

# ПАКЕТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ АНАЛИЗА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОУРОВНЕВОЙ ШАХТЫ С ЦЕЛИКАМИ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ И ТЕКТОНИЧЕСКИХ СИЛ

М.М. МУЗДАКБАЕВ

*НИИ математики и механики при КазНУ им. аль-Фараби,*

*Алматы, Казахстан*

e-mail: danaev@kazsu.kz

An algorithm for analysis of tensional-deformed conditions of the complicated underground construction accounting for the gravitational and tectonic forces is developed. The package of applied programs based on this algorithm is implemented.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается известная постановка задачи теории упругости, где вектор перемещения  $\vec{u}$  и тензор напряжений  $\sigma_{ij}$  удовлетворяют уравнениям равновесия Коши [1]:

$$\operatorname{div}\{\sigma_{ij}\} + \rho\vec{F} = 0 \quad (1)$$

и закону Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Здесь  $\vec{F}$  — вектор объемных сил;  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций;  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

и  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  — параметры Ламе;  $E$  и  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $\rho$  — плотность среды;  $\varepsilon = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. Для системы уравнений (1)–(3) в рассматриваемой области  $\Omega$  ставим следующие краевые условия на границе  $S$ :

1) задача Дирихле

$$\vec{u}|_S = \vec{g}(\vec{x}); \quad (4)$$

2) задача Неймана

$$\sigma_{ij}n_j|_S = F_i. \quad (5)$$

Для единственности решения задачи (1)–(5) необходимо, чтобы компоненты тензора деформаций  $\{\varepsilon\}$  удовлетворяли уравнениям совместности.

В случае плоской деформации уравнения равновесия (1) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_1 &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + F_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Пусть имеет место вторая краевая задача

$$\left. \begin{aligned} \left[ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \right] \cos(n, x) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos(n, y) &= -f_1, \\ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos(n, x) + \left[ \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \cos(n, y) &= -f_2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $x, y \in S$ ,  $n$  — внутренняя нормаль к границе  $S$ .

Как известно из литературы [2], если решение задачи (6), (7) существует, то оно обеспечивает минимум следующему функционалу:

$$I(\vec{u}) = W(\vec{u}) + \int_{\Omega} (\vec{F}_1 \vec{u} + \vec{F}_2 v) d\Omega - \int_S (f_1 u + f_2 v) ds, \quad (8)$$

где

$$W(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} d\Omega \quad (9)$$

есть энергия упругой деформации тела.

Будем называть решением задачи (6), (7) вектор  $\vec{u} = (u, v)$ ,  $u, v \in W_2^1(\Omega)$ , который минимизирует функционал (8). Приближенным решением задачи (6), (7) называется вектор  $\vec{\tilde{u}} \in V$ ,  $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in V$ , который минимизирует функционал (8) на подпространстве  $V$  пространства  $W_2^1(\Omega)$ .

Для составления уравнений равновесия в указанной области строится расчетная сетка с помощью восьми изопараметрических элементов. Перемещения находятся для узловых точек сетки, а напряжения вычисляются для внутренних точек интегрирования отдельных конечных элементов, и по ним находятся осредненные значения напряжений по элементу.

## 2. Алгоритм вычисления

Для дискретизации расчетной области, применяя восьмиузловые изопараметрические четырехугольники произвольной формы (прямоугольники, трапеции и т. д.), по известному

алгоритму метода конечных элементов (МКЭ) составляем систему уравнений равновесия. Базисные функции для четырехугольника сирендипового типа имеют вид [3, 4]

$$\begin{aligned} h_1 &= -0.25(1 - \xi)(1 - \eta)(\xi + \eta + 1), & h_2 &= 0.5(1 - \xi^2)(1 - \eta), \\ h_3 &= 0.25(1 + \xi)(1 - \eta)(\xi - \eta - 1), & h_4 &= 0.5(1 - \xi^2)(1 + \eta), \\ h_5 &= 0.25(1 + \xi)(1 + \eta)(\xi + \eta - 1), & h_6 &= 0.5(1 - \xi^2)(1 + \eta), \\ h_7 &= -0.25(1 - \xi)(1 + \eta)(\xi - \eta + 1), & h_8 &= 0.5(1 - \xi)(1 - \eta^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Нумерация узлов таких конечных элементов начинается с левого нижнего углового узла против часовой стрелки. Итак, для восьми узлов имеем восемь соотношений по Зенкевичу [3].

