ДОСТИЖЕНИЕ НАИЛУЧШЕГО ПОРЯДКА ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУНКЦИЙ ИЗ $W_2^{\overline{m}}(\mathbb{R}^2)$ НА РЕШЕТЧАТЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ЗА СЧЕТ ПОВОРОТА РЕШЕТКИ УЗЛОВ*

Д.Я. Рахматуллин
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН, Уфа, Россия
e-mail: `rdy@pochta.ru`

The article is devoted to proof of achievement of best degree approximation on lattice cubature formulas, given in $W_2^{\overline{m}}(\mathbb{R}^2)$. The best degree is achieved by means of the special turn of the lattice.

Введение

Известен наилучший возможный порядок приближения в пространстве $W_2^{\overline{m}}(\mathbb{R}^n)$, $\overline{m} = (m_1, \dots, m_n)$, интегралов по ограниченной области с помощью кубатурных формул вида

$$K_N f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{N} c_{k,N} f(x^{(k)}).$$

Норма функционала погрешности $l_N^{\Omega}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} f(x)\,dx - K_N f$, $\overline{\Omega} \Subset \mathbb{R}^n$, минимизированная по расположению узлов $\{x^{(k)}\}$ и коэффициентам $\{c_{k,N}\}$, имеет оценку

$$\min_{\{x^{(k)}\},\{c_{k,N}\}} \left\| l_N^{\Omega} \right\|_{(W_2^{\overline{m}}(\mathbb{R}^n))^*} = C\, N^{-\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{m_j}}}. \tag{1}$$

Этот наилучший порядок может достигаться на решетчатых формулах, если взять векторный шаг решетки, подчиненный заданной гладкости подынтегральной функции [1, с. 239]. В направлениях большей гладкости следует брать бо́льшие шаги решетки:

$$h \stackrel{\text{def}}{=} (h_1, \dots, h_n), \quad h_1^{m_1} = \ldots = h_n^{m_n}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00597-а) и Программы № 14 Президиума РАН.

Оказывается, в двумерном случае наилучший порядок аппроксимации достигается и на кубических решетках за счет поворота на угол θ, тангенс которого есть “золотое сечение”, $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, т. е. следует взять последовательность решеток узлов (при $h \to 0$)

$$\{hHk\},\ k \in \mathbb{Z}^2,\ \text{с матрицей } H \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Отметим, что эта решетка узлов не зависит от гладкостей m_1 и m_2. При вычислениях, однако, мы накладываем техническое условие $\min\{m_1, m_2\} \geqslant 3/2$ вместо естественного $\min\{m_1, m_2\} > 1$.

Доказательству существования класса функционалов погрешности с наилучшим порядком приближения интегралов функций из $W_2^{\overline{m}}(\mathbb{R}^2)$ в этом частном случае и посвящена настоящая работа.

1. Преобразование постановки задачи

Введем в рассмотрение пространства $W_2^{\mu}(\mathbb{R}^2)$ и $\widetilde{W}_2^{\mu}(Q)$ с

$$\mu(\xi) \overset{\text{def}}{=} \nu(H\xi),$$

где

$$\nu(\eta) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{1 + |\eta_1|^{2m_1} + |\eta_2|^{2m_2}},$$

и нормами

$$\|f\|_{W_2^{\mu}(\mathbb{R}^2)} \overset{\text{def}}{=} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\xi\ \left| \tilde{f}(\xi)\,\mu(\xi) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|f\|_{\widetilde{W}_2^{\mu}(Q)} \overset{\text{def}}{=} \left(\int\limits_{Q} d\xi\ \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k\,\mu(k)\,e^{2\pi i\langle \xi, k\rangle} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$Q \overset{\text{def}}{=} \left\{ x = (x_1,\, x_2) :\ x_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right),\ i = 1,2 \right\}, \quad \tilde{f}(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^2} dx\, f(x)\ e^{-2\pi i\langle x, \xi\rangle}$$

— преобразование Фурье функции $f(x)$, а f_k — ее коэффициенты Фурье. За $W_2^{\overline{m}}(\mathbb{R}^2)$ принимаем $W_2^{\nu}(\mathbb{R}^2)$. Далее удобно считать $m_2 \geqslant m_1 > 1$.

