

# МОДЕЛЬ МАГНИТНОЙ СТРУНЫ ДЛЯ РАСЧЕТА КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ МАГНИТНЫХ ТРУБОК\*

Н. В. ЕРКАЕВ, В. А. ШАЙДУРОВ

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,*

*Красноярск, Россия*

e-mail: erkaev@icm.krasn.ru

Magnetic string model is applied for calculation of the magnetohydrodynamic waves propagating along thin magnetic tubes. This study focuses on the influence of convergence of the magnetic field lines on propagation of pulses of Alfvén waves. The wave pulse is shown to be reflected from the narrowest section of the magnetic tube, and thus it does not reach the boundary of the magnetic tube. In such case energy losses at the dissipative boundary of the magnetic tube are very small for any electric conductivity of the boundary surface, and the pulse can reflect many times without considerable damping.

## Введение

Для моделирования космической среды широко используются уравнения магнитогиродинамики идеально проводящего газа, в котором возможны волновые возмущения трех видов: альфвеновские волны, а также медленные и быстрые магнитозвуковые волны [1–4].

Альфвеновские волны играют важную роль в космической плазме, осуществляя перенос возмущений электрического поля вдоль магнитных силовых линий в различные точки пространства. Поэтому изучение условий генерации и распространения альфвеновских волн является актуальной проблемой, имеющей большое прикладное значение. В частности, регистрируемые на уровне ионосферы Земли геомагнитные пульсации — это хорошие индикаторы состояния магнитосферы Земли, они широко используются для ее диагностики [5]. При моделировании альфвеновских волн необходимо учитывать кривизну и неоднородность магнитосферных магнитных трубок, сужающихся по мере приближения к ионосфере планеты. В связи с этим возникает вопрос о влиянии фактора сужения магнитных трубок на характер распространения альфвеновских волновых возмущений, отражающихся от ионосферы.

Для упрощения задачи расчета волновых возмущений в магнитосфере Земли в ряде работ [6–9] использовалось приближение больших азимутальных волновых чисел, применимое при малых азимутальных масштабах волновых возмущений по сравнению с меридиональными. В названных работах рассматривались задачи о собственных линейных

---

\*Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-05-64088 и № 03-05-20014), Программами 30 и ОФН-15 РАН.

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

магнитогидродинамических (МГД) колебаниях идеально проводящего газа в осесимметричном магнитном поле.

В рамках приближения больших азимутальных волновых чисел быстрая магнитозвуковая волна исчезает и остаются только связанные между собой альфвеновская и медленная магнитозвуковая волны. В этом случае возмущение полного давления (суммы магнитного и газового давлений) равно нулю. Это условие используется также и в настоящей работе, целями которой являются формулировка математической модели тонкой магнитной трубки (магнитной струны) и применение ее для описания альфвеновских волновых импульсов, распространяющихся вдоль искривленных магнитных силовых трубок переменного сечения. Центральное место в работе занимают вопросы влияния кривизны и сужения магнитной трубки на распространение волновых импульсов.

## 1. Бездиссипативные МГД-уравнения

В бездиссипативном приближении магнитное поле и параметры газа определяются системой идеальных МГД-уравнений [10]:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla \Pi - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = 0; \quad (1)$$

$$\Pi = P + B^2/(8\pi), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right) + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Здесь  $\rho$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $P$ ,  $\mathbf{B}$  — массовая плотность, скорость, давление плазмы и магнитное поле соответственно; величина  $\Pi$  означает полное давление (сумму магнитного и газового давлений);  $\gamma$  — показатель адиабаты.

Вводим безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} &= \mathbf{R}/R_0, & \bar{t} &= tV_{A_0}/R_0, & \bar{P} &= P/(\rho_0 V_{A_0}^2), \\ \bar{\rho} &= \rho/\rho_0, & \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}/B_0, & \bar{\mathbf{V}} &= \mathbf{V}/V_{A_0}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $R_0$  — характерный пространственный масштаб, индекс 0 соответствует фоновым параметрам в заданной точке;  $V_{A_0}$  — скорость Альфвена;  $\rho_0$  — плотность;  $B_0$  — магнитное поле.

Далее черту над безразмерными функциями для простоты будем опускать, где это не вызывает недоразумений. После перехода к безразмерным переменным первые два уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla \Pi - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= 0, \\ \Pi &= P + B^2/2. \end{aligned}$$

Остальные уравнения остаются без изменений. Переходим к описанию замороженных лагранжевых координат, применение которых придает уравнениям удобную для расчетов форму.

## 2. Вмороженные лагранжевы координаты

Лагранжевы переменные  $\alpha, \varphi, \psi$  представляют собой функции, сохраняющие постоянные значения вдоль траекторий движения материальных точек сплошной среды. Эти условия сохранения эквивалентны следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\alpha = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\varphi = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla\psi = 0. \quad (7)$$

Уравнение для магнитного поля (3) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{V}. \quad (8)$$

Используя переменные  $(\alpha, \varphi, \psi)$  в качестве независимых координат вместо  $(x, y, z)$ , получаем соотношения между дифференциальными операторами

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\alpha}{dt} \frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial}{\partial\psi} = \frac{\partial}{\partial t}. \quad (9)$$

Здесь  $\partial/\partial t, \partial/\partial\alpha, \partial/\partial\varphi, \partial/\partial\psi$  — частные производные при постоянных  $(\alpha, \varphi, \psi), (t, \varphi, \psi), (t, \alpha, \psi)$  и  $(t, \alpha, \varphi)$  соответственно.

Из кинематического равенства  $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{V}$  и уравнений (5)–(7), (9) следует простое соотношение между скоростью и радиусом-вектором:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{V}. \quad (10)$$

В лагранжевых координатах с использованием равенства (9) уравнение индукции (8) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla\alpha \right) \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\alpha} + \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla\varphi \right) \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\varphi} + \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla\psi \right) \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\psi}. \quad (11)$$

Векторное уравнение (11) можно рассматривать как систему трех скалярных линейных дифференциальных уравнений относительно трех компонент вектора  $\mathbf{B}/\rho$ . Общее решение системы (11) представляет собой линейную комбинацию трех вектор-функций —  $\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_\varphi$  и  $\mathbf{H}_\psi$ :

$$\mathbf{B}/\rho = C_\alpha(\alpha, \varphi, \psi)\mathbf{H}_\alpha(t, \alpha, \varphi, \psi) + C_\varphi(\alpha, \varphi, \psi)\mathbf{H}_\varphi(t, \alpha, \varphi, \psi) + C_\psi(\alpha, \varphi, \psi)\mathbf{H}_\psi(t, \alpha, \varphi, \psi). \quad (12)$$

Здесь скалярные коэффициенты  $C_\alpha, C_\varphi, C_\psi$  не зависят от времени. Три вектор-функции  $\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_\varphi, \mathbf{H}_\psi$  должны удовлетворять линейным алгебраическим уравнениям:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\alpha \cdot \nabla\alpha &= 1, & \mathbf{H}_\alpha \cdot \nabla\varphi &= 0, & \mathbf{H}_\alpha \cdot \nabla\psi &= 0, \\ \mathbf{H}_\varphi \cdot \nabla\alpha &= 0, & \mathbf{H}_\varphi \cdot \nabla\varphi &= 1, & \mathbf{H}_\varphi \cdot \nabla\psi &= 0, \\ \mathbf{H}_\psi \cdot \nabla\alpha &= 0, & \mathbf{H}_\psi \cdot \nabla\varphi &= 0, & \mathbf{H}_\psi \cdot \nabla\psi &= 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Важно отметить, что неоднозначность введения лагранжевых координат связана со свободой выбора скалярных коэффициентов  $C_\alpha$ ,  $C_\varphi$ ,  $C_\psi$ . В настоящей работе используются следующие значения:

$$C_\alpha = 1, \quad C_\varphi = 0, \quad C_\psi = 0.$$

Выражение для функции  $\mathbf{H}_\alpha$ , полученное из линейной алгебраической системы (13), имеет вид

$$\mathbf{H}_\alpha = \frac{1}{J} \nabla\varphi \times \nabla\psi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \quad (14)$$