Каждое из этих соотношений равно единице только в тех индексах, которые соответствуют номерам точек, и равно нулю в остальных узлах, и координату  $x$ ,  $z$  любой точки можем аппроксимировать с помощью декартовых координат вершин в виде

$$x = \sum_{i=1}^8 h_i x_i, \quad z = \sum_{i=1}^8 h_i z_i. \quad (11)$$

Для взаимного перехода из системы координат  $xOz$  в систему координат  $\xi O\eta$  установим связь между ними по правилу дифференцирования для выражений (10):

$$\frac{\partial h_i}{\partial \xi} = \frac{\partial h_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial h_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial h_i}{\partial \eta} = \frac{\partial h_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial h_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad (12)$$

или

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial z} \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Отсюда матрица Якоби имеет вид

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Обратный переход осуществляется обращением (13):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

После всевозможных подстановок для перехода в систему координат  $\xi O\eta$  формула (15) принимает вид

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ \frac{\partial h_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det [J]} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial h_i}{\partial \eta} z_i & -\sum_{i=1}^8 \frac{\partial h_i}{\partial \xi} z_i \\ -\sum_{i=1}^8 \frac{\partial h_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial h_i}{\partial \xi} x_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial h_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

После окончательного перехода в систему  $\xi O \eta$ , который подробно изложен в [8], получим формулу для построения матрицы жесткости произвольного четырехугольника с учетом внутренних точек интегрирования:

$$[K]^e = \sum_{i,j} t_{i,j} \alpha_{ij} [B]^T [D] [B] \det [J], \quad (17)$$

где  $\alpha_{ij}$  — гауссовы точки интегрирования [3, 4], а  $t_{ij}$  — толщина элемента в точке  $i, j$ ;  $[B]$ ,  $[D]$  — матрицы базисных функций и упругости элемента  $e$ ;  $\det [J]$  — якобиан. Матрица жесткости системы вычисляется суммированием матриц жесткости отдельных элементов, рассчитанных по (17). Координаты  $x(\xi_i, \eta_i)$ ,  $z(\xi_i, \eta_i)$  и перемещения  $u(\xi_i, \eta_i)$  запишем в виде

$$\{x\} = [Q]\{x_0\}, \quad \{z\} = [Q]\{z_0\}, \quad \{u\} = [Q]\{U_0\}, \quad (18)$$

где  $[Q]$  — матрица интерполирующих функций (10), а векторы  $\{x_0\}$ ,  $\{z_0\}$  и  $\{U_0\}$  — соответственно координаты и перемещения узлов вершин элемента.

Объемные силы вычисляются с помощью выражений

$$\{P\} = [Q]^T \{f\}^S \det [J], \quad (19)$$

где  $\{f\}^S$  — вектор объемной силы для элемента. Горизонтальная составляющая тектонической силы имеет вид [7]

$$\{T\} = \chi \{P\}, \quad (20)$$

где  $\chi$  — коэффициент тектонического сжатия;  $\nu < \chi < 1$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Уравнения равновесия всей системы запишем в виде

$$[K]\{U_0\} = \{P\} + \{T\}. \quad (21)$$

Векторы деформаций и напряжений вычисляются в точках  $\xi_{i,j}$ ,  $\eta_{i,j}$ :

$$\{\varepsilon_k\}_{i,j} = [B_{k,m}]_{i,j} \{U_{0m}\}, \quad k = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, \dots, 8, \quad i = j = 1, 2, \dots, 9; \quad (22)$$

$$\{\sigma_k\}_{i,j} = [D_{k,n}] \{\varepsilon_k\}, \quad n = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, \quad (23)$$

