphi \rangle. \tag{10}$$

Равенство (10) определяет общее представление периодического функционала в общем виде.

Применим неравенство Гёльдера

$$\langle \widetilde{l}, \varphi \rangle \leq \left[\int_{\Delta} \left| \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum_{k=0}^{s} D_k (-2\pi i \beta)^k e^{-2\pi i \beta x}}{(-2\pi i \beta)^m} + c_0 \right|^{p'} dx \right]^{1/p'} \|\varphi\|_{\widetilde{L}_p^m(\Delta)}.$$

Введем обозначение

$$B_m^s(x) = \sum_{\beta \neq 0} \frac{\sum_{k=0}^{s} D_k (-2\pi i \beta)^k e^{-2\pi i \beta x}}{(-2\pi i \beta)^m}.$$

Минимизируем следующее выражение по c:

$$J(c) = \int_{\Delta} |B_m^s(x) + c|^{p'} dx.$$

Из решения вариационной задачи $J(c) \geq J(c_0)$ вытекает, что параметр c_0 определяется из уравнения

$$\int_{\Delta} |B_m^s(x) + c_0|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn}[B_m^s(x) + c_0] dx = 0.$$

Система (9) имеет единственное решение [2].

Теорема. *Если $1 < p < \infty$ $\forall \varphi \in \widetilde{L}_p^m(\Delta)$, $\widetilde{l} \in \widetilde{L}_p^{m^*}(\Delta)$ и $\psi_0(x)$ — экстремальная задача для периодического функционала $\widetilde{l}_0(x)$, то общее представление оптимального периодического функционала $\widetilde{l}_0(x)$ имеет вид*

$$\langle \widetilde{l}, \varphi \rangle = \int_0^1 [B_m^s(x) + c_0] \varphi^m dx \quad \forall \varphi \in \widetilde{L}_p^m(\Delta),$$

экстремальная функция $\psi_0(x)$ для периодического функционала $\widetilde{l}_0(x)$ в явном виде выражается формулой

$$\psi_0(x) = \int_0^1 \left(|B_m^s(x) + c_0|^{\frac{1}{p-1}} \operatorname{sgn}(B_m^s(x) + c_0) \frac{e^{-2\pi i \gamma x + 2\pi i \gamma y}}{(-2\pi i \gamma)^m} + c_0 \right) dx,$$

нормы периодического функционала $\widetilde{l}_0(x)$ и экстремальной функции $\psi_0(x)$ соответственно определяются равенствами

$$\|\widetilde{l}_0\|_{\widetilde{L}_p^m(\Delta)} = \left[|B_m^s(x) + c|^{p'} dx \right]^{1/p'};$$

$$\|\psi_0(x)\|_{\widetilde{L}_p^m(\Delta)} = \left[|B_m^s(x) + c|^{p'} dx \right]_0^{1/p}.$$

Список литературы

[1] Васильева Е.Г. Квадратурные формулы с симметричным пограничным слоем // Физ.-мат. науки: Сб. науч. тр. Улан-Удэ, 1999. С. 70–74.

[2] Шойнжуров Ц.Б., Цыренжапов Н.Б. Норма общего вида периодического функционала в пространстве С.Л. Соболева $\widetilde{L}_p^m(\Delta)$, $1 < p < \infty$ // Математика в восточных регионах Сибири: Матер. междунар. конф. Улан-Удэ: Изд-во БГУ, 2000. С. 112–113.

Поступила в редакцию 15 сентября 2006 г.