где  $J$  — якобиан преобразования:

$$J = \frac{D(\alpha, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)}.$$

Из уравнений (12) и (14) следует выражение для вектора магнитного поля:

$$\mathbf{B} = \frac{\rho}{J} \nabla\varphi \times \nabla\psi = \rho \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}. \quad (15)$$

Якобиан  $J$  определяется из уравнения сохранения массы

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \alpha} \cdot \nabla \alpha + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \varphi} \cdot \nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \psi} \cdot \nabla \psi \right) = 0. \quad (16)$$

После подстановки выражения (10) в равенство (16) получаем уравнение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right) \cdot \nabla \alpha + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right) \cdot \nabla \varphi + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} \right) \cdot \nabla \psi = 0. \quad (17)$$

Из известных свойств якобианов следуют равенства

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} = \frac{1}{J} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{J} \nabla\psi \cdot \nabla\alpha, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = \frac{1}{J} \nabla\alpha \cdot \nabla\varphi. \quad (18)$$

После подстановки (18) уравнение непрерывности (17) упрощается и приводится к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\rho}{J} \frac{\partial J}{\partial t} = 0. \quad (19)$$

В результате интегрирования уравнения (19) получаем выражение для якобиана:

$$J = G(\alpha, \varphi, \psi) \rho.$$

Здесь  $G$  — произвольная функция от  $\alpha, \varphi, \psi$ . Наиболее простое выражение для якобиана отвечает значению  $G = 1$ :

$$J = \nabla\alpha(\nabla\varphi \cdot \nabla\psi) = \frac{D(\alpha, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)} = \rho.$$

Из уравнения (15) следуют равенства

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\alpha = \rho, \quad \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \nabla\psi = 0.$$

Физический смысл введенных лагранжевых координат вполне ясен: переменные  $\varphi$  и  $\psi$  представляют собой потенциалы Эйлера для магнитного поля, которые широко применяются для задания векторных полей с нулевой дивергенцией. Приращение переменной  $\alpha$  на отрезке магнитной трубки равно отношению приращения массы газа к магнитному потоку в магнитной трубке. В пространстве этих координат магнитные силовые линии изображаются прямыми  $\varphi = \text{const}$  и  $\psi = \text{const}$ . Введенная система  $\alpha, \varphi, \psi$  относится к типу замороженных [11] систем координат, в которых координатные линии связаны с материальными точками среды и перемещаются вместе с ними.

Записывая МГД-уравнения в лагранжевых замороженных координатах  $\alpha, \varphi, \psi$ , получаем систему следующего вида:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \rho \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \Pi(\mathbf{r}) = 0; \quad (20)$$

$$P + \frac{1}{2} \rho^2 \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha} \right)^2 = \Pi(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0; \quad (21)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \rho \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha}, \quad \frac{D(x, y, z)}{D(\alpha, \varphi, \psi)} = \frac{1}{\rho}. \quad (22)$$

Если полное давление является функцией пространственных координат  $x, y, z$  и не зависит явно от времени, то из уравнений (20)–(22) следует равенство

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}), \quad (23)$$

где  $w$  — положительно определенная функция:

$$w = V^2/2 + B^2/(2\rho) + P/((\gamma - 1)\rho) + \Pi/\rho. \quad (24)$$

Первые три слагаемых в выражении (24) имеют смысл кинетической, магнитной и тепловой удельных энергий (отнесенных к единице массы) соответственно. При стремлении к нулю напряженности магнитного поля ( $B \rightarrow 0$ ) полное давление стремится к газовому ( $\Pi \rightarrow P$ ) и уравнение (23) сводится к равенству  $\partial w / \partial t = 0$ , из которого следует сохранение величины  $w$  вдоль линий тока (уравнение Бернулли в газодинамике). В магнитной газодинамике при ненулевом магнитном поле величина  $w$  не постоянна, но сохраняется интеграл от  $w$  вдоль магнитных силовых линий при нулевых граничных условиях для продольной скорости  $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) = 0$  на концах силовой линии.

Заметим, что уравнения (20), (21) сходны с уравнениями, описывающими нелинейные упругие струны. Это позволяет ввести полезную аналогию между магнитными силовыми линиями и упругими струнами.

Далее предполагаем, что магнитная трубка, в которой распространяется волновое возмущение, имеет малый поперечный размер. В этом случае применимо приближение [7, 8], позволяющее пренебречь малым возмущением полного давления. В связи с этим будем полагать полное давление известным и равным заданной функции координат ( $\Pi = \Pi(x, y, z)$ ), определяемой по невозмущенному магнитному полю и фоновому давлению газа.

### 3. Волновые возмущения тонких магнитных трубок

Рассмотрим задачу о нестационарных волновых движениях магнитных струн (магнитных силовых линий). Деформацию магнитной струны удобно описывать в терминах ортого-

нальных криволинейных координат  $\sigma, \lambda, \zeta$ , привязанных к силовой линии. Допустим, что переменная  $\sigma$  описывает продольное перемещение вдоль магнитного поля, а переменные  $\lambda, \zeta$  соответствуют перпендикулярным перемещениям по отношению к выделенной магнитной силовой линии. Квадрат расстояния между бесконечно близкими точками определяется квадратичной формой

$$ds^2 = g_1 d\lambda^2 + g_2 d\sigma^2 + g_3 d\zeta^2, \quad (25)$$

где метрические коэффициенты  $g_1$  и  $g_2$  выражаются через производные радиусы-векторы  $\mathbf{r}(\lambda, \sigma, \zeta)$  по этим переменным

$$g_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \right|^2, \quad g_2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma} \right|^2, \quad g_3 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta} \right|^2.$$

Квадраты скорости и магнитного поля определяются квадратичными формами, аналогичными (25):

$$V^2 = g_1 \lambda_t^2 + g_2 \sigma_t^2 + g_3 \zeta_t^2, \\ B^2 = \rho^2 (g_1 \lambda_\alpha^2 + g_2 \sigma_\alpha^2 + g_3 \zeta_\alpha^2).$$

Здесь индексами “ $t$ ” и “ $\alpha$ ” обозначены производные по “ $t$ ” и “ $\alpha$ ” соответственно. Рассматривая осесимметричное магнитное поле, полагаем, что метрические коэффициенты не зависят от азимутальной переменной  $\zeta$ .