где  $\{\varepsilon_k\}_{i,j} = \{\varepsilon_{k,x}, \varepsilon_{k,z}, \lambda_{k,xz}\}_{i,j}$ ,  $\{\sigma_k\}_{i,j} = \{\sigma_{k,x}, \sigma_{k,z}, \tau_{k,xz}\}_{i,j}$  — деформации и напряжения;  $\{U_m\} = \begin{bmatrix} u_\ell & 0 \\ 0 & v_\ell \end{bmatrix}$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, 8$ , — перемещения узловых точек.

### 3. Расчетная область задачи

Как известно, по мере разработки верхних слоев полезных ископаемых приходится добывать руду из глубоких нижних пластов. В целях предотвращения обрушения кровли выработки на определенных расстояниях друг от друга оставляются целики из породы, а пустые отработанные забои закладываются пустыми породами или быстро твердеющими растворами. На рис. 1 показана схема расчетной области наклонно-слоистого массива вокруг шахты с многоуровневыми выработками. В данном случае рассматриваются три выработки с оставленными целиками и уровнями залегания выработок  $H_1 = 250$ ,  $H_2 = 310$  и  $H_3 = 400$  м. В каждой расчетной точке области действуют геостатическая сила, направленная вниз, и горизонтальная составляющая тектонической силы, направленная в сторону выработки либо от нее. Расчетные и измеренные данные тектонической силы показывают, что существенное значение имеет ее горизонтальная составляющая, которая по

