

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В СРЕДЕ С АНИЗОТРОПНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ\*

Н. В. ОРЛОВСКАЯ, Э. П. ШУРИНА

*Новосибирский государственный технический университет, Россия*

e-mail: nadino2000@mail.ru, shurina@online.sinor.ru

М. И. ЭПОВ

*Институт геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия*

e-mail: mepov@uiggm.nsc.ru

Using the method of differential forms we have shown that for modeling of electromagnetic fields in the anisotropic medium the system of the first order Maxwell's equations is preferable compared to the second order equations. Results of the numerical tests are presented.

## 1. Уравнения Максвелла

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в однородной области:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{\mathbf{B}} = -\nabla \times \vec{\mathbf{E}}, \\ \partial_t \vec{\mathbf{D}} = \nabla \times \vec{\mathbf{H}} - \sigma \vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{J}}, \\ \operatorname{div}(\vec{\mathbf{D}}) = \rho, \\ \operatorname{div}(\vec{\mathbf{B}}) = 0. \end{cases}$$

Здесь  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  — скалярные величины. Уравнения второго порядка для электрического и магнитного полей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mu^{-1} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}}) + \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{D}}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t} &= -\frac{\partial \vec{\mathbf{J}}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}) + \frac{\partial^2 \varepsilon \vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial}{\partial t}(\mu \vec{\mathbf{H}}) - \operatorname{rot}(\vec{\mathbf{J}}) &= 0. \end{aligned}$$

При аппроксимации уравнений второго порядка векторным методом конечных элементов вводится следующее функциональное пространство:

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) = \left\{ \vec{\mathbf{v}} \in [L^2(\Omega)]^3 : \operatorname{rot} \vec{\mathbf{v}} \in [L^2(\Omega)]^3 \right\}.$$

\*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-05-64528), совместного международного проекта NWO и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 047.016.003).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2006.

При аппроксимации системы уравнений Максвелла как системы первого порядка вместе с пространством  $H(\text{rot}, \Omega)$  вводят пространство  $H(\text{div}, \Omega)$ :

$$H(\text{div}; \Omega) = \left\{ \vec{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \text{div } \vec{v} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Функции из пространства  $H(\text{div}; \Omega)$  аппроксимируют векторные величины потока, такие как  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ , функции из пространства  $H(\text{rot}; \Omega)$  — векторные поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ . Для пространств  $H^1(\Omega)$ ,  $H(\text{rot}, \Omega)$ ,  $H(\text{div}, \Omega)$  выполняются отношения включения, называемые комплексом де Рама [1]:

$$H^1(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}} H(\text{rot}; \Omega) \xrightarrow{\text{rot}} H(\text{div}; \Omega) \xrightarrow{\text{div}} L^2(\Omega).$$

Введем обозначения для дискретных подпространств пространств  $H^1(\Omega)$ ,  $H(\text{rot}; \Omega)$ ,  $H(\text{div}; \Omega)$ :

— пространство непрерывных кусочно-полиномиальных функций

$$S(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega)\};$$

— пространство Неделека роторно-конформных функций [2, 3]

$$ND(\Omega) = \{v \in H(\text{rot}; \Omega)\};$$

— пространство Равьяр — Тома дивергентно-конформных функций [4]

$$RT(\Omega) = \{u \in H(\text{div}; \Omega)\};$$

— пространство полиномиальных функций

$$Q(\Omega) = \{w \in L^2(\Omega)\}.$$

Для дискретных пространств  $S(\Omega)$ ,  $ND(\Omega)$ ,  $RT(\Omega)$ ,  $Q(\Omega)$  комплекс де Рама принимает вид

$$S(\Omega) \xrightarrow{\text{grad}} ND(\Omega) \xrightarrow{\text{rot}} RT(\Omega) \xrightarrow{\text{div}} Q(\Omega).$$

Параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  не всегда являются скалярными величинами. В общем случае это положительно определенные тензоры второго ранга. Исследование уравнений Максвелла с тензорными коэффициентами удобнее всего проводить, используя аппарат дифференциальных форм [1]. Дифференциальные формы известны давно и первоначально были предложены в качестве удобного аппарата в физике и дифференциальной геометрии [5]. Для дифференциальных форм в  $R^3$  введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} 0\text{-форма} & f, \\ 1\text{-форма} & f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz, \\ 2\text{-форма} & f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy, \\ 3\text{-форма} & f dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Дифференциальные формы обладают следующими свойствами [1, 5–7].

Таблица 1. Соотношения между функциональными пространствами и дифференциальными формами

Функциональное пространство	Дифференциальная форма	Внешний дифференциал	Конечно-элементные пространства
$H^1(\Omega)$	0-форма	grad	$S(\Omega)$
$H(\text{rot}; \Omega)$	1-форма	rot	$ND(\Omega)$
$H(\text{div}; \Omega)$	2-форма	div	$RT(\Omega)$
$L^2(\Omega)$	3-форма	0	$Q(\Omega)$

Для 1-формы  $w$  выполняется

$$\int_{\Gamma} w d\Gamma = \int_{\Gamma} (f, \vec{\tau}) d\Gamma,$$

где  $\Gamma$  — гладкая кривая с касательным вектором  $\vec{\tau}$ .

Для 2-формы  $w$  имеем

$$\int_S w dS = \int_S (f, \vec{n}) dS,$$

где  $S$  — ориентированная площадь с внешней нормалью  $\vec{n}$ .

Определим оператор внешнего дифференциала  $d$  [8]

$$dw = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} + \dots + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p},$$

где  $P$  — порядок дифференциальной формы.

Обозначим  $*$  оператор Hodge [9], действующий следующим образом:

$$*(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = dx_{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}.$$

Для внешнего дифференциала выполняются тождества

$$u = d\phi = \text{grad } \phi, \quad w = du = \text{rot } u, \quad v = dw = \text{div } w,$$

где  $\phi$  — 0-форма,  $u$  — 1-форма,  $w$  — 2-форма,  $v$  — 3-форма.

Для оператора Hodge  $*$  выполняются следующие тождества:

$$*\phi = v, \quad *u = w, \quad *w = u, \quad *v = \phi,$$

где  $\phi$  — 0-форма,  $u$  — 1-форма,  $w$  — 2-форма,  $v$  — 3-форма. Оператор Hodge обеспечивает выполнение материальных соотношений, где переменные  $E$ ,  $H$  являются 1-формами, а  $B$ ,  $D$  — 2-формами.