Выполняя преобразования в уравнениях (20)–(22) к новым зависимым переменным  $\lambda, \sigma$  и  $\zeta$ , получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_t}{\partial t} - \frac{\partial \rho \lambda_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} (\sigma_t \lambda_t - \rho \sigma_\alpha \lambda_\alpha) + \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} (\lambda_t^2 - \rho \lambda_\alpha^2) - \\ - \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} (\sigma_t^2 - \rho \sigma_\alpha^2) - \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_3}{\partial \lambda} (\zeta_t^2 - \rho \zeta_\alpha^2) + \frac{1}{\rho g_1} \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} - \frac{\partial \rho \sigma_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{g_2} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} (\sigma_t \lambda_t - \rho \sigma_\alpha \lambda_\alpha) + \frac{1}{2g_2} \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} (\sigma_t^2 - \rho \sigma_\alpha^2) - \\ - \frac{1}{2g_2} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} (\lambda_t^2 - \rho \lambda_\alpha^2) - \frac{1}{2g_2} \frac{\partial g_3}{\partial \sigma} (\zeta_t^2 - \rho \zeta_\alpha^2) + \frac{1}{\rho g_2} \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} = 0, \\ \frac{\partial \zeta_t}{\partial t} - \frac{\partial \rho \zeta_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{g_3} \frac{\partial g_3}{\partial \lambda} (\zeta_t \lambda_t - \rho \zeta_\alpha \lambda_\alpha) + \frac{1}{g_3} \frac{\partial g_3}{\partial \sigma} (\zeta_t \sigma_t - \rho \zeta_\alpha \sigma_\alpha) + \frac{1}{\rho g_3} \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Эта система связанных между собой уравнений в частных производных описывает распространение поперечной и продольной МГД-волн вдоль искривленной магнитной трубки. Асимметрия уравнений для поперечных переменных  $\lambda$  и  $\zeta$  связана с предположением об осевой симметрии и равенством нулю производных метрических коэффициентов по азимутальной координате  $\zeta$ . Полученные уравнения дают возможность исследовать влияние кривизны и сужения магнитной трубки на характер распространения и взаимодействия продольной и поперечной волн.

Продольное уравнение движения можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{g_2} \sigma_t)}{\partial t} - \frac{\partial(\sqrt{g_2} \rho \sigma_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{1}{2\sqrt{g_2}} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} (\sigma_t \lambda_t - \rho \sigma_\alpha \lambda_\alpha) - \\ - \frac{1}{2\sqrt{g_2}} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} (\lambda_t^2 - \rho \lambda_\alpha^2) - \frac{1}{2\sqrt{g_2}} \frac{\partial g_3}{\partial \sigma} (\zeta_t^2 - \rho \zeta_\alpha^2) + \frac{1}{\rho \sqrt{g_2}} \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Для производной полного давления справедливо равенство

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \frac{1}{\sigma_\alpha} - \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} \lambda_\alpha + \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} \zeta_\alpha \right) \frac{1}{\sigma_\alpha}. \quad (29)$$

Из определения полного давления следует тождество

$$\frac{1}{\sqrt{g_2} \rho \sigma_\alpha} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} - \frac{\partial(\rho \sqrt{g_2} \sigma_\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial P}{\partial \alpha} \frac{1}{\sqrt{g_2} \rho \sigma_\alpha} + \frac{1}{\sqrt{g_2} \rho \sigma_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (g_1 \rho^2 \lambda_\alpha^2 + g_3 \rho^2 \zeta_\alpha^2). \quad (30)$$

Используя равенства (29) и (30), преобразуем уравнение (28) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\sqrt{g_2} \sigma_t)}{\partial t} + \frac{1}{\rho \sqrt{g_2} \sigma_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{1}{2\sqrt{g_2}} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} (\sigma_t \lambda_t) - \frac{1}{2\sqrt{g_2}} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} (\lambda_t^2 - \rho \lambda_\alpha^2) - \\ - \frac{1}{2\sqrt{g_2}} \frac{\partial g_3}{\partial \sigma} (\zeta_t^2 - \rho \zeta_\alpha^2) + \frac{1}{\sqrt{g_2} \rho \sigma_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (g_1 \rho^2 \lambda_\alpha^2 + g_3 \rho^2 \zeta_\alpha^2) - \\ - \frac{1}{\rho \sqrt{g_2} \sigma_\alpha} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \rho^2 \sigma_\alpha^2 \right) \lambda_\alpha + \frac{1}{\rho \sqrt{g_2} \sigma_\alpha} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} \zeta_\alpha \right) = 0. \end{aligned}$$

Давление газа связано с плотностью уравнением адиабаты:

$$P = A \rho^\gamma,$$

где коэффициент  $A$  предполагается постоянным. Зависимость плотности от координат  $(\lambda, \sigma, \zeta)$  и их производных по  $\alpha$  определена алгебраическим равенством

$$A \rho^\gamma + \frac{1}{2} g_1 \rho^2 \lambda_\alpha^2 + \frac{1}{2} g_2 \rho^2 \sigma_\alpha^2 + \frac{1}{2} g_3 \rho^2 \zeta_\alpha^2 = \Pi(\lambda, \sigma, \zeta). \quad (31)$$

Уравнение (31) выражает условие равновесия поперек магнитной трубки: сумма газового и магнитного давлений равна фоновому полному давлению в данной точке физического пространства. Это условие связано с предположением, что в силу тонкости трубок поперечное равновесие устанавливается быстрее, чем продольное.

Затем преобразуем уравнение (26), предполагая, что невозмущенное состояние является гидростатическим. Для невозмущенного состояния имеем условия

$$\lambda_t = 0, \quad \lambda_\alpha = 0, \quad \zeta_t = 0, \quad \zeta_\alpha = 0, \quad \sigma_t = 0, \quad \sigma_\alpha = B_*/(\sqrt{g_2} \rho_*), \quad (32)$$

где  $B_*$  и  $\rho_*$  — безразмерные функции пространственных координат, выражающие распределения невозмущенных значений напряженности магнитного поля и плотности газа. Подстановка значений (32) в уравнение (26) приводит к дифференциальному соотношению между функциями  $\Pi$  и  $B_*$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} + \frac{1}{2g_2} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} B_*^2 = 0. \quad (33)$$

Используя равенство (33), подставляем производную полного давления в уравнение (26):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_t}{\partial t} - \frac{\partial \rho \lambda_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} (\sigma_t \lambda_t - \rho \sigma_\alpha \lambda_\alpha) + \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} (\lambda_t^2 - \rho \lambda_\alpha^2) - \\ - \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \sigma_t^2 + \frac{1}{2g_1 g_2 \rho} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} (g_2 \rho^2 \sigma_\alpha^2 - B_*^2) - \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_3}{\partial \lambda} (\zeta_t^2 - \rho \zeta_\alpha^2) = 0. \end{aligned}$$

Выражая полное давление в правой части уравнения (31) через невозмущенные параметры ( $\Pi = A\rho_*^\gamma + B_*^2/2$ ), получаем равенство

$$g_2\rho^2\sigma_\alpha^2 - B_*^2 = 2A(\rho_*^\gamma - \rho^\gamma) - g_1\rho^2\lambda_\alpha^2 - g_3\rho^2\zeta_\alpha^2. \quad (34)$$