Пусть $\overline{\Omega}$ обладает кусочно-гладкой границей и лежит в круге $\{x : |x| < \sigma < 1\}$. Функционал погрешности кубатурной формулы с решеткой узлов $\{hHk\}, k \in \mathbb{Z}^2$, имеет вид

$$l_h^{\Omega,H}(f) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} dx\ f(x) - h^2 \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2,\\ hHk\in\Omega}} c_{k,h}\, f(hHk). \tag{2}$$

Заметим, что

$$\left\| l_h^{\Omega,H} \right\|_{(W_2^{\overline{m}}(\mathbb{R}^2))^*} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} d\eta\ \frac{\left| \tilde{l}_h^{\Omega,H}(\eta) \right|^2}{\nu^2(\eta)} \right)^{\frac{1}{2}} = |\eta = H\xi| =$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^2} d\xi \, \frac{\left| \tilde{l}_h^{H^{-1}\Omega, I}(\xi) \right|^2}{\mu^2(\xi)} \right)^{\frac{1}{2}} = \left\| l_h^{H^{-1}\Omega, I} \right\|_{(W_2^\mu(\mathbb{R}^2))^*}.$$

На функциях из $C_0^{m_2}(|x| \leqslant \sigma < 1)$ нормы пространств $W_2^\mu(\mathbb{R}^2)$ и $\widetilde{W}_2^\mu(Q)$ эквивалентны равномерно по всевозможным матрицам поворотов $HH^T = I$, т. е.

$$\exists C \ \ \forall f \in C_0^{m_2}(|x| \leqslant \sigma < 1) \quad \frac{1}{C} \|f\|_{\widetilde{W}_2^\mu(Q)} \leqslant \|f\|_{W_2^\mu(\mathbb{R}^2)} \leqslant C \|f\|_{\widetilde{W}_2^\mu(Q)}.$$

Тогда

$$C\|l\|_{\widetilde{W}_2^\mu(Q)} \geqslant \|l\|_{W_2^\mu(\mathbb{R}^2)} \geqslant \frac{1}{C} \|l\|_{\widetilde{W}_2^\mu(Q)},$$

а для любых коэффициентов $\{c_k\}$ и любой матрицы поворота H норма $\left\| l_h^{H^{-1}\Omega, I} \right\|_{(W_2^\mu(\mathbb{R}^2))^*}$ имеет двусторонюю оценку через $\left\| l_h^{H^{-1}\Omega, I} \right\|_{(\widetilde{W}_2^\mu(Q))^*}$.

Для оптимального по порядку функционала $l_h^{\omega, I}$ на пространстве $\widetilde{W}_2^\mu(Q)$ выполняется оценка [1]

$$\exists C: \qquad \frac{1}{C} \leqslant \frac{\left\| l_h^{\omega, I} \right\|_{(\widetilde{W}_2^\mu(Q))^*}}{\|l_h^\infty\|_{(\widetilde{W}_2^\mu(Q))^*}} \leqslant C. \tag{3}$$

Здесь

$$l_h^\infty(x) \stackrel{\text{def}}{=} \chi_Q(x) - h^2 \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^2, \\ hk \in Q}} \delta(x - hk).$$

Поэтому вычисление порядка достаточно провести для однородного функционала погрешности $l_h^\infty(x)$. Мы покажем, что при $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tg} \theta = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$$\exists c: \quad \|l_h^\infty\|_{(\widetilde{W}_2^\mu(Q))^*} \leqslant c \, h^{\frac{2}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}}. \tag{4}$$

Вместе с оценкой (1) это означает, что оптимальный порядок кубатурной формулы с функционалом погрешности (2) при $H = \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$ является наилучшим.