Соотношения между функциональными пространствами и дифференциальными формами представлены в табл. 1.

## 2. Уравнение второго порядка для электрического поля

В данной работе рассмотрены среды с анизотропными проводящими свойствами, в которых параметр  $\sigma$  — тензор ранга 2. Входящие в систему уравнений Максвелла переменные являются следующими дифференциальными формами:  $E$ ,  $H$  — дифференциальные формы первого порядка (1-формы);  $B$ ,  $D$ ,  $J$  — дифференциальные формы второго порядка (2-формы).

Закон Ампера в дифференциальных формах:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -dE. \quad (1)$$

Закон Фарадея в дифференциальных формах:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = dH - \sigma^*E - J. \quad (2)$$

Материальные соотношения принимают вид

$$D = \varepsilon^*E; \quad (3)$$

$$B = \mu^*H; \quad (4)$$

$$J = \sigma^*E. \quad (5)$$

Будем полагать, что  $\varepsilon, \mu$  — диагональные тензоры, а  $\sigma$  — тензор ранга 2. Умножим уравнение (1) на  $\mu^{-1*}$ :

$$\mu^{-1*} \frac{\partial B}{\partial t} = -\mu^{-1*} dE. \quad (6)$$

Подставив (4) в (6) и выполнив преобразования в соответствии со свойствами оператора Hodge, получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\mu^{-1*} dE. \quad (7)$$

Поскольку (7) содержит 1-формы, взятие внешнего дифференциала от этого уравнения равносильно взятию операции  $\text{rot}$ . Вычислим внешний дифференциал от (7):

$$\frac{\partial(dH)}{\partial t} = -d(\mu^{-1*} dE). \quad (8)$$

Подставив (2) в (8) и преобразовав, получим

$$d(\mu^{-1*} dE) + \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma^*E) = -\frac{\partial J}{\partial t}. \quad (9)$$

Преобразуем  $\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^*E)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\sigma^*E) &= \frac{\partial}{\partial t} [(\sigma_1^1 E_x + \sigma_2^1 E_y + \sigma_3^1 E_z) dy \wedge dz + (\sigma_1^2 E_x + \sigma_2^2 E_y + \sigma_3^2 E_z) dz \wedge dx + \\ &+ (\sigma_1^3 E_x + \sigma_2^3 E_y + \sigma_3^3 E_z) dx \wedge dy] = \left( \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_1^1 E_x) + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_2^1 E_y) + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_3^1 E_z) \right) dy \wedge dz + \\ &+ \left( \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_1^2 E_x) + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_2^2 E_y) + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_3^2 E_z) \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_1^3 E_x) + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_2^3 E_y) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_3^3 E_z) \right) dx \wedge dy = \frac{\partial \sigma}{\partial t}^* E + \sigma^* \frac{\partial E}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда уравнение (9) принимает вид

$$d(\mu^{-1}*dE) + \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial t}*E + \sigma*\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial t}. \quad (11)$$

При моделировании электрического поля в областях с разрывными свойствами (например, в областях с различными тензорами электропроводности) должны выполняться следующие условия непрерывности на межфрагментарной границе:

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{\Gamma_{12}} = 0; \quad (12)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \sigma \mathbf{E}]_{\Gamma_{12}} = 0. \quad (13)$$

Использование векторных функций из пространства  $H(\text{rot}; \Omega)$  обеспечивает выполнение условия (12). Условие (13) следует учитывать в вариационной постановке в виде дополнительного дивергентного ограничения.

*Вывод 1.* Показан переход к уравнению второго порядка для электрического поля в анизотропной среде с тензорной электропроводностью. Компоненты тензора могут зависеть как от пространственных координат, так и от времени.

### 3. Уравнение второго порядка для магнитного поля

Для перехода к уравнению второго порядка для магнитного поля в анизотропной среде умножим уравнение (2) на  $\varepsilon^{-1*}$ :

$$\varepsilon^{-1*}\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon^{-1*}dH - \varepsilon^{-1*}(\sigma*E) - \varepsilon^{-1*}J. \quad (14)$$

Вычислим внешний дифференциал от уравнения (14):

$$\frac{\partial}{\partial t}(dE) = d(\varepsilon^{-1*}dH) - d(\varepsilon^{-1*}(\sigma*E)) - d(\varepsilon^{-1*}J). \quad (15)$$

Рассмотрим уравнение (15). Для перехода к уравнению второго порядка необходимо получить дифференциал в явном виде. Распишем выражение  $d(\varepsilon^{-1*}(\sigma*E))$  с целью выделения дифференциала  $dE$ :

$$d(\varepsilon^{-1*}(\sigma*E)) = d(\varepsilon^{-1*}\sigma*E) = d(\varepsilon^{-1}\sigma E). \quad (16)$$

Выражение под дифференциалом в (16) является произведением тензоров, и по свойствам дифференцирования тензорных величин имеем [10]

$$d(AB) = (dA)B + A(dB). \quad (17)$$

По свойствам тензора (17) перепишем (15) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(dE) = d(\varepsilon^{-1*}dH) - d(\varepsilon^{-1}\sigma)E - \varepsilon^{-1}\sigma dE - d(\varepsilon^{-1*}J). \quad (18)$$

Полагая, что каждая компонента тензора не зависит от пространственных координат, подставим (1) в (18):

$$d(\varepsilon^{-1*}dH) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}(H) + \varepsilon^{-1}\sigma\frac{\partial}{\partial t}(\mu*H) - d(\varepsilon^{-1*}J) = 0. \quad (19)$$

*Вывод 2.* Вычисление внешнего дифференциала от уравнения (2) сразу, без умножения на  $\varepsilon^{-1}$  и оператор Hodge  $*$ , приводит к неправильным результатам, поскольку получаемый член уравнения  $d(dH)$  обращается в нуль по свойствам дифференциальных форм. Переход к уравнению второго порядка для магнитного поля накладывает ограничения на компоненты тензора электропроводности. Компоненты тензора могут быть либо константами, либо функциями только времени.

## 4. Система уравнений Максвелла в анизотропных средах

Запишем систему уравнений Максвелла, используя аппарат дифференциальных форм с учетом материальных соотношений (3), (4):

$$\frac{\partial \mu^* H}{\partial t} = -dE; \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^* E}{\partial t} = dH - \sigma^* E - J; \quad (21)$$

$$dD = \rho; \quad (22)$$

$$dB = 0. \quad (23)$$

Здесь плотность заряда  $\rho$  — дифференциальная форма порядка 3 (3-форма).