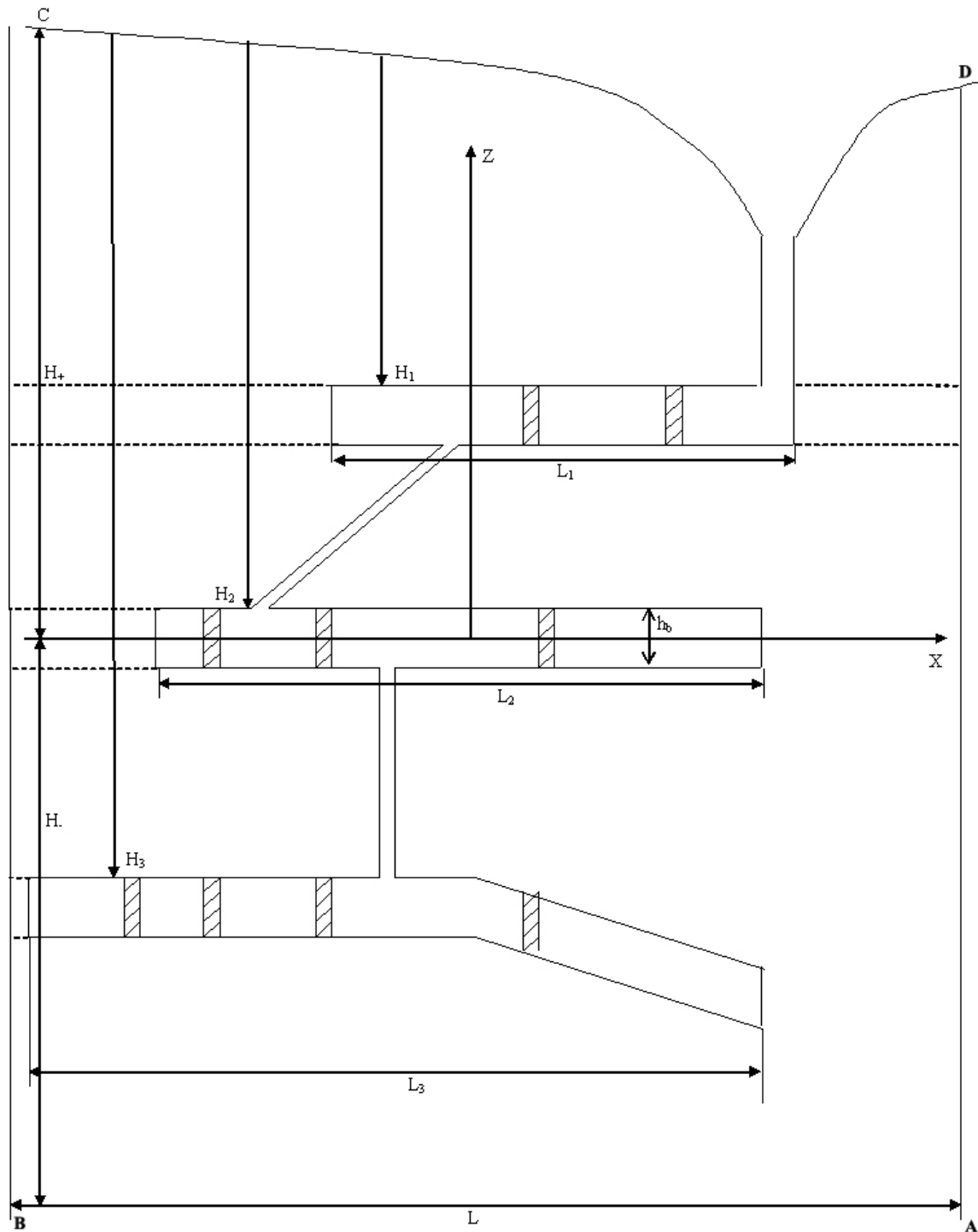


Рис. 1. Схема расположения выработок трехуровневой шахты:  $L$  — общая длина расчетной области ABCD;  $L_1$  —  $L_3$  — длины выработок, соответственно верхней, средней и нижней;  $H_1$  —  $H_3$  — их глубины залегания;  $h_B$  — высота выработок.

величине значительно превосходит силы тяжести с удалением в глубь массива от земной поверхности [5]. Размеры расчетной области для МКЭ выбираются из условия соблюдения гипотезы Динника. Численные эксперименты показали, что для этого ширину и высоту внешней границы расчетной области независимо от типа неоднородного строения массива

необходимо выбирать в соотношении [6]

$$L = \delta H, \quad 2.2 < \delta < 2.3. \quad (24)$$

#### 4. Исходные данные

Длина исследуемой области ABCD  $L = 2000$  м, высота  $H = 800$  м. Выработки находятся на глубинах  $H_1 = 250$ ,  $H_2 = 310$ ,  $H_3 = 400$  м и все имеют высоту, равную  $h = 4$  м. Длины выработок  $L_1 = 160$ ,  $L_2 = 250$  и  $L_3 = 300$  м, причем 1/5 правой части третьей нижней выработки имеет наклон под углом  $\varphi = 15^\circ$ .

Физико-механические характеристики анизотропного трансформированного массива, состоящего из горного массива, пласта угля, закладочного материала и геологического разлома, взяты из работы [1]:  $E_1 = 2,0 \cdot 10^4$  МПа,  $E_2 = 1,5 \cdot 10^3$  МПа,  $E_3 = 3 \cdot 10^2$  МПа,  $E_4 = 2 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu_1 = 0,28$ ,  $\nu_2 = 0,3$ ,  $\nu_3 = 0,32$ ,  $\nu_4 = 0,26$ ,  $\gamma_1 = 2,46$  т/м<sup>3</sup>,  $\gamma_2 = 2,4$  т/м<sup>3</sup>,  $\gamma_3 = 2,0$  т/м<sup>3</sup>,  $\gamma_4 = 2,3$  т/м<sup>3</sup>.

Сформулированы следующие граничные условия: поверхность земли  $CD$  свободна от напряжений  $\sigma_z = \tau_{zx} = 0$  на  $BC$ , а на  $AD$   $u = 0$ ,  $v = 0$ .