После замены (34) уравнения для продольной и поперечной компонент принимают вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\sqrt{g_2}\sigma_t)}{\partial t} + \frac{1}{\rho\sqrt{g_2}\sigma_\alpha} \frac{\partial P}{\partial \alpha} + \frac{1}{2\sqrt{g_2}} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} (\sigma_t\lambda_t) - \frac{1}{2\sqrt{g_2}} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} (\lambda_t^2 - \rho\lambda_\alpha^2) - \\ & - \frac{1}{2\sqrt{g_2}} \frac{\partial g_3}{\partial \sigma} (\zeta_t^2 - \rho\zeta_\alpha^2) + \frac{1}{\sqrt{g_2}\rho\sigma_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (g_1\rho^2\lambda_\alpha^2 + g_3\rho^2\zeta_\alpha^2) - \\ & - \frac{1}{\rho\sqrt{g_2}\sigma_\alpha} \frac{1}{2g_2} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} [2A(\rho_0^\gamma - \rho^\gamma) - g_1\rho^2\lambda_\alpha^2 - g_3\rho^2\zeta_\alpha^2] \lambda_\alpha + \frac{1}{\rho\sqrt{g_2}\sigma_\alpha} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} \zeta_\alpha \right) = 0; \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \lambda_t}{\partial t} - \frac{\partial \rho \lambda_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{g_1} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} (\sigma_t \lambda_t - \rho \sigma_\alpha \lambda_\alpha) + \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} (\lambda_t^2 - \rho \lambda_\alpha^2) - \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \sigma_t^2 + \\ & + \frac{1}{2g_1 g_2 \rho} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} [2A(\rho_0^\gamma - \rho^\gamma) - g_1 \rho^2 \lambda_\alpha^2 - g_3 \rho^2 \zeta_\alpha^2] - \frac{1}{2g_1} \frac{\partial g_3}{\partial \lambda} (\zeta_t^2 - \rho \zeta_\alpha^2) = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Введем малые возмущения переменных:

$$P = P_* + \tilde{P}, \quad \sigma = \sigma_* + \tilde{\sigma}, \quad \zeta = \zeta_* + \tilde{\zeta}.$$

Невозмущенные переменные отмечены звездочкой, а малые возмущения — волнистой чертой. Для волн малой амплитуды линеаризуем уравнения (27), (35), (36) относительно переменных  $\tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}, \tilde{\zeta}$ :

$$\frac{\partial(\sqrt{g_2}\tilde{\sigma}_t)}{\partial t} + \frac{1}{B_*} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \alpha} = 0; \quad (37)$$

$$\frac{\partial(g_1\tilde{\lambda}_t)}{\partial t} - \frac{\partial(g_1\tilde{\lambda}_\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{1}{g_2\rho_*} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \tilde{P} = 0; \quad (38)$$

$$\frac{\partial(g_3\tilde{\zeta}_t)}{\partial t} - \frac{\partial(g_3\tilde{\zeta}_\alpha)}{\partial \alpha} = 0; \quad (39)$$

$$\tilde{P} = K(Q_1\tilde{\lambda} + Q_2\tilde{\sigma} - \sqrt{g_2}B_*\tilde{\sigma}_\alpha), \quad (40)$$

где коэффициенты  $Q_1, Q_2, K$  зависят от невозмущенных переменных:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} - \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \frac{B_*^2}{2g_2}, \quad Q_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma} - \frac{\partial g_2}{\partial \sigma} \frac{B_*^2}{2g_2}; \\ K &= \frac{\gamma\beta_0}{\beta_0(\gamma - 2) + 4\Pi}, \quad \beta_0 = 8\pi P_0/B_0^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Легко заметить, что уравнение (38) для поперечной меридиональной деформации струны  $\tilde{\lambda}$  содержит члены, связанные с продольной деформацией. Эта связь определяется возмущением давления  $\tilde{P}$  (40), пропорциональным коэффициенту  $K$ , зависящему от фонового газового давления в магнитной трубке. В свою очередь, уравнение для продольной деформации струны имеет связь с поперечной деформацией посредством того же выражения  $\tilde{P}$ . При стремлении к нулю параметра  $\beta_0$  взаимодействие продольных и поперечных волн в трубке исчезает и волны становятся полностью независимыми.

#### 4. Альфвеновские волны в дипольном магнитном поле

Переходим к анализу распространения волн в поле магнитного диполя. Дипольная модель широко применяется для описания магнитных полей в магнитосферах планет. Для дипольного магнитного поля (рис. 1) характерны большая степень сужения магнитных трубок и значительный рост магнитного давления. В этом случае удобно использовать дипольную систему координат [12]  $\lambda, \sigma$ :

$$\lambda = \frac{r}{\sin^2 \theta}, \quad \sigma = \frac{r}{\sqrt{\cos \theta}}, \quad (42)$$

где  $(r, \theta)$  — сферические координаты. Постоянные значения  $\lambda$  соответствуют магнитным силовым линиям. Параметр  $\sigma$  характеризует семейство ортогональных линий. Используя свойства якобианов, выражаем частные производные сферического угла:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} = \frac{\mathcal{D}[\theta, \sigma] \mathcal{D}[\theta, r]}{\mathcal{D}[\lambda, \sigma] \mathcal{D}[\theta, r]} = \frac{\partial S \mathcal{D}[\theta, r]}{\partial r \mathcal{D}[\lambda, \sigma]} = \frac{1}{J} \frac{\partial \sigma}{\partial r}; \quad (43)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\mathcal{D}[\theta, \lambda] \mathcal{D}[\theta, r]}{\mathcal{D}[\sigma, \lambda] \mathcal{D}[\theta, r]} = \frac{\partial L \mathcal{D}[\theta, r]}{\partial r \mathcal{D}[\sigma, \lambda]} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \lambda}{\partial r}, \quad (44)$$

где  $J$  — якобиан преобразования:

$$J = \frac{\mathcal{D}[\lambda, \sigma]}{\mathcal{D}[\theta, r]} = -\frac{r(1 + 3 \cos^2 \theta)}{2 \sin^3 \theta \cos^{3/2} \theta}. \quad (45)$$

Аналогично определяем производные сферического радиуса:

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial r}{\partial \sigma} = \frac{1}{J} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}. \quad (46)$$

С помощью равенств (43)–(46) записываем выражение для квадратичной формы, определяющей связь дифференциала расстояния с дифференциалами дипольных координат:

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2 d\theta^2 + dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\zeta^2 = \\ &= \frac{\sin^6 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} d\lambda^2 + \frac{4 \cos^3 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta} d\sigma^2 + r^2 \sin^2 \theta d\zeta^2, \end{aligned} \quad (47)$$

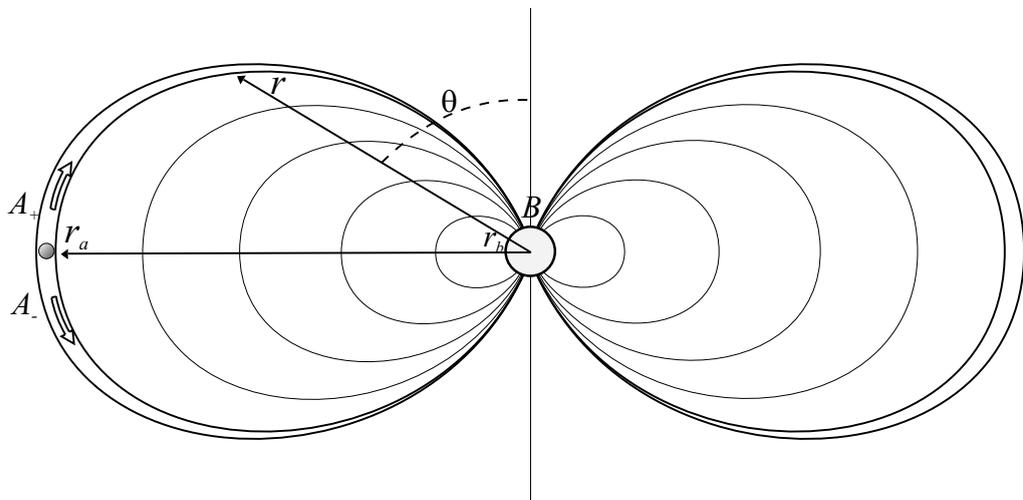


Рис. 1. Иллюстрация к постановке задачи: волновое возмущение дипольной магнитной трубки.

