Вычислительные технологии **Том 11, № 4, 2006**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ КОНВЕКЦИИ В МАНТИИ ЗЕМЛИ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЯВНОГО МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ

В. В. Червов
Институт геологии и минералогии СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: `chervov@ist.nsc.ru`

Based on the method of implicit splitting over the physical processes a numerical model of 3-D convection in the Earth mantle has been constructed. The results of some numerical experiments are presented.

Введение

Исследование конвекции в недрах Земли является одной из центральных задач геофизики. Работы в этом направлении, выполненные в последние годы (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]), значительно расширили наши представления о строении и составе недр. С развитием возможностей вычислительной техники в 90-х годах стали появляться трехмерные математические модели тепловой конвекции [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. Так, можно выделить работы В.П. Трубицына с соавторами [10, 14, 15, 16], охватывающие широкий класс прикладных проблем геотектоники. При решении трехмерных задач гидродинамики используется целый ряд подходов, основанных на применении как уравнений в естественных переменных, так и в векторных переменных $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{\omega}$ [24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

Подобные подходы могут быть обобщены и на случай задач конвекции. Подход с использованием трехмерных векторов завихренности и потенциала успешно применен, в частности, в работе [24], где с применением уравнений Навье — Стокса в приближении Обербека — Буссинеска рассматривалось течение, вызванное градиентами температуры и концентрации в поле силы тяжести в прямоугольном параллелепипеде. Для решения применялись разнесенные сетки с размещением физических величин в различных местах вычислительной ячейки, что позволило обеспечить консервативность для завихренности на дискретном уровне.

В работе [17] приведены тесты трехмерной конвекции, представленные данные получены в результате применения различных методов. В частности, Кристенсен (Christensen) применил гибридный спектрально-конечно-разностный метод и использовал скалярный потенциал для описания течения; Огава (Ogava) применил конечно-разностный метод для переменных скорость — давление; температура вычислялась неявным конечно-разностным методом. Результаты трехмерного тестирования в переменных $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\omega}$ можно найти в работах [18, 19, 20, 21, 22, 23]. Однако постановка граничных условий в переменных $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\omega}$ для задач, связанных с движением вещества через границы (например, для задачи протекания) сопряжена со значительными трудностями, преодолевая которые приходится отказываться от тождественного соблюдения уравнения неразрывности [27, 28, 29, 30, 31], что сводит на нет преимущества такого подхода.

Выходом из ситуации может быть применение естественных переменных, но с требованием соблюдения закона неразрывности либо тождественного, либо настолько точного, насколько позволяют ошибки применяемых аппроксимаций для входящих уравнений. Несмотря на то что естественные переменные достаточно широко используются в практике расчетов конвективных течений в мантии Земли, в известных автору работах отсутствует детальный численный экспериментальный анализ сходимости численных моделей, в частности, нет результатов сопоставления с хорошо известным международным тестом [17].

Весьма популярным является в настоящее время метод расщепления по физическим процессам [25, 26, 27, 28, 29].

В настоящей работе продолжено тестирование задачи конвекции, предложенной авторами статьи [17]. В работах [18, 19, 20, 21, 22, 23] с использованием подхода в переменных вектор завихренности — векторный потенциал продемонстрировано хорошее согласие с тестами в [17]. С применением метода расщепления по физическим процессам получены результаты, не уступающие по точности найденным ранее с применением $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\omega}$-подхода. Решена модельная задача протекания мантийного вещества через вертикальные границы.

1. Математическая постановка задачи

Для описания течений в верхней мантии Земли привлекается хорошо известная математическая модель, включающая в себя обезразмеренные уравнения [5]:

$$\begin{aligned}
&\nabla \mathbf{V} = 0,\\
&\nabla p = \mathbf{F} + \mathrm{Ra} T \mathbf{g},\\
&\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla T = \nabla^2 T.
\end{aligned}$$

Здесь p — давление; T — температура; t — время; $\mathrm{Ra} = \dfrac{\alpha \rho g_z d^3 \Delta T}{\eta_0 \chi}$ — число Рэлея; $\mathbf{V}$ — вектор скорости; $\mathbf{g} = (0, 0, -g_z)$, g_z — ускорение силы тяжести; d — вертикальный размер конвектирующей области; $\Delta T = T_{\max} - T_{\min}$; χ — температуропроводность; α — коэффициент теплового расширения; ρ, η — характерные плотность и динамическая вязкость; $\mathbf{F}$ — вектор скорости:

$$\begin{aligned}
F_x &= 2\frac{\partial}{\partial x}\eta\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
F_y &= \frac{\partial}{\partial x}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\eta\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
F_z &= \frac{\partial}{\partial x}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\frac{\partial}{\partial z}\eta\frac{\partial w}{\partial z},
\end{aligned}$$

где $u,\ v,\ w$ — компоненты вектора скорости.

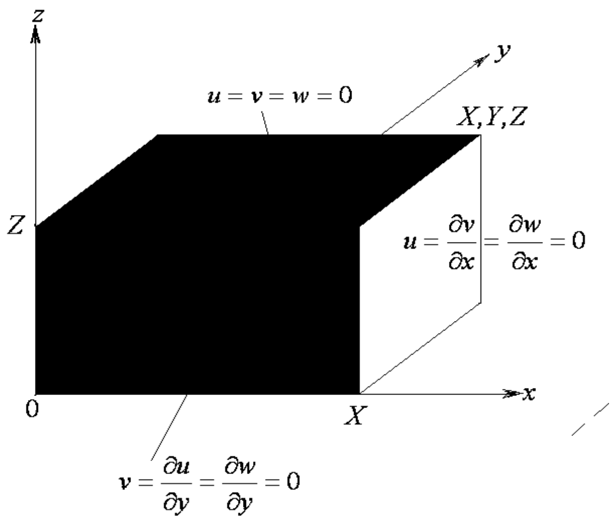

Рис. 1. Граничные условия для вектора скорости в параллелепипеде: на вертикальных гранях — условия проскальзывания, на горизонтальных плоскостях — условия прилипания.