Таким образом, из уравнений (20)–(23) видно, что все константы, входящие в систему уравнений Максвелла, могут быть тензорами ранга 2. В частности, электрическая проводимость  $\sigma$  является тензором ранга два.

Для выполнения необходимых условий непрерывности компонент поля (13) на межфрагментарной границе подобластей с различными значениями тензорной электропроводности требуется выполнение слабой дивергенции

$$\operatorname{div} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathbf{E}) + \sigma \mathbf{E} \right] = 0$$

или в терминах дифференциальных форм

$$d \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^* E) + \sigma^* E \right] = 0. \quad (24)$$

Докажем, что для уравнений Максвелла первого порядка условие (24) выполняется автоматически.

**Лемма 1.** Доказать, что для любых  $\phi \in H^1(\Omega)$ ,  $\phi$  — 0-форма,

$$\int_{\Omega} d \left[ \frac{\partial (\varepsilon^* E)}{\partial t} + \sigma^* E \right] \wedge \phi d\Omega = 0.$$

По свойствам дифференциальных форм преобразуем интеграл к виду

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d \left[ \frac{\partial (\varepsilon^* E)}{\partial t} + \sigma^* E \right] \wedge \phi d\Omega &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial (\varepsilon^* E)}{\partial t} + \sigma^* E \right] \wedge d\phi d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} d \left[ \left( \frac{\partial (\varepsilon^* E)}{\partial t} + \sigma^* E \right) \wedge \phi \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (25)$$

Второе уравнение Максвелла в терминах дифференциальных форм выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d \left[ \frac{\partial(\varepsilon^* E)}{\partial t} + \sigma^* E \right] \wedge W d\Omega &= \int_{\Omega} (\mu^{-1} * B) \wedge dW d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} d((\mu^{-1} * B) \wedge W) d\Omega + \int_{\Omega} J \wedge d\phi d\Omega, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $W$  — тестовая функция из пространства  $H(\text{rot}; \Omega)$ .

Согласно диаграмме де Рама  $d\phi$  является 1-формой и принадлежит пространству  $H(\text{rot}; \Omega)$ , тогда, применяя (26) к (25), получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d \left[ \frac{\partial(\varepsilon^* E)}{\partial t} + \sigma^* E \right] \wedge \phi d\Omega &= \int_{\Omega} (\mu^{-1} * B) \wedge d(d\phi) d\Omega + \int_{\Omega} J \wedge d\phi d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} d(\mu^{-1} * B \wedge d\phi) d\Omega + \int_{\Omega} d \left( \left( -\frac{\partial(\varepsilon^* E)}{\partial t} - \sigma^* E \right) \wedge \phi \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (27)$$

По свойствам дифференциальных форм  $d(d\phi) = 0$  и

$$\int_{\Omega} J \wedge d\phi d\Omega = \int_{\Omega} dJ \wedge \phi d\Omega + \int_{\Omega} d(J \wedge \phi) d\Omega.$$

Условие разрешимости уравнений Максвелла является условие  $dJ = 0$ . С учетом этого (27) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d \left[ \frac{\partial(\varepsilon^* E)}{\partial t} + \sigma^* E \right] \wedge \phi d\Omega &= \int_{\Omega} d(\mu^{-1} * B \wedge d\phi) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} d \left( \left( -\frac{\partial(\varepsilon^* E)}{\partial t} - \sigma^* E + J \right) \wedge \phi \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (28)$$

Из второго уравнения Максвелла следует, что  $\frac{\partial(\varepsilon^* E)}{\partial t} + \sigma^* E - J = d(\mu^{-1} * B)$ . Тогда (28) можно записать в виде

$$\int_{\Omega} d \left[ \frac{\partial(\varepsilon^* E)}{\partial t} + \sigma^* E \right] \wedge \phi d\Omega = \int_{\Omega} d[(\mu^{-1} * B) \wedge d\phi] d\Omega - \int_{\Omega} d[d(\mu^{-1} * B) \wedge \phi] d\Omega. \quad (29)$$

Перепишем (29)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d \left[ \frac{\partial(\varepsilon^* E)}{\partial t} + \sigma^* E \right] \wedge \phi d\Omega &= \int_{\Omega} d(\mu^{-1} * B) \wedge d\phi d\Omega + \int_{\Omega} (\mu^{-1} * B) \wedge d(d\phi) d\Omega - \\ &- \int_{\Omega} d[d(\mu^{-1} * B)] \wedge \phi d\Omega - \int_{\Omega} d(\mu^{-1} * B) \wedge d\phi d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Лемма доказана.  $\square$

*Вывод 3.* Для уравнений Максвелла первого порядка показано автоматическое выполнение условий непрерывности компонент поля на межфрагментарной границе в анизотропной области. Система уравнений Максвелла первого порядка не накладывает каких-либо ограничений на компоненты тензоров параметров среды  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ . С учетом вышеизложенного при моделировании электромагнитных полей в анизотропных средах целесообразнее решать уравнения Максвелла как систему уравнений первого порядка.

## 5. Математическая модель

Источники возмущения электромагнитного поля могут быть как искусственными (поле проводников с током), так и естественными (естественное электромагнитное поле Земли). Моделирование электромагнитного поля в данной работе основано на декомпозиции поля на первичное и вторичное поля [11]. Первичное поле — падающая ТЕ (ТМ)-волна, вторичное поле — отраженная волна, полученная от взаимодействия падающей волны с проводящим полупространством.

Имеет место следующая декомпозиция поля:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}^p + \mathbf{B}^s.\end{aligned}\tag{31}$$

Подставив (31) в систему уравнений Максвелла, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}^s}{\partial t} &= -\operatorname{rot} \mathbf{E}^s - \left( \frac{\partial \mathbf{B}^p}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E}^p \right), \\ \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}^s}{\partial t} &= \operatorname{rot} \mu^{-1} \mathbf{B}^s - \sigma \mathbf{E}^s - \left( \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}^p}{\partial t} - \operatorname{rot} \mu^{-1} \mathbf{B}^p + \sigma \mathbf{E}^p \right).\end{aligned}$$

Обозначим

$$\mathbf{J}_m = \frac{\partial \mathbf{B}^p}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E}^p;\tag{32}$$

$$\mathbf{J}_e = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}^p}{\partial t} - \operatorname{rot} \mu^{-1} \mathbf{B}^p + \sigma \mathbf{E}^p,\tag{33}$$

где  $\mathbf{J}_m$  и  $\mathbf{J}_e$  — распределенные источники поля.