2. Оценка нормы однородного функционала

Рассмотрим

$$\|l_h^\infty\|^2_{(\widetilde{W}_2^\mu(Q))^*} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{\mu^2\left(\dfrac{k}{h}\right)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{\nu^2\left(H\dfrac{k}{h}\right)},$$

где

$$\nu(\eta) = \sqrt{1 + |\eta_1|^{2m_1} + |\eta_2|^{2m_2}}, \quad 1 < m_1 \leqslant m_2.$$

Взяв за новое h прежнее, поделенное на $\cos\theta$, будем оценивать порядок

$$\varphi(h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{1 + \left| \dfrac{k_1 + \alpha k_2}{h} \right|^{2m_1} + \left| \dfrac{-\alpha k_1 + k_2}{h} \right|^{2m_2}} \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Вначале “отрежем” окрестность бесконечности плоскости (k_1, k_2). Подберем такое $K(h)$, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\},\\ |k|\geqslant K(h)}} \frac{1}{\nu^2\left(H\dfrac{k}{h}\right)} = O\left(h^{\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}}\right) = O\left(N^{-\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}}\right).$$

Для этого достаточно, чтобы

$$\int\limits_{|k|\geqslant K(h)} dk\, \frac{1}{\nu^2\left(H\dfrac{k}{h}\right)} = O\left(h^{\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}}\right).$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\nu^2\left(H\dfrac{\xi}{h}\right)} \leqslant \frac{C}{1+\left|\dfrac{\xi}{h}\right|^{2m_1}}.$$

Используя это неравенство и переходя в полярные координаты, получаем

$$\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\},\\ |k|\geqslant K(h)}} \frac{1}{\nu^2\left(H\dfrac{k}{h}\right)} \asymp \int\limits_{|\rho|\geqslant K(h)} d\rho\, \frac{\rho}{1+\left(\dfrac{\rho}{h}\right)^{2m_1}} \asymp h^{2m_1}\int\limits_{|\rho|\geqslant K(h)} d\rho\, \rho^{-(2m_1-1)} = h^{2m_1}(K(h))^{-2m_1+2}.$$

Здесь и далее символ $\asymp$ означает существование двусторонней оценки.

Последнее выражение оценивается сверху через $h^{\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}}$ при $K(h)\geqslant C\, h^{-\frac{1-\frac{m_1}{m_2}}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\left(1-\frac{1}{m_1}\right)}}$. Отбросив для удобства константу, положим

$$K(h) = h^{-\frac{1-\frac{m_1}{m_2}}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\left(1-\frac{1}{m_1}\right)}}.$$

Далее будем рассматривать только те точки плоскости, для которых

$$k\in\mathbb{K} \overset{def}{=} \{k\in\mathbb{Z}^2 : 1\leqslant |k|\leqslant K(h)\}.$$

Выделим из суммы

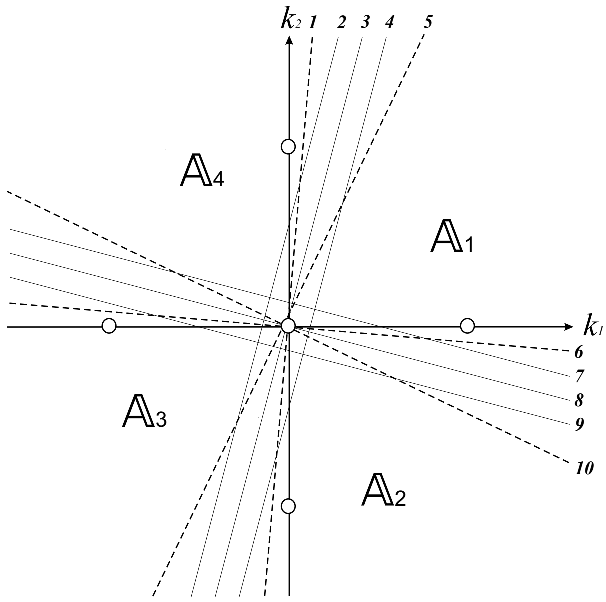
$$\psi(h) \equiv \sum_{k\in\mathbb{K}} \frac{1}{1+\left|\dfrac{k_1+\alpha k_2}{h}\right|^{2m_1}+\left|\dfrac{-\alpha k_1+k_2}{h}\right|^{2m_2}}$$

группу слагаемых, для которой требуемая оценка получается сравнительно просто.