Система уравнений устроена так, что в начальный момент времени $t = \tau_0$ задаются начальные условия лишь для температуры: $T(x, y, z, \tau_0) = T_0(x, y, z)$ [32]. Простейшей областью интегрирования является параллелепипед (рис. 1).

Для вектора скорости на боковых границах задаются условия проскальзывания, а на нижней и верхней гранях — условия прилипания:

— на поверхностях $x = 0$, $x = X$ $(0 \leqslant y \leqslant Y,\ 0 \leqslant z \leqslant 1)$:

$$u = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

— на поверхностях $y = 0$, $y = Y$ $(0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant z \leqslant 1)$:

$$v = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0;$$

— на поверхностях $z = 0$, $z = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y \leqslant Y)$:

$$u = v = w = 0.$$

Для температуры, как и в [17], на боковых гранях ставятся условия теплоизоляции (адиабатическая стенка), т. е. первые производные на вертикальных стенках равны нулю. На верхней и нижней гранях ставятся условия Дирихле: нулевая температура на верхней и некоторая фиксированная температура (в безразмерных уравнениях равная единице) на нижней:

— на поверхностях $x = 0$, $x = X$ $(0 \leqslant y \leqslant Y,\ 0 \leqslant z \leqslant 1)$: $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0;$

— на поверхностях $y = 0$, $y = Y$ $(0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant z \leqslant 1)$: $\dfrac{\partial T}{\partial y} = 0;$

— на поверхности $z = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y \leqslant Y)$: $T = 0;$

— на поверхности $z = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y \leqslant Y)$: $T = 1.$

Численная модель трехмерных течений в естественных переменных

Для построения численной модели в случае естественных переменных применялся метод установления с использованием неявной схемы расщепления по физическим процессам [25, 26, 27, 28] и метода дробных шагов [33]:

$$\frac{\tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{V}^n}{\tau} = \tilde{\mathbf{F}} - \nabla p^n + \mathrm{Ra}\, T^n \mathbf{g}; \tag{1}$$

$$\nabla^2 (\delta p) = \frac{\nabla \tilde{\mathbf{V}}}{\tau}, \tag{2}$$

где $\delta p = p^{n+1} - p^n$;

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \tilde{\mathbf{V}}}{\tau} = -\nabla (\delta p); \tag{3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \left(\mathbf{V}^{n+1} T\right) = \nabla^2 T. \tag{4}$$

Численная реализация (1)–(4) включает в себя следующие этапы.

1. В исследуемой области задается начальное распределение температуры, удовлетворяющее граничным условиям. Компоненты скорости полагаются нулевыми.

2. Из векторного уравнения (1) находится промежуточное поле скорости $\tilde{\mathbf{V}}$.

3. Рассчитываются поле разности давлений и давление по (2).

4. Из (3) получается окончательное поле скорости.

5. Путем решения (4) вычисляется поле температуры.

Процесс повторяется до некоторого значения $t = n\tau$.

В задаче использовалась разнесенная сетка, в которой давление, вязкость и температура определялись в центре элементарного объема, компоненты вектора скорости — в центрах плоскостей ячеек: u — в центре плоскости YZ, v — в центре плоскости XZ, w — в центре плоскости XY. В декартовой системе координат равномерную сетку можно задать в виде

$$\Omega = \begin{cases} x_I = (I-1/2)\Delta x, & \Delta x > 0, \quad I = 0,1,...,M, \quad (M-1)\Delta x = X, \\ y_J = (J-1/2)\Delta y, & \Delta y > 0, \quad J = 0,1,...,N, \quad (N-1)\Delta y = Y, \\ z_K = (K-1/2)\Delta z, & \Delta z > 0, \quad K = 0,1,...,L, \quad (L-1)\Delta z = Z, \end{cases} \tag{5}$$

где Δx, Δy, Δz — размеры шагов сетки; M, N, L — число ячеек сетки в направлениях x, y и z.

Для реализации (1) использовалась схема стабилизирующей поправки. Для вектора скорости на примере x-компоненты u-схема выглядит так:

$$\begin{aligned} &\frac{\tilde{u}^{n+1/3} - u^n}{\tau} = L_{11}\tilde{u}^{n+1/3} + L_{22}u^n + L_{33}u^n + L_{21}v^n + L_{31}w^n - L_1 p^n, \\ &\frac{\tilde{u}^{n+2/3} - \tilde{u}^{n+1/3}}{\tau} = L_{22}\left(\tilde{u}^{n+2/3} - u^n\right), \\ &\frac{\tilde{u}^{n+1} - \tilde{u}^{n+2/3}}{\tau} = L_{22}\left(\tilde{u}^{n+1} - u^n\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь использованы стандартные аппроксимации [36]:

$$L_{11} \sim 2\frac{\partial}{\partial x}\eta\frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{22} \sim \frac{\partial}{\partial y}\eta\frac{\partial}{\partial y}, \quad L_{33} \sim \frac{\partial}{\partial z}\eta\frac{\partial}{\partial z},$$
$$L_{21} \sim \frac{\partial}{\partial y}\eta\frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{31} \sim \frac{\partial}{\partial z}\eta\frac{\partial}{\partial x}, \quad L_{1} \sim \frac{\partial}{\partial x}.$$

Для v и w конечно-разностное представление аналогично (6).