Первичное поле в виде ТЕ (ТМ)-волны имеет следующий вид:

$$TE : E = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), 0), \quad H = (0, 0, H_z(x, y, z)),$$

$$TM : E = (0, 0, E_z(x, y, z)), \quad H = (H_x(x, y, z), H_y(x, y, z), 0).$$

## 6. Вариационная формулировка

Введем следующие функциональные пространства:

$$H(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 \right\},$$

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \operatorname{rot} \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 \right\},$$

$$H^0(\operatorname{rot}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega) : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\},$$

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$H_0^0(\operatorname{rot}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in H^0(\operatorname{rot}; \Omega) : \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \right\},$$

$$H^0(\operatorname{div}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega) : \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \right\},$$

$$H_0^0(\operatorname{div}; \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in H^0(\operatorname{div}; \Omega) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0 \right\},$$



где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ . Здесь  $L^2(\Omega)$  — пространство интегрируемых с квадратом функций. Векторные элементы могут быть разделены на два класса элементов: конформных в пространстве  $H(\text{div}; \Omega)$  и конформных в  $H(\text{rot}; \Omega)$  [2, 3].

Для пространства  $H(\text{rot}; \Omega)$  вводят скалярное произведение

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\text{rot}; \Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} d\Omega.$$

Скалярное произведение для пространства  $H(\text{div}; \Omega)$  вводят следующим образом:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H(\text{div}; \Omega)} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u} \cdot \text{div } \mathbf{v} d\Omega.$$

Для введенных пространств выполняются условия включения:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in L^2(\Omega) \quad \text{grad } \varphi \in H(\text{rot}; \Omega), \\ \forall \mathbf{E} \in H(\text{rot}; \Omega) \quad \text{rot } \mathbf{E} \in H(\text{div}; \Omega). \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда можно сформулировать следующую задачу:

Для заданных источников поля  $J_m$  и  $J_e$  найди  $\mathbf{E}^s \in H^0(\text{rot}; \Omega)$  и  $\mathbf{B}^s \in H(\text{div}; \Omega)$  такие, что:

$$\frac{\partial \mathbf{B}^s}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}^s - \mathbf{J}_m \text{ в } \Omega; \quad (35)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}^s}{\partial t} = \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{B}^s - \sigma \mathbf{E}^s - \mathbf{J}_e \text{ в } \Omega; \quad (36)$$

$$\mathbf{E}^s \times \mathbf{n}|_{\Gamma_1} = \mathbf{E}_{\Gamma}; \quad (37)$$

$$\mathbf{B}^s \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{B}_{\Gamma}, \quad (38)$$

где  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

Введем скалярное произведение

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega.$$

Выпишем вариационную постановку для задачи (35)–(38). Для этого в соответствии с введенным скалярным произведением уравнение (35) умножим на функцию из пространства  $H_0^0(\text{div}, \Omega)$  и уравнение (36) — на функцию из пространства  $H_0^0(\text{rot}; \Omega)$ . Тогда получим следующую вариационную постановку.

Найди  $\mathbf{E}^s \in H^0(\text{rot}; \Omega)$  и  $\mathbf{B}^s \in H(\text{div}; \Omega)$  такие, что для  $\forall \mathbf{W} \in H_0^0(\text{rot}; \Omega), \forall \mathbf{F} \in H_0^0(\text{div}; \Omega)$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{B}^s}{\partial t}, \mathbf{F} \right) = -(\text{rot } \mathbf{E}^s, \mathbf{F}) - (\mathbf{J}_m, \mathbf{F}),$$

$$\left( \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}^s}{\partial t}, \mathbf{W} \right) = (\mu^{-1} \text{rot } \mathbf{B}^s, \mathbf{W}) - (\sigma \mathbf{E}^s, \mathbf{W}) - (\mathbf{J}_e, \mathbf{W}).$$

Используя векторное тождество

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\text{rot } \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\text{rot } \mathbf{b}),$$

получим

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \mu^{-1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{W} d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{W} \cdot \mu^{-1} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{W} \times \mu^{-1} \mathbf{B}) d\Omega. \quad (39)$$

Применяя формулу Гаусса — Остроградского

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

получим

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{W} \times \mu^{-1} \mathbf{B}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{W} \times \mu^{-1} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (40)$$

Из определения тестовой функции  $\mathbf{W}$  следует, что

$$\int_{\Gamma_1} (\mathbf{W} \times \mu^{-1} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \quad (41)$$

Тогда окончательная смешанная вариационная постановка для электрического и магнитного полей с распределенными источниками имеет следующий вид.

Найти  $\mathbf{E}^s \in H^0(\operatorname{rot}; \Omega)$  и  $\mathbf{B}^s \in H(\operatorname{div}; \Omega)$  такие, что для  $\forall \mathbf{W} \in H_0^0(\operatorname{rot}; \Omega)$ ,  $\forall \mathbf{F} \in H_0^0(\operatorname{div}; \Omega)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{B}^s \cdot \mathbf{F} d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}^s \cdot \mathbf{F} - \int_{\Omega} \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{F} \text{ в } \Omega; \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{W} d\Omega &= \int_{\Omega} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{W} \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{W} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{W} d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_2} (\mathbf{W} \times \mu^{-1} \mathbf{B}^s) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \text{ в } \Omega. \end{aligned} \quad (43)$$

## 7. Дискретизация вариационной постановки

Пусть в области  $\Omega$  выполнено разбиение на множество согласованных параллелепипедов. Определим дискретное пространство  $H^h(\operatorname{rot}; \Omega) \subset H_{\Gamma}^0(\operatorname{rot}; \Omega)$ , введя векторные базисные edge-функции на одном элементе. Дискретное пространство  $H^h(\operatorname{div}; \Omega) \subset H_{\Gamma}^0(\operatorname{div}; \Omega)$  определим, введя векторные базисные face-функции на одном элементе.

Используя дискретные пространства  $H^h(\operatorname{rot}; \Omega)$  и  $H^h(\operatorname{div}; \Omega)$ , сформулируем дискретный аналог вариационной постановки (42), (43).