Мы имеем в виду часть суммы, индексы слагаемых которых попадают в обозначенные на рисунке большие области $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4$, ограниченные штриховыми линиями.

Запишем уравнения прямых, обозначенных на рисунке цифрами:

1 — $k_2 = (\alpha+\delta)k_1$,	6 — $k_1 = -(\alpha+\delta)k_2$,
2 — $k_2 = \alpha k_1 + \dfrac{1}{2}$,	7 — $k_1 = -\alpha k_2 + \dfrac{1}{2}$,
3 — $k_2 = \alpha k_1$,	8 — $k_1 = -\alpha k_2$,
4 — $k_2 = \alpha k_1 - \dfrac{1}{2}$,	9 — $k_1 = -\alpha k_2 - \dfrac{1}{2}$,
5 — $k_2 = (\alpha-\delta)k_1$,	10 — $k_1 = -(\alpha-\delta)k_2$.



Разбиение плоскости

Все четыре области $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \mathbb{A}_4$ оцениваются одинаково. Для примера займемся оценкой суммы со множеством индексов:

$$\mathbb{A}_1 = \left\{ k : k_1 \in \mathbb{K}_1 \stackrel{def}{=} \{k_1 : 1 \leqslant k_1 \leqslant K(h)\} \cap \mathbb{Z},\ k_2 \in \left[-\frac{1}{\alpha+\delta} k_1, (\alpha-\delta)k_1 \right] \cap \mathbb{Z} \right\},$$

где δ — достаточно маленькое положительное число.

$$\sum_{k \in \mathbb{A}_1} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{k_1 + \alpha k_2}{h} \right)^{2m_1} + \left| \dfrac{-\alpha k_1 + k_2}{h} \right|^{2m_2}} \asymp$$

$$\asymp \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_1} \int\limits_{-\frac{1}{\alpha+\delta}k_1}^{(\alpha-\delta)k_1} dk_2 \frac{1}{1 + \left(\dfrac{k_1 + \alpha k_2}{h} \right)^{2m_1} + \left| \dfrac{-\alpha k_1 + k_2}{h} \right|^{2m_2}} =$$

$$= |-\tau = k_2 - \alpha k_1| = \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_1} \int\limits_{\delta k_1}^{(\alpha + \frac{1}{\alpha+\delta})k_1} d\tau \quad \frac{1}{1 + \left(\dfrac{(1+\alpha^2)k_1 - \alpha\tau}{h} \right)^{2m_1} + \left(\dfrac{\tau}{h} \right)^{2m_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left| \begin{array}{c} \alpha\tau \leqslant (\alpha^2 + 1 - \alpha\delta)k_1, \\ \alpha\tau - (1+\alpha^2)k_1 \leqslant -\alpha\delta k_1, \\ |(1+\alpha^2)k_1 - \alpha\tau| \geqslant \delta\alpha k_1 \end{array} \right| \leqslant \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_1} \int\limits_{\delta k_1}^{(\alpha + \frac{1}{\alpha+\delta})k_1} d\tau \quad \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\alpha\delta k_1}{h} \right)^{2m_1} + \left(\dfrac{\tau}{h} \right)^{2m_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left| \begin{array}{c} a^{2m_2} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \left(\dfrac{\alpha\delta k_1}{h} \right)^{2m_1}, \\ \tau = hta \end{array} \right| \leqslant \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_1} \int\limits_{\frac{\delta k_1}{ha}}^{\frac{1}{ha}(\alpha + \frac{1}{\alpha+\delta})k_1} dt \quad \frac{ha}{a^{2m_2}(1 + t^{2m_2})} =$$

$$= \left| \text{Пусть } \frac{\delta k_1}{ha} \geq 1 \right| \asymp \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_1} h a^{1-2m_2} \left(\frac{\delta k_1}{ha} \right)^{-2m_2+1} = \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_1} h^{2m_2} \left(\delta k_1 \right)^{-2m_2+1} =$$

$$= \left| A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_1} (\delta k_1)^{-2m_2+1}, \ 2m_2 \geqslant \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right| \leqslant A \ h^{\frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}}.$$