Для наглядности численной схемы в работе применены индексы, удобные для последующего переноса в компьютерную программу. В центре элементарного объема, где определяются скалярные поля температуры T, вязкости η и давления p, индексы — прописные латинские буквы: I, J, K. На гранях — индексы i, j, k (рис. 2). Таким образом, между I и $I+1$ находится индекс $i+1$, между j и $j+1$ находится индекс J, а между $K-1$ и K — индекс k. Например, вместо общепринятой записи $u_{i+\frac{1}{2},j,k-1}$ становится удобной запись $u_{i+1,J,K-1}$, так как в общепринятой записи точка i, j, k находится в центре ячейки (рис. 3).

Граничные условия для вычислений разности давлений являются следствием условий для уравнения (9). Так как граничные условия для $\mathbf{V}^{n+1}$ и $\tilde{\mathbf{V}}$ совпадают, решается задача Неймана с однородными граничными условиями. Метод решения задачи Неймана основан

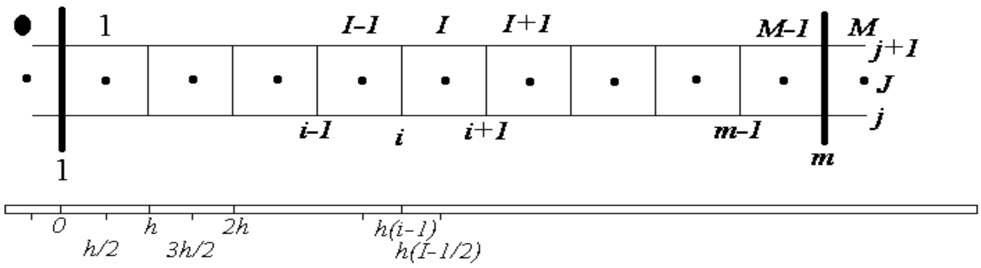

Рис. 2. Местонахождение индексов по направлению X. В нижней части рисунка — шкала расстояний.

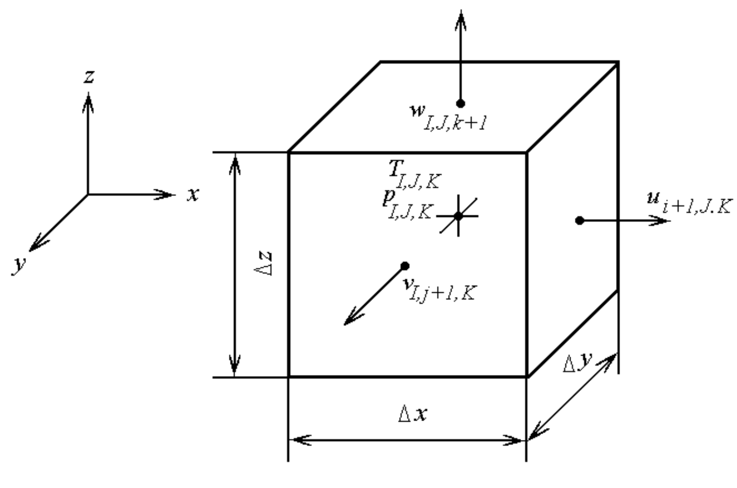

Рис. 3. Сеточный шаблон для метода расщепления. В центре ячейки, кроме давления и температуры, вычисляется и вязкость $\eta_{I,J,K}$.

на приеме, предложенном в книге [34]:

$$G_{I,J,K} = G^{s+1}_{I,J,K} - \frac{\sum\limits_{\Omega} G^{s+1}_{I,J,K}}{MNL},$$

где Ω — область определения индексов; $G = \delta p$ — разность давлений; s — индекс внутренних итераций; G^{s+1} — промежуточное значение разности давлений; произведение MNL — количество ячеек в области.

Численная реализация (3) выполнялась следующим образом:

$$u^{n+1}_{i,J,K} = \tilde{u}^{n+1}_{i,J,K} - \tau \frac{G_{I,J,K} \overset{i}{-} G_{I-1,J,K}}{h_x},$$

$$v^{n+1}_{I,j,K} = \tilde{v}^{n+1}_{I,j,K} - \tau \frac{G_{I,J,K} \overset{j}{-} G_{I,J-1,K}}{h_y},$$

$$w^{n+1}_{I,J,k} = \tilde{w}^{n+1}_{I,J,k} - \tau \frac{G_{I,J,K} \overset{k}{-} G_{I,J,K-1}}{h_z}.$$

Индексы над знаком "минус" в формулах демонстрируют связь "больших" и "малых" индексов.

После вычислений скорости следует расчет температуры либо по схеме стабилизирующей поправки, либо по схеме предиктор-корректор, основанной на схеме стабилизирующей поправки:

$$\frac{T^{n+1/6} - T^n}{\tau} = \Lambda_{11} T^{n+1/6} + \Lambda_{22} T^n + \Lambda_{33} T^n,$$

$$\frac{T^{n+2/6} - T^{n+1/6}}{\tau} = \Lambda_{22}(T^{n+2/6} - T^n),$$

$$\frac{T^{n+3/6} - T^{n+2/6}}{\tau} = \Lambda_{33}(T^{n+3/6} - T^n),$$

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} = \Lambda_{11} T^{n+1/6} + \Lambda_{22} T^{n+2/6} + \Lambda_{33} T^{n+3/6}.$$

Здесь

$$\Lambda_{11} T \sim \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(u^n T); \quad \Lambda_{22} T \sim \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}(v^n T); \quad \Lambda_{33} T \sim \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z}(w^n T).$$