Геостатические напряжения в массиве вычисляются по известным формулам

$$\sigma_z = -\gamma H, \quad \sigma_x = \eta \sigma_z, \quad \eta = \nu / (1 - \nu). \quad (25)$$

Область численного решения задачи показана на рис. 1. Рассматривается шахта с трехуровневой выработкой, учитываются массовые и тектонические силы. В каждой из выработок оставлены целики: в первой — два, во второй — три, в третьей — четыре, как показано на рис. 1. Для удобства пронумеруем целики слева направо, например, в первой выработке 1 и 2; во второй — 1, 2 и 3 и т. д.

На горизонтальных контурах рассматриваемых трех выработок шахты ставятся граничные условия  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{zx} = 0$ , на вертикальных —  $\sigma_x = 0$ ,  $\tau_{zx} = 0$ . Наклонные контуры в конце третьей выработки свободны от напряжений  $\sigma_n = 0$ ,  $\tau_{nz} = 0$ , где  $n$  — нормаль к этим контурам. На контакте целиков с контурами соответствующих выработок имеют место условия жесткого сцепления с ними, т. е. совместного деформирования  $v_{\text{выр}} = v_{\text{цел}}$ , а стены целиков свободны от напряжений.

Рассматриваемая область разбивается на 430 изопараметрических четырехугольных элементов с общим количеством узлов 550. Вокруг выработок для ожидаемой концентрации напряжений сетка конечных элементов сгущалась.

Система основных уравнений МКЭ (21) решалась итерационным методом Гаусса — Зейделя.

На рис. 2 приводим некоторые из полученных результатов вычисления по определению концентраций напряжений вокруг каждого уровня выработок рассматриваемой шахты.

На стороне  $a_1c_1$  имеют место сжимающие тангенциальные напряжения  $\sigma_\theta$ , наибольшие значения которых приходится над целиками 1 и 2, причем в случае воздействия геостатических и тектонических (+) сил напряжения  $\sigma_\theta$  над вторым целиком на 10–30 % больше, чем над первым, тогда как в случае тектонических (–) они почти равны. По мере удаления от первого целика в сторону угловой точки  $a_1$  напряжения  $\sigma_\theta$  резко уменьшаются в десятки раз и становятся близкими к нулю, а в угловой точке меняют знак и становятся растягивающими. На левом торце  $a_1k_1$  первой выработки имеются слабые растягивающие напряжения  $\sigma_x$ . Близкие к нулю растягивающие напряжения  $\sigma_\theta$  появляются и на стороне