Найти  $\mathbf{E}^s \in H^h(\operatorname{rot}; \Omega)$  и  $\mathbf{B}^s \in H^h(\operatorname{div}; \Omega)$  такие, что для  $\forall \mathbf{W} \in H^h(\operatorname{rot}; \Omega)$ ,  $\forall \mathbf{F} \in H^h(\operatorname{div}; \Omega)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{B}^s \cdot \mathbf{F} d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{E}^s \cdot \mathbf{F} - \int_{\Omega} \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{F} \text{ на } \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{W} d\Omega &= \int_{\Omega} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{W} \cdot \mathbf{B} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{W} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J}_e \cdot \mathbf{W} d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma_2} (\mathbf{W} \times \mu^{-1} \mathbf{B}^s) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \text{ на } \Omega. \end{aligned}$$

Разложим искомые функции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  по базисам пространств  $H^h(\text{rot}; \Omega)$  и  $H^h(\text{div}; \Omega)$ :

$$\mathbf{E} = \sum_i e_i(t) \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_j b_j(t) \mathbf{F}_j.$$

Поскольку  $\mathbf{J}_m$ ,  $\mathbf{J}_e$  — распределенные источники, их можно также представить в виде разложения по базисам:

$$\mathbf{J}_e = \sum_p j e_p(t) \mathbf{N}_p, \quad \mathbf{J}_m = \sum_k j m_k(t) \mathbf{F}_k.$$

Здесь  $N_p$  — edge-функции, определенные на ребрах параллелепипеда;  $F_k$  — face-функции, определенные на гранях параллелепипеда.

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов  $e_i(t)$  и  $b_j(t)$ :

$$\begin{cases} G \partial_t b_j(t) = -K e_i(t) - P j m_k, \\ C \partial_t e_i(t) = K^T b_j(t) - S e_i(t) - Q j e_p + Z. \end{cases}$$

Используя для аппроксимации по времени соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= \frac{e^{n+1} - e^n}{\tau}, \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= \frac{b^{n+\frac{1}{2}} - b^{n-\frac{1}{2}}}{\tau}, \end{aligned}$$

получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} G b^{n+\frac{1}{2}} = G b^{n-\frac{1}{2}} - \tau K e^n - \tau P j m^{n+\frac{1}{2}}, \\ C e^{n+1} + \tau S e^{n+1} = C e^n + \tau K^T b^{n+\frac{1}{2}} - \tau Q j e^{n+\frac{1}{2}} + \tau Z^{n+1}, \end{cases} \quad (44)$$

где элементы матриц  $G$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $S$ ,  $P$ ,  $Q$  и вектора правой части  $Z$  определяются соотношениями

$$[G]_{i,j} = \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j d\Omega; \quad (45)$$

$$[C]_{i,j} = \int_{\Omega} \varepsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j d\Omega; \quad (46)$$

$$[S]_{i,j} = \int_{\Omega} \sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j d\Omega; \quad (47)$$

$$[P]_{i,j} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_j d\Omega; \quad (48)$$

$$[Q]_{i,j} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j d\Omega; \quad (49)$$

$$[K]_{i,j} = \int_{\Omega} \mu^{-1} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{N}_j d\Omega; \quad (50)$$

$$[Z]_i = \int_{\Gamma_2} (\mathbf{N}_i \times \mu^{-1} \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma. \quad (51)$$

Здесь (45)–(49) — матрицы массы, а матрица (50) является матрицей произведения функций edge- и face-базисов. В результате вычислений получим конкретный вид локальных матриц в изотропной среде для базиса в пространстве  $H(\text{div}, \Omega)$

$$P = \frac{l_x l_y l_z}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

и базиса в пространстве  $H(\text{rot}, \Omega)$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{zz} \end{bmatrix},$$

$$Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = \frac{l_x l_y l_z}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Матрица (50) имеет вид

$$(K)^T = \frac{\mu^{-1}}{6} \begin{bmatrix} 2l_x l_z & l_x l_z & -2l_x l_y & -l_x l_y & 0 & 0 \\ -2l_x l_z & -l_x l_z & -l_x l_y & -2l_x l_y & 0 & 0 \\ l_x l_z & 2l_x l_z & 2l_x l_y & l_x l_y & 0 & 0 \\ -l_x l_z & -2l_x l_z & l_x l_y & 2l_x l_y & 0 & 0 \\ -2l_y l_z & -l_y l_z & 0 & 0 & 2l_x l_y & l_x l_y \\ -l_y l_z & -2l_y l_z & 0 & 0 & -2l_x l_y & -l_x l_y \\ 2l_y l_z & l_y l_z & 0 & 0 & l_x l_y & 2l_x l_y \\ l_y l_z & 2l_y l_z & 0 & 0 & -l_x l_y & -2l_x l_y \\ 0 & 0 & 2l_y l_z & l_y l_z & -2l_x l_y & -l_x l_y \\ 0 & 0 & -2l_y l_z & -l_y l_z & -l_x l_y & -2l_x l_y \\ 0 & 0 & l_y l_z & 2l_y l_z & 2l_x l_y & l_x l_y \\ 0 & 0 & -l_y l_z & -2l_y l_z & l_x l_y & 2l_x l_y \end{bmatrix}.$$

Определим конкретный вид локальной матрицы для тензорного коэффициента  $\sigma$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} S_1 & \sigma_{xy} S_2 & \sigma_{xz} S_3 \\ \sigma_{yx} S_2^T & \sigma_{yy} S_1 & \sigma_{yz} S_2 \\ \sigma_{zx} S_3^T & \sigma_{zy} S_2^T & \sigma_{zz} S_1 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \frac{l_x l_y l_z}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \frac{l_x l_y l_z}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$S_3 = \frac{l_x l_y l_z}{24} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

### 8. Тензорный коэффициент электрической проводимости в анизотропных средах

В изотропных средах электрическая проводимость  $\sigma$  является скаляром или диагональной матрицей  $3 \times 3$  с равными значениями на диагонали. В случае трансверсально-изотропной среды электрическая проводимость изменяется вдоль одной из осей (рис. 1),  $\sigma$  остается диагональной матрицей, но значение  $\sigma_z$  отличается от  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  в  $\lambda^2$  раз:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{xx}}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad 1 \leq \lambda^2 \leq 2.$$

В случае наклонно-изотропной среды электрическая проводимость изменяется слоями, расположенными под углом к поверхности земли (рис. 2). Введем новую систему координат  $x', y', z'$ , начало координат которой совпадает с началом координат исходной системы  $x, y, z$  и оси повернуты на угол  $-\theta$ . В новой системе координат среда является трансверсально-изотропной и тензор  $\sigma$  является диагональным. Выпишем выражение для  $\sigma$  в исходной системе координат:

$$\sigma(x, y, z) = J\sigma(x', y', z'), \tag{52}$$

где  $J$  — матрица перехода от системы  $x', y', z'$  в систему  $x, y, z$ .