Численная реализация вычислений температуры осуществлялась так:

$$T^{n+1/3}_{I,J,K} + \frac{\tau_t}{h_x}\left(u_{i+1,J,K} T^{n+1/3}_{i+1,J,K} - u_{i,J,K} T^{n+1/3}_{i,J,K}\right) - \frac{\tau_t}{h_x^2}(T^{n+1/3}_{I+1,J,K} - 2T^{n+1/3}_{I,J,K} + T^{n+1/3}_{I-1,J,K}) =$$

$$= T^n_{I,J,K} - \frac{\tau_t}{h_y}\left(v_{I,j+1,K} T^n_{I,j+1,K} - v_{I,j,K} T^n_{I,j,K}\right) + \frac{\tau_t}{h_y^2}(T^n_{I,J+1,K} - 2T^n_{I,J,K} + T^n_{I,J-1,K}) -$$

$$- \frac{\tau_t}{h_z}\left(w_{I,J,k+1} T^n_{I,J,k+1} - w_{I,J,k} T^n_{I,J,k}\right) + \frac{\tau_t}{h_z^2}(T^n_{I,J,K+1} - 2T^n_{I,J,K} + T^n_{I,J,K-1}),$$

$$T^{n+2/3}_{I,J,K} + \frac{\tau_t}{h_y}\left(v_{I,j+1,K}T^{n+2/3}_{I,j+1,K} - v_{I,j,K}T^{n+2/3}_{I,j,K}\right) - \frac{\tau_t}{h_y^2}(T^{n+2/3}_{I,J+1,K} - 2T^{n+2/3}_{I,J,K} + T^{n+2/3}_{I,J-1,K}) =$$

$$= T^{n+1/3}_{I,J,K} + \frac{\tau_t}{h_y}\left(v_{I,j+1,K}T^{n}_{I,j+1,K} - v_{I,j,K}T^{n}_{I,j,K}\right) - \frac{\tau_t}{h_y^2}(T^{n}_{I,J+1,K} - 2T^{n}_{I,J,K} + T^{n}_{I,J-1,K}),$$

$$T^{n+1}_{I,J,K} + \frac{\tau_t}{h_z}\left(w_{I,J,k+1}T^{n+1}_{I,J,k+1} - w_{I,J,k}T^{n+1}_{I,J,k}\right) - \frac{\tau_t}{h_z^2}(T^{n+1}_{I,J,K+1} - 2T^{n+1}_{I,J,K} + T^{n+1}_{I,J,K-1}) =$$

$$= T^{n+2/3}_{I,J,K} + \frac{\tau_t}{h_z}\left(w_{I,J,k+1}T^{n}_{I,J,k+1} - w_{I,J,k}T^{n}_{I,J,k}\right) - \frac{\tau_t}{h_z^2}(T^{n}_{I,J,K+1} - 2T^{n}_{I,J,K} + T^{n}_{I,J,K-1}).$$

Так как температура вычислялась в центрах ячеек (I, J, K), для интерполяции в точки (i, J, K) находящихся в центрах граней ячеек привлекались следующие трехточечные выражения (по направлению X):

$$T_{i,J,K} = T_{I,J,K} + \frac{1}{8}(3T_{I-1,J,K} - 2T_{I,J,K} - T_{I+1,J,K}),$$

$$T_{i+1,J,K} = T_{I,J,K} + \frac{1}{8}(3T_{I+1,J,K} - 2T_{I,J,K} - T_{I-1,J,K}).$$

Для направлений Y и Z — аналогичные представления.

На разнесенной сетке, горизонтальный разрез которой представлен на рис. 4, граничные условия прилипания вычислялись следующим образом. Пусть для вектора скорости $\mathbf{V}$ на границе $B1{-}B2$ заданы условия прилипания, т. е. $u = v = w = 0$. Тогда $u_{i,1,K} = -u_{i,0,K}$ и $w_{I,1,k} = -w_{I,0,k}$. Для компоненты v вычисления на границе не производятся, а переносятся в первую $(j = 1)$ точку массива, определенного в точке как $v(I, j, K)$.

Для представления условий Неймана на границе $B1 - B2$ можно воспользоваться следующими выражениями. Пусть на $B1 - B2$ поставлены условия $\partial u/\partial y = \partial v/\partial y = \beta$, тогда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \cong \frac{u_{i,1,K} - u_{i,0,K}}{h_y} = \beta \quad \Rightarrow \quad u_{i,1,K} = u_{i,0,K} + \beta h_y,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} \cong \frac{-3v_{I,1,K} + 4v_{I,2,K} - v_{I,3,K}}{2h_y} = \beta.$$

Определение массива $v(:,:,:)$ в ФОРТРАН-процедуре выглядит так: **real, dimension (0:M, 1:N, 0:L) :: v**.

Область определения Y-компоненты скорости v:

$$\Omega_v = \begin{cases} x_I = (I - 1/2)\Delta x, & \Delta x > 0, \quad I = 0, 1, ..., M, \quad (M-1)\Delta x = X, \\ y_j = (j-1)\Delta y, & \Delta y > 0, \quad j = 1, 2, ..., N, \quad (N-1)\Delta y = Y, \\ z_K = (K - 1/2)\Delta z, & \Delta z > 0, \quad K = 0, 1, ..., L, \quad (L-1)\Delta z = Z. \end{cases}$$

Массив $u(:,:,:)$, в свою очередь, определен внутренними точками и точками, лежащими на границе в направлении X, а также внутренними точками $(1 : N-1, 1 : K-1)$ и точками, лежащими за пределами границ в направлениях Y и Z $(0, N$ и $0, K)$.

Массив $u(i, J, K)$ в ФОРТРАН-процедуре: **real, dimension (1:M, 0:N, 0:L) :: u**.