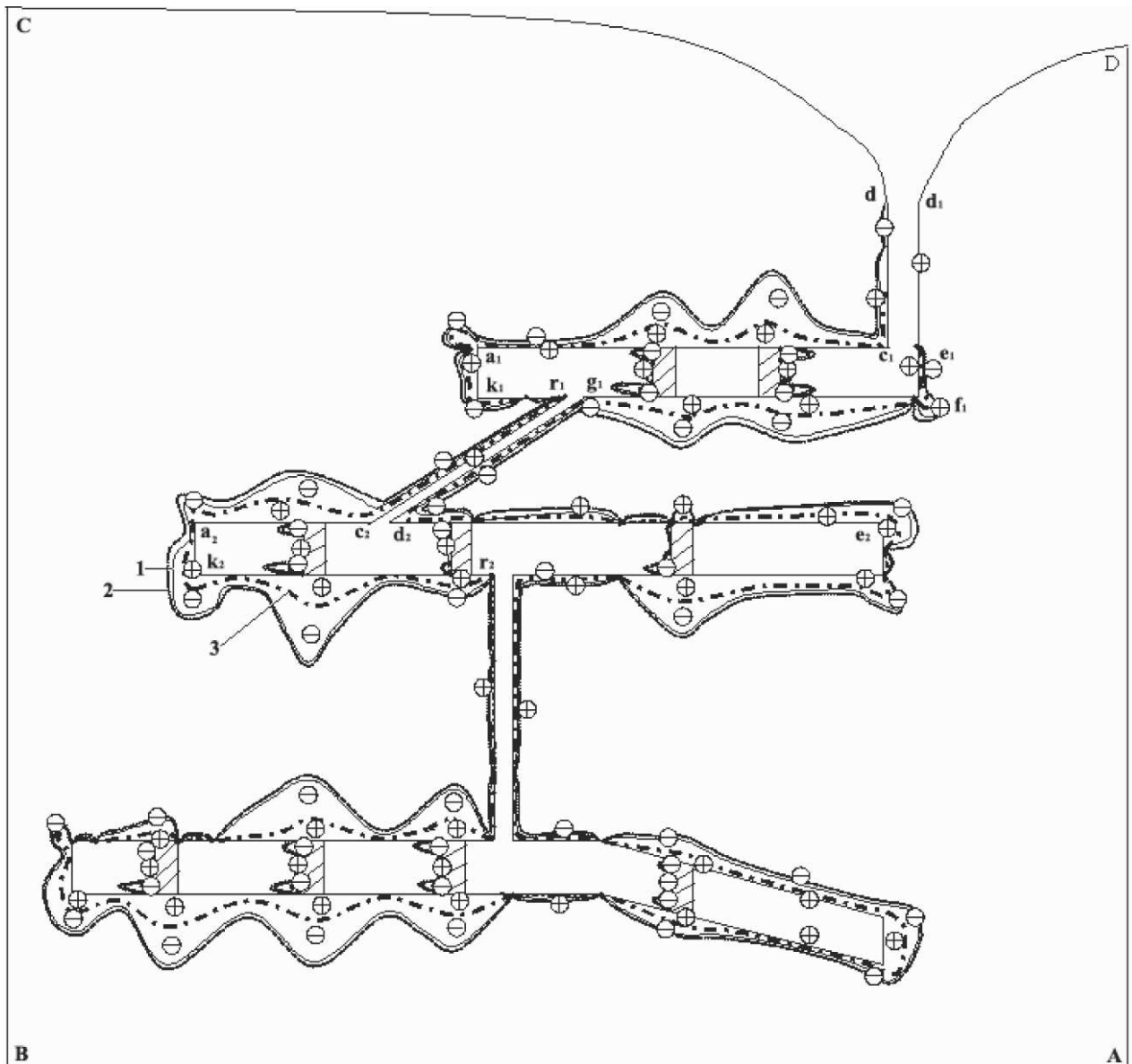


Рис. 2. Эпюры тангенциальных напряжений вдоль контуров выработок, целиков и стволов шахт: 1 — тонкие сплошные линии соответствуют геостатическому ( $-\gamma H$ ) случаю, 2 — тонкие штриховые линии — воздействию тектонических (+) сил (в направлении оси  $Ox$ ), 3 — жирные штрихпунктирные линии — воздействию тектонических (-) сил в направлении, противоположном оси  $Ox$ .

$k_1 r_1$ . Сжимающие напряжения  $\sigma_\theta$  на стороне  $g_1 f_1$  растут на контакте с первым и вторым целиками, их значения в случае геостатических и тектонических (+) сил увеличиваются до значения, равного 50–60 % их верхнего максимального значения на контакте с целиками, тогда как при тектонических (-) силах нижние растягивающие напряжения  $\sigma_\theta$  почти равны верхним максимальным около целиков. Такое напряженное состояние в массиве имеет место в случае геостатического воздействия. Сжимающие напряжения на сторонах  $c_2 a_2$ ,  $a_2 k_2$ ,  $k_2 r_2$ , достигают максимального значения на контакте с первым целиком второй выработки, причем его нижнее значение в 2.7 раза превосходит верхнее.

Тангенциальное напряжение на стороне  $d_2 e_2$  ведет себя очень сложным образом, при-

нимая растягивающее значение на контактах со вторым и третьим целиками, а также между ними, принимая затем сжимающие значения. Следует отметить, что все эти значения малы.