Остается оценить сумму по слагаемым с индексами в узких областях-углах. Рассмотрим множество индексов

$$\mathbb{B}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ k : k_1 \in \mathbb{K}_1, k_2 \in \left[(\alpha - \delta) k_1, \alpha k_1 - \frac{1}{2} \right] \cap \mathbb{Z} \right\}.$$

При этом $k_1 \geqslant \dfrac{1}{2\delta}$. Пусть $\mathbb{K}_4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}_1 \cap \{ k_1 : k_1 \geqslant \dfrac{1}{2\delta} \}$. Произведя замены и преобразования, аналогичные проделанным выше, получим

$$\sum_{k \in \mathbb{B}_1} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{k_1 + \alpha k_2}{h} \right)^{2m_1} + \left(\dfrac{-\alpha k_1 + k_2}{h} \right)^{2m_2}} \asymp \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_4} h \, a^{1-2m_2} \left(\frac{1}{2ha} \right)^{-2m_2+1} =$$

$$= c \, h^{2m_2} \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_4} 1 = c \, h^{2m_2} \left(K(h) - \frac{1}{2\delta} \right) \leqslant c \, h^{2m_2 - \frac{1 - \frac{m_1}{m_2}}{\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\left(1 - \frac{1}{m_1}\right)}} \equiv L(h).$$

Достаточным условием выполнения оценки $L(h) = O\,(h^{\frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}})$ является, например,

$$m_1 \geqslant \frac{3}{2}.$$

Остается полоска области индексов около прямых $k_2 = \alpha k_1$ и $k_1 = -\alpha k_2$. Рассмотрим первую из них: $\mathbb{C}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{ k : k_1 \in \mathbb{K}_1, \ k_2 \in [\alpha k_1 - \frac{1}{2}, \ \alpha k_1] \cap \mathbb{Z} \}$. Сразу заметим, что двойная сумма по этой области превратится в одинарную, так как каждому k_1 соответствует не более одного значения k_2. А именно, это такое k_2, для которого $0 \leqslant \alpha k_1 - k_2 \leqslant \dfrac{1}{2}$ или $\alpha_1 k_1 - k_2 = (\!(\alpha k_1)\!)$, где $(\!(\,\cdot\,)\!)$ — расстояние до ближайшей целой точки.

Величины $k_1 + \alpha k_2$ при $k_1 \in [1, K(h)]$ не стремятся к нулю при уменьшении h. При этом $(\alpha + 1) k_1 \leqslant k_1 + \alpha k_2 \leqslant (\alpha + 2) k_1 \Rightarrow k_1 + \alpha k_2 \asymp k_1$. Поэтому достаточно оценить сверху сумму

$$S(h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_1} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{k_1}{h} \right)^{2m_1} + \left(\dfrac{(\!(\alpha k_1)\!)}{h} \right)^{2m_2}}.$$

С другой стороны, величина αk_1 с изменением k_1 может сколь угодно близко подходить к нулю, поэтому оценку $S(h)$ придется провести максимально точно.

Нам понадобятся некоторые формулы для последовательностей чисел Фибоначчи

$$\{u_j\}_{j=1}^{\infty}, \ u_1 = u_2 = 1, \ u_{j+1} = u_j + u_{j-1}, \ j \geqslant 2.$$

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$. Любое число Фибоначчи можно выразить через корни этого уравнения $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$:

$$u_j = \frac{\alpha^j - \beta^j}{\sqrt{5}}, \quad j \geqslant 1.$$

Вторым важным свойством последовательности $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ является то, что ее можно использовать для взаимно-однозначной записи натуральных чисел по следующему правилу:

$$n = \sum_{j=2}^{J(n)} \varepsilon_j u_j, \quad u_{J(n)} \in \left(\frac{n}{2}, n\right]; \ \varepsilon_{J(n)} = 1; \ \varepsilon_j \in \{0,1\} \ \forall j \geqslant 2; \ \varepsilon_j \, \varepsilon_{j-1} = 0 \quad \forall j \geqslant 2.$$