Область определения X-компоненты скорости:

$$\Omega_u = \begin{cases} x_i = (i-1)\Delta x, & \Delta x > 0, \quad i = 1, 2, ..., M, \quad (M-1)\Delta x = X, \\ y_J = (J - 1/2)\Delta y, & \Delta y > 0, \quad j = 0, 1, ..., N, \quad (N-1)\Delta y = Y, \\ z_K = (K - 1/2)\Delta z, & \Delta z > 0, \quad K = 0, 1, ..., L, \quad (L-1)\Delta z = Z. \end{cases}$$

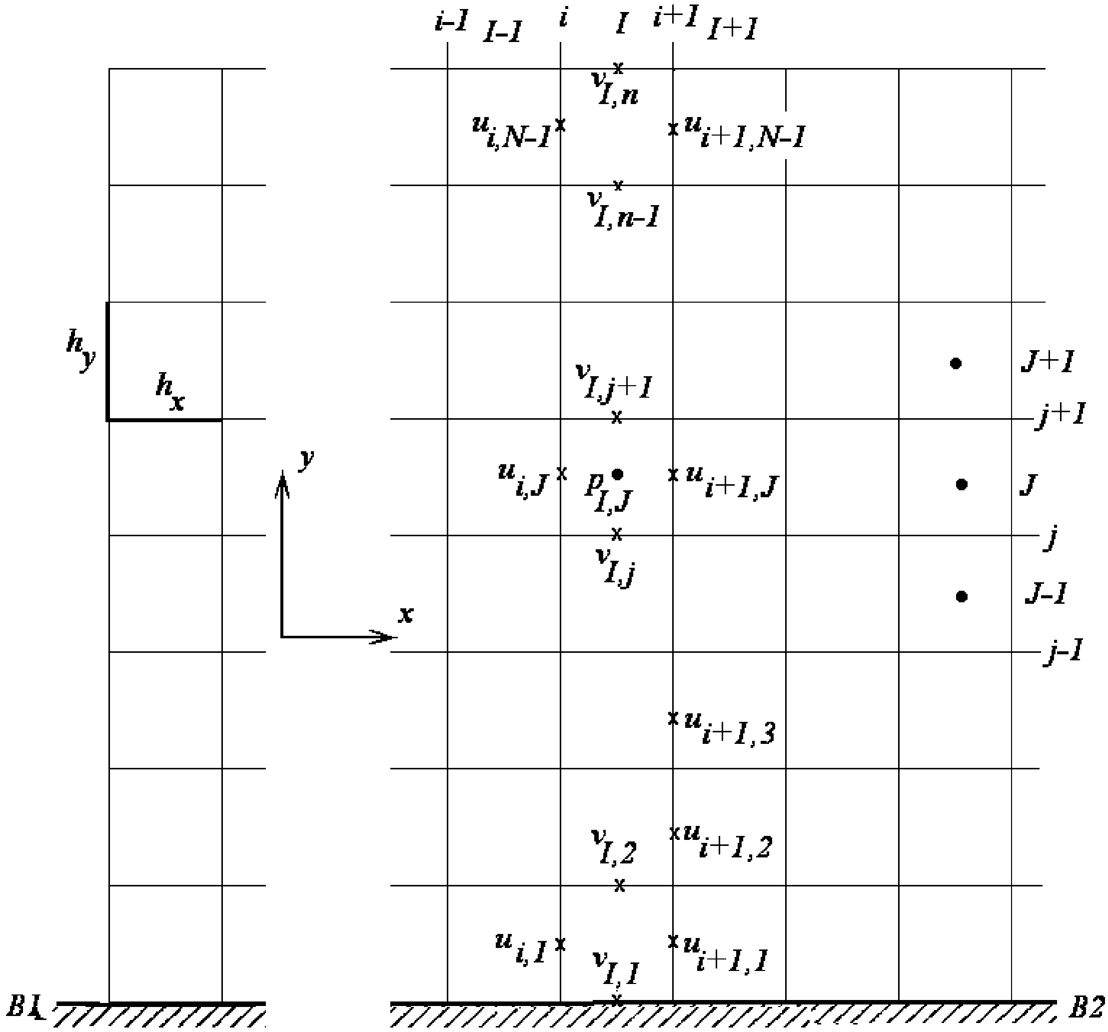

Рис. 4. Двумерная разнесенная сетка.

Массив $w(:,:,:)$ определен внутренними точками и точками, лежащими на границе в направлении Z, а также внутренними точками $(1:M-1, 1:N-1)$ и точками, лежащими за пределами границ в направлениях X и Y $(0, M$ и $0, N)$.

Массив $w(I, J, k)$ в ФОРТРАН-процедуре: **real, dimension (0:M, 0:N, 1:L) :: w**.

Область определения Z-компоненты скорости:

$$\Omega_w = \begin{cases} x_I = (I - 1/2)\Delta x, & \Delta x > 0, \quad I = 0, 1, ..., M, \quad (M-1)\Delta x = X, \\ y_J = (J - 1/2)\Delta y, & \Delta y > 0, \quad J = 0, 1, ..., N, \quad (N-1)\Delta y = Y, \\ z_k = (k-1)\Delta z, & \Delta z > 0, \quad k = 1, 2, ..., L, \quad (L-1)\Delta z = Z. \end{cases}$$

Область определения температуры, давления и вязкости на разнесенной сетке Ω приведена выше.

Массивы $T(I, J, K)$, $p(I, J, K)$ и $\eta(I, J, K)$ в ФОРТРАН-процедуре могут выглядеть так: **real, dimension (0:M, 0:N, 0:L) :: Therm, Press, Eta**.

2. Результаты расчетов

2.1. Модельная трехмерная задача конвекции в мантии Земли

Тестирование численной модели осуществлялось путем решения модельной задачи [17]. Для постоянной вязкости расчеты проводились при следующих значениях параметров: длина области $X = 1.0079$, ширина $Y = 0.6283$, высота $Z = 1.000$. Масштабный множитель при вязкости $\eta_0 = 8.0198 \cdot 10^{23}$, число Рэлея $\mathrm{Ra} = (\alpha g_z \rho d^3 \Delta T)/(\eta_0 \chi) = 3 \cdot 10^4$.