Получим уравнения осей координатной системы  $x', y', z'$  в системе  $x, y, z$ . Спроектируем точку  $A'$ , лежащую на оси  $O'x'$  и имеющую координаты  $(1,0,0)$  в системе  $x', y', z'$  на

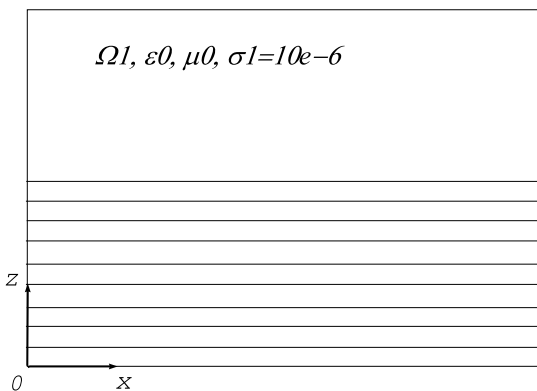


Рис. 1. Трансверсально-изотропная среда.

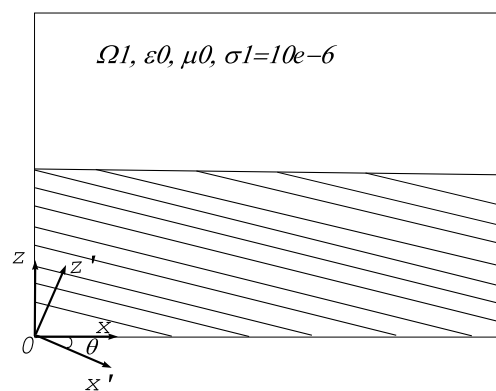


Рис. 2. Наклонно-изотропная среда.

оси системы  $x, y, z$ . Получим точку  $A$  с координатами  $(\cos \theta, 0, -\sin \theta)$  в системе  $x, y, z$ . Аналогично спроектируем точку  $B'$ , лежащую на оси  $O'y'$  и имеющую координаты  $(0, 1, 0)$  в системе  $x', y', z'$  на оси системы  $x, y, z$ . Получим точку  $B$  с координатами  $(0, \cos \theta, -\sin \theta)$  в системе  $x, y, z$ . Тогда, применив формулу для уравнения прямой, проходящей через две точки к парам точек:  $O(0, 0, 0)$  и  $A$ ,  $O(0, 0, 0)$  и  $B$ , получим уравнения для осей  $O'x'$  и  $O'y'$  в координатах системы  $x, y, z$  соответственно:

$$O'x' : \frac{x}{\cos \theta} = -\frac{z}{\sin \theta}; \quad O'y' : \frac{y}{\cos \theta} = -\frac{z}{\sin \theta}. \quad (53)$$

Через точки  $O, A, B$  и оси  $O'x', O'y'$  проходит плоскость, описываемая уравнением

$$\sin \theta x + \sin \theta y + \cos \theta z = 0. \quad (54)$$

Поскольку ось  $O'z'$  является перпендикуляром к плоскости, описываемой (54), не трудно выписать ее уравнение:

$$O'z' : -\frac{x}{\sin \theta} = -\frac{y}{\sin \theta} = \frac{z}{\cos \theta}. \quad (55)$$

Тогда из (53), (55) следует, что матрица  $J$  принимает вид

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Подставив (56) в (52), получим выражение для электрической проводимости наклонно-изотропной среды:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos \theta & 0 & -\sigma_z \sin \theta \\ 0 & \sigma_y \cos \theta & -\sigma_z \sin \theta \\ -\sigma_x \sin \theta & -\sigma_y \sin \theta & \sigma_z \cos \theta \end{bmatrix}.$$

## 9. Вычислительный эксперимент

*Тест 1.* Моделируется вторичное поле над полупространством в области  $\Omega$ . Первичное поле имеет форму ТЕ-волны вида

$$\begin{aligned} E_x &= \cos \pi x \sin \pi y \cos(\omega t - z), \\ E_y &= -\sin \pi x \cos \pi y \cos(\omega t - z), \\ H_z &= -2 \frac{\pi}{w} \cos \pi x \cos \pi y (\sin(\omega t - z) + \sin(z)). \end{aligned}$$

Тогда токи  $J_m, J_e$ , определенные соотношениями (32), (33), принимают вид

$$J_m = \begin{pmatrix} -\sin \pi x \cos \pi y \sin(\omega t - z) \\ -\cos \pi x \sin \pi y \sin(\omega t - z) \\ 2\pi(1 + \mu) \cos \pi x \cos \pi y \cos(\omega t - z) \end{pmatrix},$$

$$J_e = \begin{pmatrix} -\cos \pi x \sin \pi y [-\varepsilon w \sin(\omega t - z) - \frac{2\pi^2}{w\mu} (\sin(\omega t - z) + \sin z) + \sigma \cos(\omega t - z)] \\ \sin \pi x \cos \pi y [-\varepsilon w \sin(\omega t - z) - \frac{2\pi^2}{w\mu} (\sin(\omega t - z) + \sin z) + \sigma \cos(\omega t - z)] \\ 0 \end{pmatrix}.$$

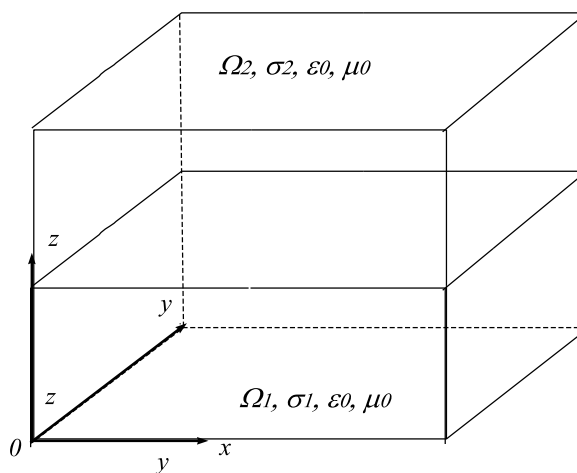


Рис. 3. Расчетная область.