где  $\zeta$  — азимутальный угол. Коэффициенты квадратичной формы (47), называемые метрическими коэффициентами, представляют собой диагональные элементы метрического тензора:

$$g_1 = \frac{\sin^6 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}, \quad g_2 = \frac{4 \cos^3 \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}, \quad g_3 = r^2 \sin^2 \theta.$$

Недиагональные элементы равны нулю в силу ортогональности дипольной системы координат. Зависимость сферического радиуса от переменных  $\sigma$  и  $\lambda$  неявно задана алгебраическим уравнением четвертого порядка:

$$\frac{r(\lambda, \sigma)}{\lambda} + \frac{r(\lambda, \sigma)^4}{\sigma^4} = 1.$$

Исключая угол  $\theta$  с помощью равенств (42), получаем выражения метрических коэффициентов через функцию  $r(\lambda, \sigma)$ :

$$\begin{aligned} g_1(\lambda, \sigma) &= \frac{r(\lambda, \sigma)^3}{\lambda^3} \frac{1}{1 + 3r(\lambda, \sigma)^4/\sigma^4}, \\ g_2(\lambda, \sigma) &= 4 \frac{r(\lambda, \sigma)^6}{\sigma^6} \frac{1}{1 + 3r(\lambda, \sigma)^4/\sigma^4}, \\ g_3(\lambda, \sigma) &= r(\lambda, \sigma)^3/\lambda. \end{aligned}$$

Найденные метрические коэффициенты подставляются в общую систему уравнений, полученную выше.

Численное решение системы (37)–(40) получено с использованием конечно-разностной схемы Лакса — Вендроффа на прямоугольной сетке (см. Приложение). Расчет выполнялся для параметров (см. таблицу), отвечающих условиям распространения альфвеновской волны вдоль магнитной трубки в магнитосфере Сатурна [13]. Источником волн предполагается спутник Титан, движущийся в экваториальной плоскости на расстоянии  $r_a$  и создающий два симметричных волновых возмущения магнитного поля в магнитной трубке ( $A_+$  и  $A_-$  на рис. 1). Рассматриваем поведение только одного волнового импульса ( $A_+$ ), распространяющегося вдоль верхней части магнитной трубки в направлении к диссипативной границе  $B$ , располагающейся на расстоянии  $r_b$  от центра диполя. В данном случае диссипативной границей является ионосфера планеты.

В качестве нормировочных параметров в соотношениях (4) используем следующие величины:  $B_0$  — напряженность магнитного поля на экваториальной границе магнитной трубки;  $R_0 = r_a$  — расстояние до экваториальной границы (рис. 1);  $\rho_0$  — массовая плотность газа в трубке, предполагаемая постоянной.

Начальные возмущения магнитного поля и скорости приняты равными нулю. На экваториальной границе при  $r = r_a$  заданы зависимости возмущений скорости и магнитного поля от времени, которые инициируют волновой импульс, распространяющийся вдоль дипольной магнитной силовой линии.

Параметры магнитной трубки

$\rho_0,$ г·см <sup>-3</sup>	$r_a,$ км	$r_a/r_b$	$V_{a0},$ км/с	$B_0,$ нТл	$\beta_0$	$r_a/V_{a0},$ ч
$4.85 \cdot 10^{-24}$	$1.205 \cdot 10^6$	20	64	5	11	5.22

На диссипативной границе при  $r_b$  используем соотношение между возмущениями скорости и магнитного поля:

$$\tilde{v} = \mu \tilde{\mathbf{B}}, \quad \mu = \frac{c^2}{4\pi V_{A_s} \Sigma_s}. \quad (48)$$

Здесь  $V_{A_s}$  — скорость Альфвена вблизи границы;  $\Sigma_s$  — электропроводность граничной поверхности. На рис. 2 показано распространение альфвеновского волнового импульса вдоль дипольной магнитной трубки. На графиках представлены зависимости возмущения скорости от сферического радиуса для различных моментов времени. Величина возмущения

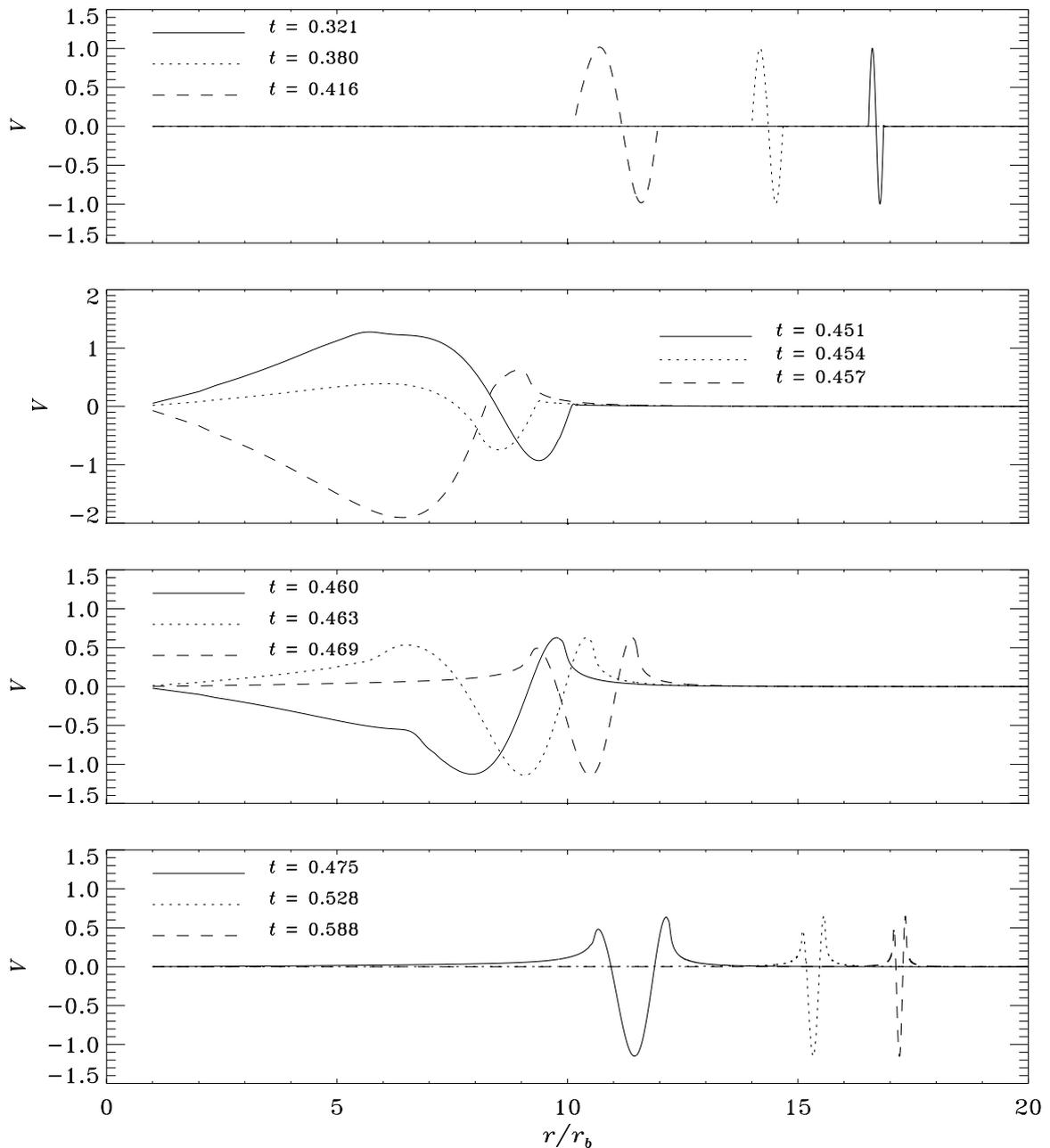


Рис. 2. Распределение возмущений скорости вдоль дипольной магнитной трубки в различные моменты времени.