Такая картина наблюдается вдоль контура третьей выработки. Стволы шахты находятся в слабосжатом либо слаборастянутом состоянии. Если рассматривать напряженное состояние целиков, то у двух в первой выработке, у первого во второй и первого в третьей выработках они находятся примерно в одинаковых условиях, т. е. на контакте с контурами выработок они испытывают сильное сжатие, а в срединной части — растяжение, но значение последнего меньше сжатия. Исключение составляет четвертый целик в третьей выработке: в случае воздействия тектонических (+) и геостатических сил он находится под воздействием сил растяжения, тогда как в случае воздействия тектонических (–) сил он находится в слаборастянутом состоянии. Также сложным образом ведут себя второй и третий целики второй выработки, например, второй в случае воздействия тектонических (+) и геостатических сил находится в слабосжатом и слаборастянутом состоянии в срединной части, тогда как третий в случае тектонических (–) сил снизу на контакте с контуром испытывает сжатие. Следует отметить также появление зон слаборастягивающих напряжений  $\sigma_\theta$  на нижней части контура третьей выработки перед наклоном вниз на  $\varphi_{15^\circ}$  и близкие к нулю значения  $\sigma_\theta$  напротив верхней части контура в случае воздействия геостатических и тектонических (+) сил.

В заключение отметим, что величины тангенциальных напряжений почти во всей области в случае воздействия тектонических (+) сил наибольшие, а в случае геостатических сил напряжения становятся меньше. Самые наименьшие напряжения возникают при воздействии тектонических (–) сил. Их сравнение со случаями воздействия геостатических и тектонических (+) сил показывает, что они близки друг к другу.

Точность проведенных расчетов сравнивалась с результатами, полученными в [8]. Установлено хорошее совпадение с ними, т. е. по мере удаления от выработок в сплошном массиве везде и всюду выполняются условия равенства геостатического давления  $\sigma_z = \gamma H$ , где  $\sigma_z$  получен из результатов численных расчетов. Поскольку для трехуровневой шахты в литературе отсутствуют какие-либо оценки точности с помощью прямых или косвенных замеров напряженных состояний в забоях, так как ранее такие задачи в комплексе не рассматривались, в предельном переходе за основу приняты оценки точности по результатам счета для одиночной выработки. Проведено сравнение аналитических решений этой задачи с численными результатами, что показало их точное совпадение [8].

Следует сказать, что модель, предложенная Ж.С. Ержановым, Ш.М. Айталиевым и Ж.К. Масановым для расчета напряженно-деформированного состояния подземных сооружений в наклонно-слоистом анизотропном массиве, применима для анализа напряженно-деформированного состояния целого класса задач, как утверждалось многочисленными авторами, и нашла еще одно подтверждение в приведенных расчетах.

Таким образом, установлены основные закономерности распределения концентрации напряжений на контурах сложной системы многоуровневых подземных сооружений.

## Список литературы

- [1] Тимошенко С.П., Гудвер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.
- [2] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.



- [3] ЗЕНКЕВИЧ О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
- [4] СЕГЕРЛИНД Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
- [5] ЕРЖАНОВ Ж.С., АЙТАЛИЕВ Ш.М., МАСАНОВ Ж.К. Сейсмонапряженное состояние подземных сооружений в анизотропном слоистом массиве. Алма-Ата: Наука, 1980. 211 с.
- [6] БУЛЫЧЕВ Н.С. Механика подземных сооружений. М., 1986.
- [7] ТЕКТОНИЧЕСКИЕ напряжения в земной коре и устойчивость горных выработок / И.А. Турчанинов, Г.А. Марков и др. Л.: Наука, 1978. 256 с.
- [8] БАЙМАХАН Р.Б. Расчет сейсмонапряженного состояния подземных сооружений в неоднородной толще методом конечных элементов. Алматы: Дауир, 2002. 230 с.

*Поступила в редакцию 9 декабря 2005 г.,  
в переработанном виде — 20 февраля 2006 г.*