Оценим (αk_1), $k \in \mathbb{C}_1$. Имеем

$$(\alpha k_1) = \alpha k_1 - k_2 = \alpha \sum_{j=j_1}^{J} \varepsilon_j u_j - k_2 = \sum_{j=j_1}^{J} \varepsilon_j \, \alpha u_j - k_2 = \sum_{j=j_1}^{J} \varepsilon_j \frac{\alpha^{j+1} - \alpha\beta^j}{\sqrt{5}} - k_2 =$$

$$= \sum_{j=j_1}^{J} \varepsilon_j \frac{\beta^{j-1}(\beta^2+1)}{\sqrt{5}} + \alpha \sum_{j=2}^{J} \varepsilon_j u_{j+1} - k_2 = \sum_{j=j_1}^{J} \varepsilon_j \frac{\beta^{j-1}(\beta^2+1)}{\sqrt{5}} + Z = \left(\sum_{j=j_1}^{J} \varepsilon_j \frac{\beta^{j-1}(\beta^2+1)}{\sqrt{5}} \right) =$$

$$= \left(\sum_{j=j_1}^{J} \varepsilon_j \, \beta^{j-1} \frac{(\beta+2)}{1-2\beta} \right) = \left(- \sum_{j=j_1}^{J} \varepsilon_j \, \beta^j \right) = \left(\sum_{j=j_1}^{J} \varepsilon_j \, \beta^j \right),$$

где j_1 — наименьший индекс, такой что $\varepsilon_{j_1} = 1$. Порядок последнего выражения цепочки равенств при $k_1 \to \infty$ равен порядку выражения внутри скобок $(\,\cdot\,)$, которое, в свою очередь, имеет порядок $|\beta|^{j_1}$ — наибольшего слагаемого. Следовательно, $(\alpha k_1) \asymp |\beta|^{j_1}$. Получим

$$S(h) \asymp \sum_{k_1 \in \mathbb{K}_1} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{k_1}{h}\right)^{2m_1} + \left(\dfrac{|\beta|^{j_1}}{h}\right)^{2m_2}} = \left| k_1 = \sum_{j=j_1(k_1)}^{J(k_1)} \varepsilon_j \, u_j \right| =$$

$$= \sum_{J=2}^{J(K(h))} \sum_{j_1=2}^{J} \sum_{\substack{\{\varepsilon_j\} \\ j \in [j_1, J]}} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{\sum\limits_{j=j_1}^{J} \varepsilon_j \, u_j}{h} \right)^{2m_1} + \left(\dfrac{|\beta|^{j_1}}{h}\right)^{2m_2}} \asymp$$

$$\asymp \sum_{J \geqslant 2} \sum_{j_1 \in [2,J]} \frac{\alpha^{J-j_1}}{\left(\dfrac{\alpha^J}{h}\right)^{2m_1} + \left(\dfrac{|\beta|^{j_1}}{h}\right)^{2m_2}} = h^{2m_2} \sum_{J \geqslant 2} \sum_{j_1 \in [2,J]} \frac{\alpha^{J + j_1(2m_2-1)}}{\alpha^{2(Jm_1 + j_1 m_2)} h^{2(m_2-m_1)} + 1} \asymp$$

$$\asymp C \, h^{2m_1 + 1 - \frac{m_1}{m_2} + (2m_1 - 1 + \frac{m_1}{m_2}) \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}}.$$

Несложно проверить, что последнее выражение оценивается сверху через $Ch^{\frac{4m_1 m_2}{m_1+m_2}}$.

Таким образом, при $m_2 \geqslant m_1 \geqslant \dfrac{3}{2}$ для решетки узлов $\{hHk\}$, $k \in \mathbb{Z}^2$, $hHk \in \Omega$, получаем искомую оценку сверху

$$\varphi(h) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{1}{1 + \left| \dfrac{k_1 + \alpha k_2}{h} \right|^{2m_1} + \left| \dfrac{-\alpha k_1 + k_2}{h} \right|^{2m_2}} \leqslant C \, h^{\frac{4m_1 m_2}{m_1+m_2}} = C \, N^{-\frac{2m_1 m_2}{m_1+m_2}}.$$

Список литературы

[1] Соболев С.Л., Васкевич В.Л. Кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996. 484 с.

Поступила в редакцию 15 сентября 2006 г.