отнесена к ее начальному амплитудному значению. Время указано в единицах  $r_a/V_{A0}$ . Степень сужения магнитной трубки очень велика при выбранном отношении максимального и минимального радиусов:  $r_a/r_b = 20$ .

Резкое уменьшение площади поперечного сечения магнитной трубки вызывает отражение волны, которая почти не достигает диссипативной границы. По мере перемещения волнового импульса в направлении усиления магнитного поля его продольный размер монотонно возрастает до тех пор, пока не становится порядка расстояния до границы при  $t \sim 0.451$ . При этом начинает формироваться отраженная волна. Непосредственно у границы при  $r = r_b$  возмущения магнитного поля и скорости малы. Поток электромагнитной

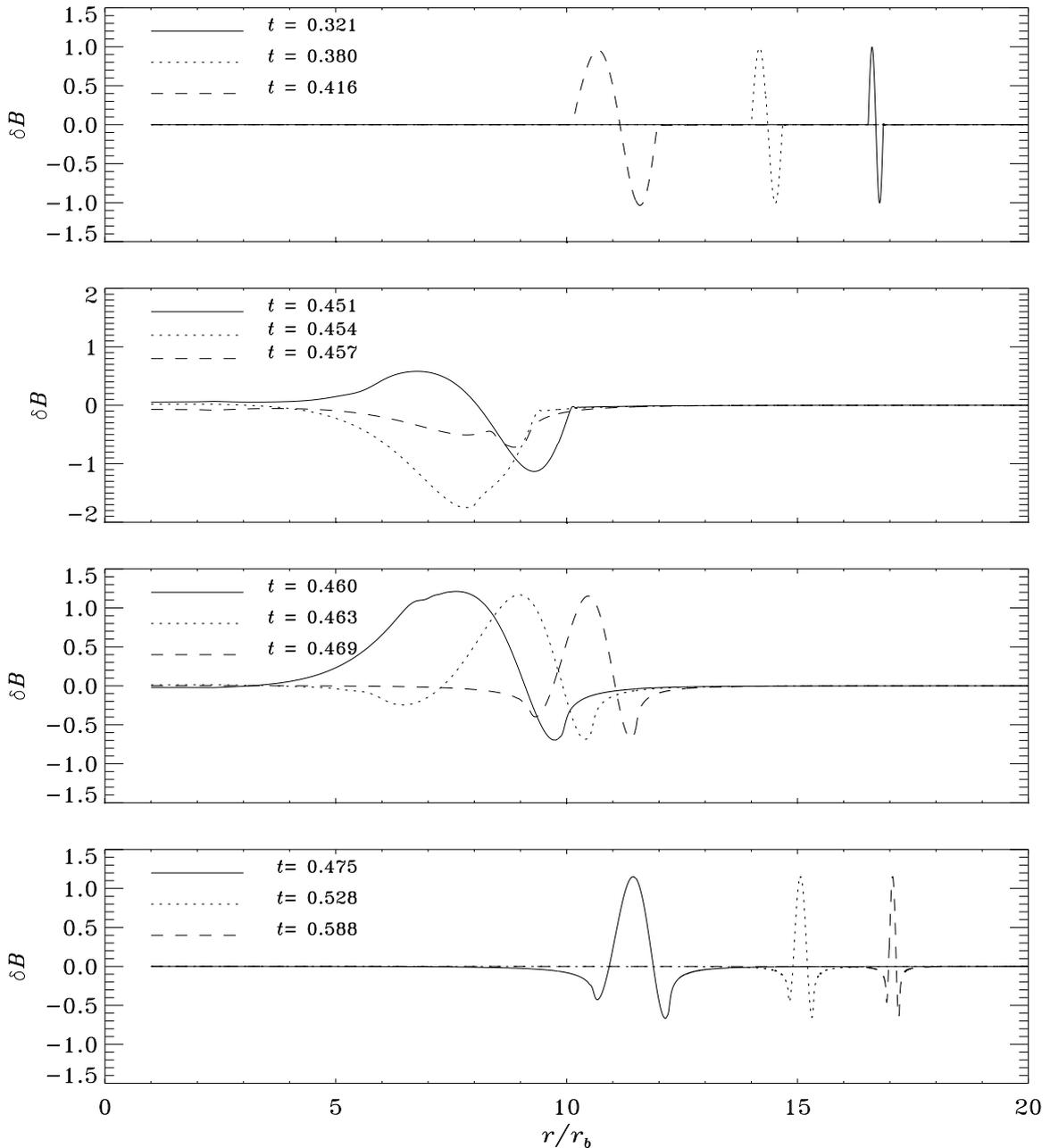


Рис. 3. Распределения возмущений магнитного поля вдоль магнитной трубки в различные моменты времени.

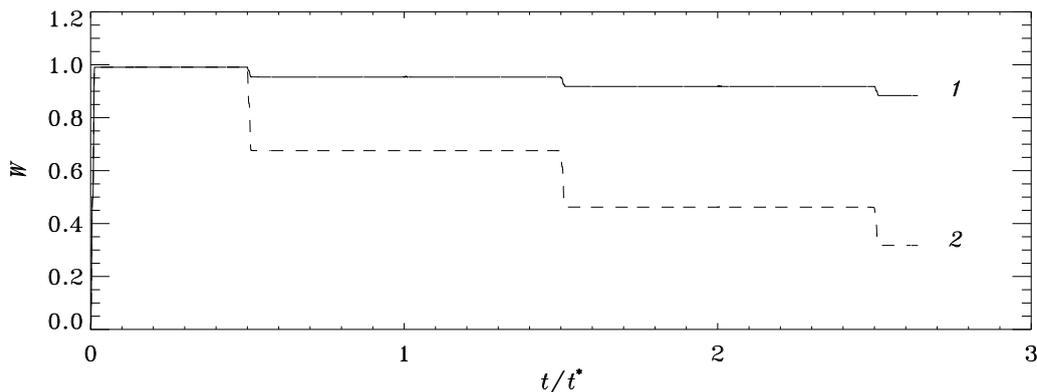


Рис. 4. Релаксация энергии альфвеновского импульса в дипольной магнитной трубке при  $\mu = 0.5$ : сплошная линия соответствует меридиональной поляризации, а штриховая — азимутальной.

энергии на границе также очень мал, что обеспечивает малые потери волновой энергии при отражении. При отражении форма импульса существенно изменяется. По мере удаления отраженного импульса от границы его продольный размер уменьшается с ослаблением магнитного поля.

На рис. 3 представлены зависимости возмущения магнитного поля от сферического радиуса для различных моментов времени, соответствующих различным стадиям перемещения волнового импульса. На графиках величина магнитного возмущения нормирована к своему начальному амплитудному значению.

Энергия волнового импульса определяется как интеграл вдоль магнитной силовой линии:

$$W = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (w - w_*) d\alpha,$$

где переменная  $w$  определена равенством (24);  $w_*$  — невозмущенное значение переменной;  $\alpha_1, \alpha_2$  — координаты граничных точек на ионосфере и экваторе соответственно.

На рис. 4 представлены зависимости от времени энергии альфвеновского импульса в дипольной магнитной трубке в случае меридиональной (1) и азимутальной (2) поляризации. Время нормировано к параметру  $t^*$ , равному удвоенной длительности прохождения альфвеновской волны вдоль магнитной трубки от экватора до диссипативной границы. Энергия волны сохраняется в течение времени продвижения импульса от экватора до зоны отражения и скачком уменьшается при каждом отражении волны от диссипативной границы. На графиках энергия волны нормирована к ее начальному значению. Диссипативные свойства границы у основания трубки (ионосферы) характеризуются параметром  $\mu$ , который используется в граничном условии (48). При проведении расчетов этот параметр полагался равным 0.5. Затухание энергии волны выражено сильнее для меньших длительностей импульса.