Решение для переменной вязкости отыскивалось в единичном кубе. При этом задавались следующие параметры: масштабный множитель при вязкости $\eta_0 = 1.2016510^{24}$, $\eta(T) = \exp\left[\theta/\left(T+\Theta\right)\right] - \left[\theta/\left(0.5+\Theta\right)\right]$, $\theta = [225/\ln(r)] - 0.25\ln(r)$, $\Theta = 15/\ln(r) - 0.5$; $r = \eta|_{T=0} / \eta|_{T=1} = 20$; $\mathrm{Ra} = (\alpha g_z \rho d^3 \Delta T)/(\eta_0 \chi) = 2 \cdot 10^4$.

Для решения задачи вводилась равномерная в каждом направлении сетка. Вычислялись следующие параметры:

— среднеквадратичная скорость

$$V_{rms} = \sqrt{\left\{ \frac{1}{XYZ} \iiint\limits_A (u^2 + v^2 + w^2) dxdydz \right\}},$$

где A — объем параллелепипеда со сторонами X, Y и Z;

— число Нуссельта [35]

$$\mathrm{Nu} = -(XY)^{-1} \iint\limits_{S_{\mathrm{top}}} \frac{\partial T}{\partial z} dxdy,$$

где S_{top} — верхняя поверхность параллелепипеда;

— значения вертикальной компоненты скорости w и температуры T в угловых точках среднего сечения конвективного слоя;

— значения теплового потока $\vartheta = -\partial T/\partial z$ в угловых точках верхней поверхности куба;

— интегральный параметр, вычисляемый по формуле $\tau(x,z) = \int\limits_0^Y \frac{\partial T}{\partial z} dy$ вдоль линии, параллельной оси y, начинающейся точками $(0, 0.25), (0.5, 0.25), (1, 0.25)$ фронтальной (xz)-плоскости;

— средняя температура $T_m = \iint\limits_{S_z} T dxdy$, вычисляемая на горизонтальных сечениях области $S_{z=0.75}$ и $S_{z=0.50}$, на глубинах $z = 0.75$ и $z = 0.5$;

— значение вертикальной компоненты вектора завихренности ω^z в точке $(0.75, 0.25, 0.75)$.

— значения z — отклонения свободной поверхности Земли от геоида в угловых точках верхней поверхности куба.

Интегралы вычислялись с применением квадратурной формулы трапеций. Размерные значения (в системе СИ), которые использованы в [17] и в настоящей работе, принимались следующими:

$$d = 2\,700\,000,\ \Delta T = 3700, \chi = 10^{-6}, \alpha = 10^{-5}, \rho = 3300, g_z = 10.$$

В качестве начального распределения температуры выбиралось: $T(x,y,z,t_0) = T_0(x,y,z) = (1-z) + 0.2(\cos(\pi x/X_{\max}) + \cos(\pi y/Y_{\max}))\sin(\pi z)$.

Результаты расчетов автора (Che) сопоставлялись с данными Кристенсена (Chr) как наиболее полными из имеющихся в статье [17] (табл. 1 и 2). Относительная ошибка вычислялась по формуле

$$\mathrm{Err} = \left|\frac{\mathrm{Che} - \mathrm{Chr}}{\mathrm{Chr}}\right| 100\,\%.$$

Таблица 1. Постоянная вязкость. Разнесенная сетка. Расщепление в естественных переменных. Консервативная запись всех уравнений. Сравнение решений на двух сетках: $32 \times 32 \times 31$ и $40 \times 40 \times 39$

Параметр	Chr на сетке $32 \times 32 \times 64$	Che на сетке $32 \times 32 \times 31$	Err, %	Che на сетке $40 \times 40 \times 39$	Err, %
Nu	3.544	3.61954	2.09408	3.59152	1.33025
V_{rms}	41.00	42.0322	2.45759	41.7962	1.90679
$T(0,0,1/2)$	0.8013	0.804283	0.370930	0.803227	0.239961
$T(0,Y,1/2)$	0.6188	0.615735	0.492899	0.616842	0.312575
$w(0,0,1/2)$	116.6	119.297	2.23934	118.474	1.56013
$w(0,Y,1/2)$	40.50	40.2506	0.617252	40.5227	0.05840
$\tau(0,0)$	−0.3647	−0.376761	3.19340	−0.374129	2.51234
$\tau(X/2,0)$	−0.1292	−0.133626	3.33575	−0.133331	3.12150
$\tau(X,0)$	−0.1104	−0.114614	3.69378	−0.114572	3.65906
$T_m(3/4)$	0.5215	0.522466	0.190724	0.522106	0.121788

Таблица 2. Переменная вязкость. Разнесенная сетка. Расщепление в естественных переменных. Консервативная запись всех уравнений

№	Параметр	Chr на сетке $32 \times 32 \times 64$	Che на сетке $40{\times}40 \times 39$	Err, %
1	Nu	3.03927	3.06762	0.923070
2	V_{rms}	35.132	35.7431	1.71517
3	$w(0,0,1/2)$	165.91	168.643	1.62675
4	$w(0,Y,1/2)$	−26.72	−26.8058	0.320045
5	$w(X,Y,1/2)$	−58.23	−59.4940	2.12457
6	$T(0,0,1/2)$	0.90529	0.906780	0.164324
7	$T(0,Y,1/2)$	0.49565	0.499292	0.729343
8	$T(X,Y,1/2)$	0.23925	0.242436	1.31425
9	ϑ(0,0)	5.83390	5.83800	0.0702432
10	ϑ(0,Y)	1.71360	1.72633	0.737409
11	ϑ(X,Y)	0.7684	0.773319	0.636027
12	$\tau(0,1/4)$	−0.5059	−0.504619	0.253836
13	$\tau(X/2,1/4)$	−0.1921	−0.196761	2.36874
14	$\tau(X,1/4)$	−0.1388	−0.140683	1.33857
15	$T_m(3/4)$	0.56593	0.570469	0.795663
16	$T_m(1/2)$	0.58158	0.583488	0.326939
17	$z(0,0,1/2)$	10869.0	10577.7	2.75416
18	$z(0,Y,1/2)$	−4145.00	−3918.71	5.77470
19	$z(X,Y,1/2)$	−12811.0	−12345.0	3.77509
20	$\omega^z(3/4,1/4,3/4)$	−11.125	−10.9630	1.47801

Можно видеть, что результаты расчетов настоящей работы достаточно близки к результатам [17], что свидетельствует о высокой эффективности численной модели.