Расчетная область представляет собой полупространство с анизотропными свойствами (рис. 3),  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma_{\text{воздух}} = 10^{-6} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$ ,  $\sigma_{\text{земля}}$  — тензор вида

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

где  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0.1$ ,  $\sigma_{zz} = 0.5\sigma_{xx}$ , или

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \cos \theta & 0 & -\sigma_{zz} \sin \theta \\ 0 & \sigma_{yy} \cos \theta & -\sigma_{zz} \sin \theta \\ -\sigma_{xx} \sin \theta & -\sigma_{yy} \sin \theta & \sigma_{zz} \cos \theta \end{bmatrix},$$

где  $\theta = 0, 30, 60, 90^\circ$ .

В табл. 2 и 3 представлены значения компонент электрического поля и магнитной индукции в точке (0.4, 0.45, 0.51) на 1000-м шаге по времени. На рис. 4 показаны силовые линии в горизонтальном сечении  $z = 0.51$ .

*Тест 2.* Моделируется вторичное поле над полупространством в области  $\Omega$ . Первичное поле имеет вид ТМ-волны:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\pi}{w} \sin \pi x \cos \pi y (\sin(wt - z) + \sin(z)), \\ H_y &= -\frac{\pi}{w} \cos \pi x \sin \pi y (\sin(wt - z) + \sin(z)), \\ E_z &= \sin \pi x \sin \pi y \cos(wt - z). \end{aligned}$$

Тогда токи  $J_m, J_e$ , определенные соотношениями (32), (33), принимают

$$\begin{aligned} J_m &= \begin{pmatrix} \pi(1 + \mu) \sin \pi x \cos \pi y \cos(wt - z) \\ -\pi(1 - \mu) \cos \pi x \sin \pi y \cos(wt - z) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ J_e &= \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{w} \cos \pi x \sin \pi y (\cos z - \cos(wt - z)) \\ -\frac{\pi}{w} \sin \pi x \cos \pi y (\cos z - \cos(wt - z)) \\ \sin \pi x \sin \pi y (\sigma \cos(wt - z) - \varepsilon w \sin(wt - z) - \frac{2\pi^2}{w} (\sin(wt - z) + \sin z)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таблица 2. Зависимость значений компонент электрического поля в точке (0.4,0.45,0.51) от свойств среды

	Однородная среда	Диагональный тензор
$E_x$	-0.0580066	-0.0580066
$E_y$	0.0282856	0.0282856
$E_z$	2.17965e-5	2.18716e-5
	Плотный тензор( $\theta = 0^\circ$ )	Плотный тензор( $\theta = 30^\circ$ )
$E_x$	-0.0580066	-0.0596304
$E_y$	0.0282856	0.0291886
$E_z$	2.18716e-5	-0.000915992
	Плотный тензор( $\theta = 60^\circ$ )	Плотный тензор( $\theta = 90^\circ$ )
$E_x$	-0.0639195	-0.0700522
$E_y$	0.0313926	0.0344734
$E_z$	-0.00175316	-0.0022833

Таблица 3. Зависимость значений компонент магнитной индукции в точке (0.4,0.45,0.51) от свойств среды

	Однородная среда	Диагональный тензор
$B_x$	6.54175E-11	6.5415E-11
$B_y$	1.3426E-10	1.34257E-10
$B_z$	4.38117E-11	4.38117E-11
	Плотный тензор( $\theta = 0^\circ$ )	Плотный тензор( $\theta = 30^\circ$ )
$B_x$	6.5415E-11	8.71919E-11
$B_y$	1.34257E-10	1.55305E-10
$B_z$	4.38117E-11	4.2346E-11
	Плотный тензор( $\theta = 60^\circ$ )	Плотный тензор( $\theta = 90^\circ$ )
$B_x$	1.08122E-10	1.23219E-10
$B_y$	1.76853E-10	1.93851E-10
$B_z$	3.82352E-11	3.22215E-11

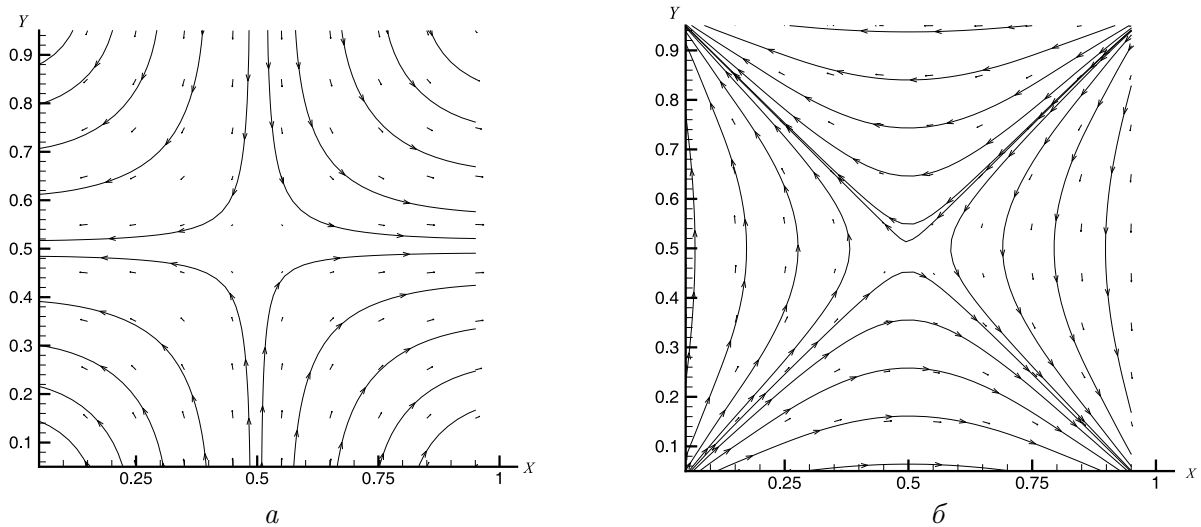
Рис. 4. Горизонтальные компоненты электрического поля ( $E_x, E_y$ ) (а) и магнитной индукции ( $B_x, B_y$ ) (б) в сечении  $z = 0.51$ .