## 5. Результаты и выводы

Тонкие магнитные трубки, заполненные идеально проводящим газом, ведут себя как нелинейные упругие магнитные струны, динамика которых связана с изгибами и растяжениями. В случае прямолинейных магнитных струн продольные и поперечные деформации не

вливают друг на друга в линейном приближении. Однако для искривленных струн возникает связь между продольными и поперечными степенями свободы. Коэффициент связи пропорционален кривизне магнитной трубки, а также давлению газа в трубке.

На основе математической модели магнитной струны исследовано распространение альфвеновских импульсов вдоль сужающейся магнитной трубки в случае дипольного магнитного поля. Расчеты показывают, что продольный характерный размер альфвеновского волнового возмущения значительно увеличивается при распространении импульса в направлении роста магнитного поля. При сильном сужении магнитной трубки волновой импульс отражается прежде, чем успевает дойти до диссипативной границы. В этом случае потери энергии импульса в процессе отражения очень малы при любой электропроводности граничной поверхности и импульс может совершать многократные отражения без заметного затухания.

Таким образом, основной эффект схождения магнитных силовых линий проявляется в уменьшении диссипации энергии альфвеновской волны при отражениях от границы с конечной электропроводностью, расположенной в узкой части магнитной трубки. Для меридиональной поляризации волнового импульса этот эффект выражен гораздо сильнее, чем для азимутальной. Это объясняется тем, что в дипольном магнитном поле меридиональное схождение магнитных силовых линий значительно больше азимутального.

Возможными областями применения математической модели магнитной струны являются исследования магнитосферы планет, а также короны Солнца, где имеют место колебания тонких магнитных трубок.

## Приложение. Метод численного решения

От системы трех уравнений второго порядка (37)–(40) переходим к системе девяти уравнений первого порядка относительно искомых функций  $(\tilde{\sigma}_t, \tilde{\lambda}_t, \tilde{\zeta}_t, \tilde{\sigma}_\alpha, \tilde{\lambda}_\alpha, \tilde{\zeta}_\alpha, \tilde{\sigma}, \tilde{\lambda}, \tilde{\zeta})$ . При этом систему (37) дополняем следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_t}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\lambda}_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\lambda}_t}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\zeta}_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\zeta}_t}{\partial \alpha} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial t} = \tilde{\sigma}_t, \quad \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial t} = \tilde{\lambda}_t, \quad \frac{\partial \tilde{\zeta}}{\partial t} = \tilde{\zeta}_t. \end{aligned}$$

Применяем двухшаговую конечно-разностную схему Лакса — Вендроффа на прямоугольной сетке, показанной на рис. 5. В рассматриваемой численной схеме переход на следующий временной слой выполняется в два шага. На первом шаге вычисляются параметры на  $(n + 1/2)$ -м временном слое в промежуточных узлах сетки, обозначенных полуцелыми индексами:

$$\begin{aligned} (\tilde{\sigma}_t)_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\tilde{\sigma}_t)_{i+1/2}^n - \frac{\epsilon}{2\sqrt{(g_2)_{i+1/2}} B_{i+1/2}^*} (\tilde{P}_{i+1}^n - \tilde{P}_i^n) = 0, \\ (\tilde{\sigma}_\alpha)_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\tilde{\sigma}_\alpha)_{i+1/2}^n + \frac{\epsilon}{2} [(\tilde{\sigma}_t)_{i+1}^n - (\tilde{\sigma}_t)_i^n] = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda}_t)_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\tilde{\lambda}_t)_{i+1/2}^n + \frac{\epsilon}{2(g_1)_{i+1/2}} [(g_1 \tilde{\lambda}_\alpha)_{i+1}^n - (g_1 \tilde{\lambda}_\alpha)_i^n] - \frac{1}{2} \Delta t \left( \frac{1}{g_1 g_2 \rho_*} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \tilde{P} \right)_{i+1/2}^n, \\ (\tilde{\lambda}_\alpha)_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\tilde{\lambda}_\alpha)_{i+1/2}^n + \frac{\epsilon}{2} [(\tilde{\lambda}_t)_{i+1}^n - (\tilde{\lambda}_t)_i^n] = 0, \end{aligned}$$

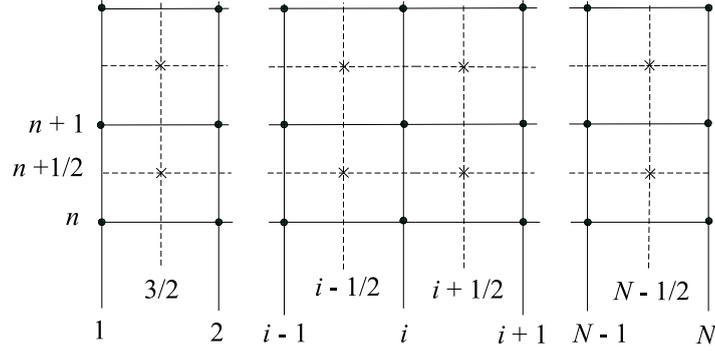


Рис. 5. Расчетная сетка.

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\zeta}_t)_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\tilde{\zeta}_t)_{i+1/2}^n + \frac{\epsilon}{2(g_3)_{i+1/2}} [(g_3 \tilde{\zeta}_\alpha)_{i+1}^n - (g_3 \tilde{\zeta}_\alpha)_i^n], \\
 (\tilde{\zeta}_\alpha)_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\tilde{\zeta}_\alpha)_{i+1/2}^n + \frac{\epsilon}{2} [(\tilde{\zeta}_t)_{i+1}^n - (\zeta_t)_i^n] = 0, \\
 (\tilde{\sigma})_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\tilde{\sigma})_{i+1/2}^n + \frac{1}{2} \Delta t (\tilde{\sigma}_t)_{i+1/2}^n, \\
 (\tilde{\lambda})_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\tilde{\lambda})_{i+1/2}^n + \frac{1}{2} \Delta t (\tilde{\lambda}_t)_{i+1/2}^n, \\
 (\tilde{\zeta})_{i+1/2}^{n+1/2} &= (\tilde{\zeta})_{i+1/2}^n + \frac{1}{2} \Delta t (\tilde{\zeta}_t)_{i+1/2}^n.
 \end{aligned}$$

Здесь  $\epsilon = \Delta t / \Delta \alpha$ , а переменная  $\tilde{P}$  определена формулой (40). Значения переменных в промежуточных узлах с полуцелыми номерами на  $n$ -м слое равны полусуммам их значений в соседних узлах с целыми номерами:  $f_{i+1/2} = (f_i + f_{i+1})/2$ .