2.2. Задача протекания

Рассмотрена задача протекания верхнемантийного вещества в кубической области, размеры которой $700 \times 700 \times 700$ км. Число Рэлея, характеризующее режим конвекции, выбрано как $\mathrm{Ra} = 2.037 \cdot 10^5$, что также отвечает современным представлениям об условиях в недрах Земли. Основные параметры задачи в системе СИ, пригодные для верхней мантии, полагались следующими:

$$d = 700\,000\,\text{м},\ \Delta T = 1800\,°\text{C},\ \chi = 10^{-6}\,\text{м}^2/\text{c},\ \alpha = 10^{-5}\,°\text{C}^{-1},$$
$$\rho = 3300\,\text{кг}/\text{м}^3,\ g_z = 10\,\text{м}/\text{c}^2,\ \eta_0 = 310^{21}\,\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{c}).$$

Зависимость вязкости от температуры и глубины выражена формулой

$$\eta(x, y, z, t) = e^{bz - aT(x,y,z,t)}.$$

Здесь параметры $a = 3.89$ и $b = 5.84$ обеспечивают перепад вязкости от 20 до 200, что присуще верхнемантийным характеристикам течений: $r = \eta_{\max}/\eta_{\min} \cong 20\ldots200$. Скорость на граничной плоскости YZ в точках, где $x = 0$, равнялась 2 см/год: $u|_{\text{in}} = u_0 =$

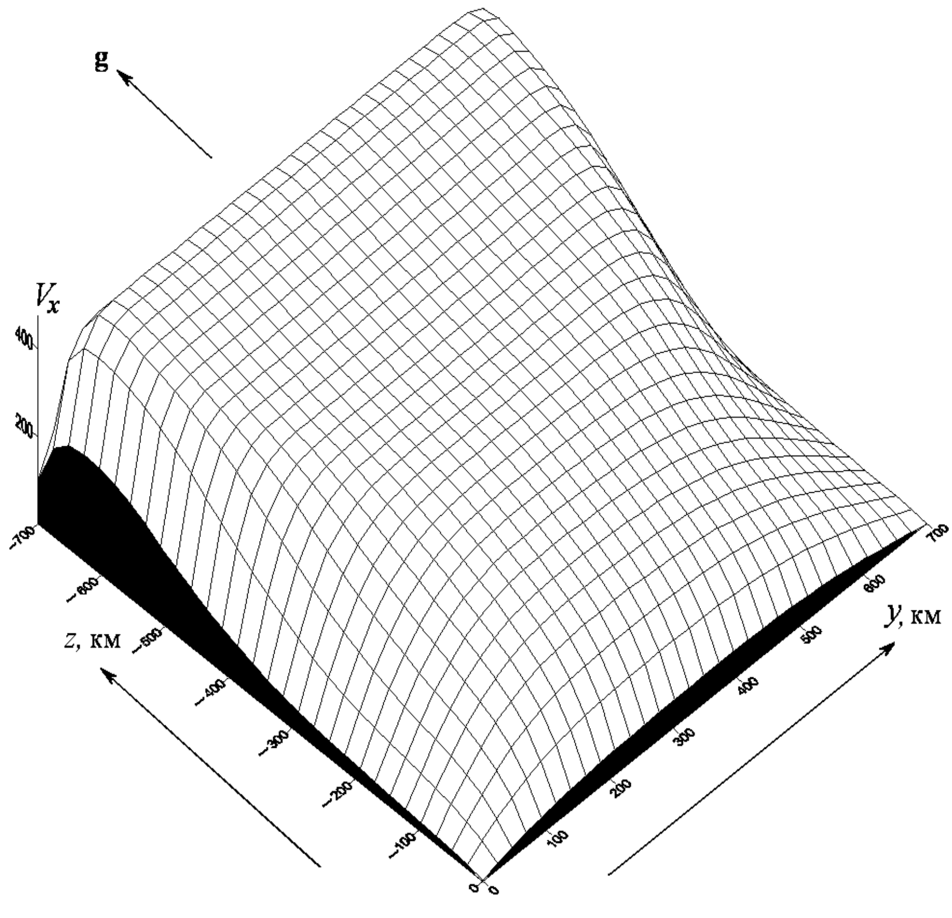

Рис. 5. Профиль скорости $u = V_x$ через плоскость yz ($x = X = 700$ км). На вертикальной оси приведены безразмерные значения скорости.

2 см/год = 312.5 безразмерных единиц; $v|_{\text{in}} = w|_{\text{in}} = 0$. На выходной границе YZ в точках, где $x = 700$ км, задавались "мягкие" условия "свободного" протекания [27, 28]:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\text{out}} = -\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]_{\text{out}}; \quad \left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{\text{out}} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_{\text{out}} = 0.$$

На остальных гранях для вектора скорости задавались нулевые условия прилипания. Условия по температуре (как и в задаче тестирования) в безразмерных единицах:

— на боковых границах $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = 0$;

— на подошве верхней мантии $T = 1$;

— на дневной поверхности $T = 0$.

Профиль горизонтальной скорости u на выходной границе через $t = 50\tau$ представлен на рис. 5.