Таблица 4. Зависимость значений компонент электрического поля в точке (0.4,0.45,0.51) от свойств среды

	Однородная среда	Диагональный тензор
$E_x$	-0.00120045	-0.00144901
$E_y$	-0.000589735	-0.000711668
$E_z$	0.139202	0.158243
	Плотный тензор( $\theta = 0^\circ$ )	Плотный тензор( $\theta = 30^\circ$ )
$E_x$	-0.00144901	0.00532095
$E_y$	-0.000711668	0.00610844
$E_z$	0.158243	0.163221
	Плотный тензор( $\theta = 60^\circ$ )	Плотный тензор( $\theta = 90^\circ$ )
$E_x$	0.0122319	0.0178147
$E_y$	0.0131437	0.0188998
$E_z$	0.177546	0.197017

Таблица 5. Зависимость значений компонент магнитной индукции в точке (0.4,0.45,0.51) от свойств среды

	Однородная среда	Диагональный тензор
$B_x$	-6.93195E-11	-7.83089E-11
$B_y$	1,41312E-10	1.59662E-10
$B_z$	6.11882E-16	7.4863E-16
	Плотный тензор( $\theta = 0^\circ$ )	Плотный тензор( $\theta = 30^\circ$ )
$B_x$	-7.83089E-11	-6.37479E-11
$B_y$	1.59662E-10	1.47578E-10
$B_z$	7.4863E-16	-3.37745E-12
	Плотный тензор( $\theta = 60^\circ$ )	Плотный тензор( $\theta = 90^\circ$ )
$B_x$	-5.4183E-11	-5.149144E-11
$B_y$	1.45044E-10	1.5185E-10
$B_z$	-6.87381E-12	-9.73255E-12

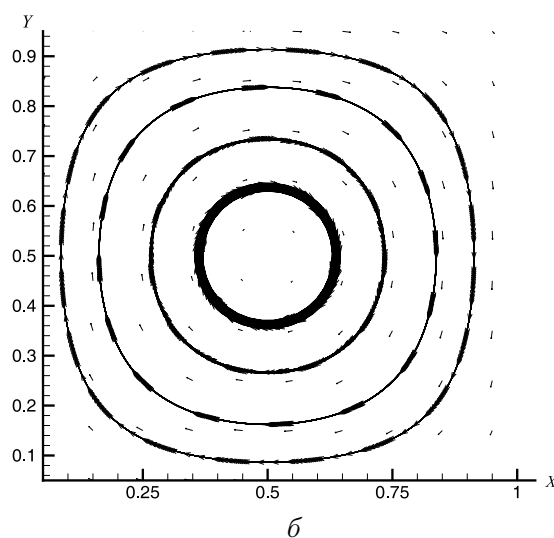
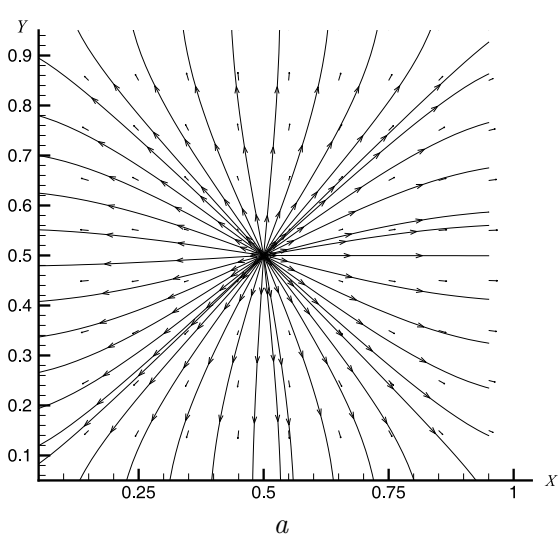


Рис. 5. Горизонтальные компоненты электрического поля ( $E_x, E_y$ ) (а) и магнитной индукции ( $B_x, B_y$ ) (б) в сечении  $z = 0.51$ .

Расчетная область представляет собой полупространство с анизотропными свойствами,  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma_{\text{воздух}} = 10^{-6} \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$ ,  $\sigma_{\text{земля}}$  — тензор вида

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix},$$

где  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0.1$ ,  $\sigma_{zz} = 0.5\sigma_{xx}$ , или

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \cos \theta & 0 & -\sigma_{zz} \sin \theta \\ 0 & \sigma_{yy} \cos \theta & -\sigma_{zz} \sin \theta \\ -\sigma_{xx} \sin \theta & -\sigma_{yy} \sin \theta & \sigma_{zz} \cos \theta \end{bmatrix},$$

где  $\theta = 0, 30, 60, 90^\circ$ . В табл. 4 и 5 представлены значения компонент электрического поля и магнитной индукции в точке (0.4, 0.45, 0.51) на 1000-м шаге по времени. На рис. 5 показаны силовые линии в горизонтальном сечении  $z = 0.51$ .

## Список литературы

- [1] NIPTMAIR R. Multilevel Preconditioning for Mixed Problems in Three Dimensions: Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Mathematisch. Naturwissenschaftlichen Fakultät at der Universität at Augsburg, Augsburg, 1996. 145 p.
- [2] NEDELEC J.C. Mixed finite elements in  $R^3$  // Numer. Mathematik. 1980. Vol. 35, N 3. P. 315–341.
- [3] NEDELEC J.C. A new family of mixed finite elements in  $R^3$  // Numer. Mathematik. 1986. Vol. 50. P. 57–81.
- [4] RAVIART A., THOMAS J.M. A mixed finite element method for 2-d order elliptic problems. Mathematical aspects of finite elements // Proc. of the Conf. Held in Rome, 10–12, Dec. 1975 / A. Dold, B. Eckman (Eds). Heidelberg, N.Y.: Spinger-Verlag, Berlin, 1977. P. 292–315 (Lecture Notes in Mathematics. Vol. 606).
- [5] BOSSAVIT A. Differential Geometry for the Students of Numerical Methods in Electromagnetism. Électricité de France, Études et Recherchers, Aug., 1991.
- [6] WHITE D.A. Discrete Time Vector Finite Element Methods for Solving Maxwell's Equations on 3D Unstructured Grids: PhD Thesis, Lawrence Livermore National Laboratory, Sept., 1997. 245 p.
- [7] GRADINARU V., NIPTMAIR R. Multigrid for discrete differential forms on sparse grids // Computing. 2003. Vol. 71. P. 17–42.
- [8] АБРАМОВ А.А. Введение в тензорный анализ и риманову геометрию. М.: Физматлит, 2004.
- [9] NIPTMAIR R. Discrete Hodge-operators: an algebraic perspective // Progress in Electromagnetics Research, PIER 32. 2001. P. 247–269.
- [10] КОРН Г., КОРН Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973.
- [11] ARULIAN D.A. Fast Solvers for Time-Harmonic Maxwell's Equations in 3D: PhD Thesis, The University of British Columbia, Aug., 2001. 160 p.

*Поступила в редакцию 1 марта 2006 г.*