Далее на втором шаге вычисляются значения переменных в основных узлах (с целыми номерами) на  $(n+1)$ -м временном слое:

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\sigma}_t)_i^{n+1} &= (\tilde{\sigma}_t)_i^n - \frac{\epsilon}{\sqrt{g_2}_i B^*_i} (\tilde{P}_{i+1/2}^{n+1/2} - \tilde{P}_{i-1/2}^{n+1/2}) = 0, \\
 (\tilde{\sigma}_\alpha)_i^{n+1} &= (\tilde{\sigma}_\alpha)_i^n + \epsilon [(\tilde{\sigma}_t)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\tilde{\sigma}_t)_{i-1/2}^{n+1/2}] = 0, \\
 (\tilde{\lambda}_t)_i^{n+1} &= (\tilde{\lambda}_t)_i^n + \frac{\epsilon}{(g_1)_i} [(g_1 \tilde{\lambda}_\alpha)_{i+1/2}^{n+1/2} - (g_1 \tilde{\lambda}_\alpha)_{i-1/2}^{n+1/2}] - \Delta t \left( \frac{1}{g_1 g_2 \rho_*} \frac{\partial g_2}{\partial \lambda} \tilde{P} \right)_i^{n+1/2}, \\
 (\tilde{\lambda}_\alpha)_i^{n+1} &= (\tilde{\lambda}_\alpha)_i^n + \epsilon [(\tilde{\lambda}_t)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\tilde{\lambda}_t)_{i-1/2}^{n+1/2}] = 0, \\
 (\tilde{\zeta}_t)_i^{n+1} &= (\tilde{\zeta}_t)_i^n + \frac{\epsilon}{(g_3)_i} [(g_3 \tilde{\zeta}_\alpha)_{i+1/2}^{n+1/2} - (g_3 \tilde{\zeta}_\alpha)_{i-1/2}^{n+1/2}], \\
 (\tilde{\zeta}_\alpha)_i^{n+1} &= (\tilde{\zeta}_\alpha)_i^n + \epsilon [(\tilde{\zeta}_t)_{i+1/2}^{n+1/2} - (\tilde{\zeta}_t)_{i-1/2}^{n+1/2}] = 0, \\
 (\tilde{\sigma})_i^{n+1} &= (\tilde{\sigma})_i^n + \Delta t (\tilde{\sigma}_t)_i^{n+1/2}, \\
 (\tilde{\lambda})_i^{n+1} &= (\tilde{\lambda})_i^n + \Delta t (\tilde{\lambda}_t)_i^{n+1/2}, \\
 (\tilde{\zeta})_i^{n+1} &= (\tilde{\zeta})_i^n + \Delta t (\tilde{\zeta}_t)_i^{n+1/2}.
 \end{aligned}$$

Здесь правые части уравнений вычисляются в центрированных по времени точках  $(i, n+1/2)$ , в которых переменные определяются как полусуммы их значений в соседних узлах  $(i, n)$  и  $(i, n+1)$ .

На границах используем соотношения вдоль характеристик:

$$\frac{\partial \Gamma_{k\pm}}{\partial t} \pm \eta_k \frac{\partial \Gamma_{k\pm}}{\partial \alpha} = F_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Здесь

$$\Gamma_{1\pm} = (\tilde{\sigma}_t \mp \eta_1 \tilde{\sigma}_\alpha), \quad \Gamma_{2\pm} = (\tilde{\lambda}_t \mp \eta_2 \tilde{\lambda}_\alpha), \quad \Gamma_{3\pm} = (\tilde{\zeta}_t \mp \eta_3 \tilde{\zeta}_\alpha); \quad (49)$$

$$\eta_1 = \sqrt{K}, \quad \eta_{2,3} = \sqrt{\rho_*}. \quad (50)$$

Правые части характеристических соотношений имеют вид

$$F_1 = \tilde{\sigma}_\alpha \left( K \frac{\partial \ln(K\sqrt{g_2}B_*)}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial K}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{B_*\sqrt{g_2}} \frac{\partial}{\partial \alpha} [K(Q_1\tilde{\lambda} + Q_2\tilde{\sigma})]; \quad (51)$$

$$F_2 = \tilde{\lambda}_\alpha \left( \frac{\partial \ln g_1}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_*}{\partial \alpha} \right) - \frac{\tilde{P}}{g_1\rho_*} \frac{\partial \ln g_2}{\partial \alpha}; \quad (52)$$

$$F_3 = \tilde{\zeta}_\alpha \left( \frac{\partial \ln g_3}{\partial \alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_*}{\partial \alpha} \right). \quad (53)$$

Коэффициенты  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $K$  в выражениях (50) и (51) определены формулами (41). На каждой границе используем соотношения вдоль соответствующих приходящих характеристик. Записывая характеристические уравнения в конечных разностях, определяем значения переменных на левой границе в точке  $(1, n+1)$ :

$$(\Gamma_{k-})_1^{n+1} = (\Gamma_{k-})_{k,1}^n + \eta_k \epsilon [(\Gamma_{k-})_2^n - (\Gamma_{k-})_1^n] + F_{k,1}^n \Delta t, \quad k = 1, 2, 3. \quad (54)$$

Используя выражения (49), (54) и условия на левой границе (48), определяем значения всех искомым переменных в граничной точке на временном слое  $(n+1)$ . Аналогично выполняем расчет правых граничных точек:

$$(\Gamma_{k+})_N^{n+1} = (\Gamma_{k+})_{N-1}^n - \eta_k \epsilon [(\Gamma_{k+})_N^n - (\Gamma_{k+})_{N-1}^n] + F_{k,N}^n \Delta t, \quad k = 1, 2, 3.$$

Размер шага по времени определяется из условия устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви  $\Delta t \sqrt{\rho_*} / \Delta \alpha < 1$ , определяемого по характеристикам максимального наклона.

## Список литературы

- [1] КАЛСРУД Р. Магнитогидродинамическое описание плазмы // Основы физики плазмы. В 2 т. / Под ред. А.А. Галеева, Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1983. Т. 1. С. 122–151.
- [2] СОНДЕРС М. Магнитосфера Земли // Космическая магнитная гидродинамика / Под ред. Э. Приста, А. Худа: Пер. с англ. М.: Мир, 1995. С. 366–409.
- [3] ПРИСТ Э. Введение в магнитную гидродинамику солнечной системы // Космическая магнитная гидродинамика / Там же. С. 9–31.
- [4] ПРИСТ Э. Солнечная магнитогидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1985.
- [5] ГУЛЬЕЛЬМИ А. В., ТРОИЦКАЯ В. А. Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы. М.: Наука, 1973.

- [6] KLIMUSHKIN D.Y. Theory of azimuthally small scale hydromagnetic waves in the axisymmetric magnetosphere with finite plasma pressure // Ann. Geophys. 1998. Vol. 16. P. 303–321.
- [7] SOUTHWOOD D.J., SAUNDERS M. A. Curvature coupling of slow and Alfvén MHD waves in a magnetotail field configuration // Planet. Space Sci. 1985. Vol. 33. P. 127–134.
- [8] WALKER A.D.M. Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number. Coupled magnetosonic and Alfvén waves // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92. P. 10039–10045.
- [9] LEONOVICH A.S., MAZUR V.A. Structure of magnetospheric eigenoscillations of an axisymmetric magnetosphere // J. Geophys. Res. 2000. Vol. 105. P. 27707–27715.
- [10] КУЛИКОВСКИЙ А.Г., ЛЮБИМОВ Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962.
- [11] PUDOVKIN M.S., SEMENOV V.S. Stationary frozen-in coordinate system // Ann. Geophys. 1977. Vol. 33. P. 429–433.
- [12] MCILWAIN C.E. Coordinates for mapping the distribution of magnetically trapped particles // J. Geophys. Res. 1961. Vol. 66. P. 3681–3691.
- [13] NEUBAUER F.M., GURNETT D.A., SCUDDER J.D., HARTLE R.E. Titan's magnetospheric interaction // Saturn / Ed. by T. Gehrels, M.S. Matthews. Univ. of Arizona Press, 1984. P. 760–787.

*Поступила в редакцию 10 августа 2005 г.,  
в переработанном виде — 6 февраля 2006 г.*