Автор выражает благодарность профессору, д. ф.-м. н. Г.Г. Черных за помощь при постановке задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Алексеев А.С., Лаврентьев М.М., Мухометов Р.Г. и др. Численный метод определения структуры верхней мантии Земли // Мат. пробл. геофизики. 1971. Вып. 2. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. С. 143–165.

[2] Алексеев А.С., Рябой В.З. Модель строения верхней мантии по объемным сейсмическим волнам // Строение земной коры и верхней мантии по данным сейсмических исследований. Киев: Наук. думка, 1977. С. 67–82.

[3] Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г. Глубинная геодинамика. Новосибирск: НИЦ ОИГГМ СО РАН, 1994.

[4] Добрецов Н.Л. Пермско-триасовый магматизм и осадконакопление в Евразии как отражение суперплюма // Докл. РАН. 1997. Т. 354. С. 220–223.

[5] Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А. Глубинная геодинамика. 2-е изд. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 409 с.

[6] Трубицын В.П., Фрадков А.С. Конвекция под континентами и океанами // Физика Земли. 1985. № 7. С. 3–13.

[7] Трубицын В.П., Бобров А.М., Кубышкин В.В. Влияние континентальной литосферы на структуру мантийной тепловой конвекции // Физика Земли. 1993. № 5. С. 3–11.

[8] Трубицын В.П., Рыков В.В., Трубицын А.П. Конвекция и распределение вязкости в мантии // Физика Земли. 1997. № 3. С. 3–10.

[9] Трубицын В.П., Рыков В.В. Механизм формирования наклонных зон субдукции // Физика Земли. 1997. № 6. С. 3–14.

[10] Трубицын В.П. Основы тектоники плавающих континентов // Физика Земли. 2000. № 9. С. 3–40.

[11] Dubuffet F., Rabinowicz M., Monnereau M. Multiple scales in mantle convection // Earth Planet. Sci. Lett. 2000. Vol. 178. P. 351–366.

[12] Ratcliff J.T., Tackley P.J., Schubert G., Zebib A. Transitions in thermal convection with strongly variable viscosity // Phys. Earth Planet. Intern. 1997. Vol. 102. P. 201–212.

[13] Tackley P.J. Effects of strongly variable viscosity on three-dimensional compressible convection in planetary mantles // J. Geophys. Res. 1996. Vol. 101. P. 3311–3332.

[14] Рыков В.В., Трубицын В.П. Численное моделирование трехмерной мантийной конвекции и тектоника литосферных плит // Вычисл. сейсмология. 1994. Вып. 26. С. 94–102.

[15] Рыков В.В., Трубицын В.П. Трехмерная модель мантийной конвекции с движущимися континентами // Вычисл. сейсмология. 1994. Вып. 27. С. 21–41.

[16] Trubitsyn V.P., Rykov V.V. A 3D numerical model of the Wilson cycle // J. Geodynam. 1996. Vol. 20. P. 63–75.

[17] Busse F.H., Christensen U., Clever R. et al. 3D convection at infinite Prandl number in Cartesian geometry — a benchmark comparison // Geophiys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1993. Vol. 75. P. 39–59.

[18] Червов В.В. Численное моделирование трехмерных задач конвекции в мантии Земли с применением завихренности и векторного потенциала // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 1. С. 114–125.

[19] Червов В.В. Численное моделирование трехмерных задач конвекции в мантии Земли с применением последовательности сеток. // Вычисл. технологии. 2002. Т. 7, № 3. С. 85–92.

[20] Тычков С.А., Червов В.В., Черных Г.Г. Численная модель трехмерной конвекции в верхней мантии Земли // Selected Papers of the Intern. Conf. “Fluxes and Structures in Fluids”. St. Petersburg, Russia, June 23–26, 2003. M.: IPM RAS, 2004. P. 238—241.

[21] Тычков С.А., Червов В.В., Черных Г.Г. О численном моделировании тепловой конвекции в мантии Земли // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 2. С. 248–254.

[22] Tychkov S.A., Chervov V.V., Chernykh G.G. Numerical modeling of 3D convection in the Earth mantle // Russ. J. Numer. Anal. Modelling. 2005. Vol. 20, N 5. P. 483–500.

[23] Тычков С.А., Червов В.В., Черных Г.Г. Численная модель трехмерной конвекции в верхней мантии Земли // Физика Земли. 2005. № 5. С. 48–64.

[24] Бессонов О.А., Брайловская В.А., Полежаев В.И. Пространственные эффекты конвекции в расплавах: концентрационные неоднородности, возникновение несимметрии и колебания // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 3. С. 74–82.

[25] Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984.

[26] Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Л.: Гидрометеоиздат, 1986.

[27] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 т. М.: Мир, 1990.

[28] Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. В 2 т. М.: Мир, 1991.

[29] Voevodin A.F., Goncharova O.N. Method of splitting for physical processes for computation of convection problems in closed domains // Intern. Conf. on Comp. Math. ICCM-2004. 21–25 June, 2004, Novosibirsk, Russia. Books of Proc. P. 942–947.

[30] Aziz K., Hellums J.D. Numerical solution of the three-dimensional equations of motion for laminar natural convection // Phys. Fluids. 1967. Vol. 10, N 2. P. 314–324.

[31] Hirasaki G.J., Hellums J.D. Boundary condition on the vector and scalar potential in viscous three-dimensional hydrodynamics // Quarterly of Appl. Math. 1970. July. P. 293–296.

[32] Федорюк М.В. Характеристики течений несжимаемой жидкости в гравитационном поле // Мат. сб. 1988. Т. 137(179), № 4(12).

[33] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

[34] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1988.

[35] Blankenbach B., Busse F. et al. A benchmark comparison for mantle convection codes // Geophys. J. 1989. Vol. 98. P. 23–38.

[36] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 21 февраля 2006 г.