

# МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧ РЯБУШИНСКОГО

Л. Г. ГУЗЕВСКИЙ

*Сибирский университет потребительской кооперации,*

*Новосибирск, Россия*

e-mail: guzevsky@irs.ru

We present a numerical method for determining the plane and axially symmetric steady cavity flows of an ideal fluid, which allows us to obtain an approximate analytical solution for the cavity generatrix.

## Введение

В работе приводится наиболее полное по сравнению с предыдущими публикациями автора [1–3] описание алгоритма расчета плоских и осесимметричных кавитационных течений. В алгоритм внесены некоторые изменения, направленные на его улучшение.

Трудности получения достоверных численных решений осесимметричных задач кавитационного обтекания тел при малых значениях числа кавитации, которым соответствуют каверны большого удлинения, связаны в первую очередь с необходимостью выполнения краевого условия постоянства давления (величины скорости для невесомой жидкости) вдоль искомой границы каверны с высокой точностью. Так, например, двум значениям числа кавитации  $\sigma = 0.01$  и  $\sigma = 0.005$  соответствуют длины каверн за диском, которые отличаются более чем в два раза, в то время как отличие в соответствующих постоянных величинах скоростей вдоль границ каверн не превышает 0.25 %.

Для расчета протяженных каверн успешно применяется приближенный подход в рамках теории тонкого тела (см., например, [4]).

В ряде работ приведены результаты расчетов осесимметричных кавитационных течений, полученные со значительными вычислительными погрешностями. Наибольший вред такого рода численные решения приносят в тех случаях, когда на их основе “открываются” новые закономерности, представляющие интерес для приложений. В данной работе проводится анализ ошибочных численных результатов, представленных в [5, 6], на основании которых авторы пришли к неверному заключению о существовании некоторого оптимального кавитатора в классе конических кавитаторов.

## 1. Постановка задачи

Схема рассматриваемого течения приведена на рис. 1. В осесимметричном случае граничные поверхности тела и каверны получаются в результате вращения образующей  $L = DABA_*D_*$  вокруг оси симметрии. Для плоского потока на рисунке изображена верхняя половина области течения. При моделировании кавитационного режима стационарного обтекания потоком идеальной невесомой жидкости применяется схема Рябушинского. Предполагается заданной форма образующей кавитатора. Необходимо определить форму каверны, вдоль которой давление постоянно, а также найти распределение скорости течения вдоль заданной границы тела, образующая которой может иметь и криволинейную форму. Течение предполагается потенциальным, установившимся, а жидкость — идеальной, несжимаемой.

Для двумерного (плоского  $\varepsilon = 0$  или осесимметричного  $\varepsilon = 1$ ) потенциального течения идеальной жидкости функция тока  $\Psi$  удовлетворяет уравнению [7]

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\varepsilon}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Задача заключается в построении решения уравнения (1), удовлетворяющего следующим краевым условиям:

- непротекания вдоль всей граничной поверхности с образующей  $L$ ;
- постоянства давления в каверне, которое в силу интеграла Бернулли приводит к постоянству величины скорости  $V = V_0$  для невесомой жидкости вдоль искомой границы каверны

$$V = \frac{1}{y^\varepsilon} \frac{d\Psi}{dn} = V_0,$$

где  $n$  обозначает нормаль к линии тока.

Дополнительно задается характер поведения решения на бесконечности из условия затухания там возмущений, вносимых телом в поток:

$$\Psi \approx V_\infty \frac{y^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty.$$

Функцию тока представим в виде суммы функций тока равномерного течения со скоростью  $V_\infty = 1$  и функции тока, получаемой в результате непрерывного распределения вдоль всей граничной поверхности вихревого слоя, интенсивность  $\gamma$  которого равна по величине скорости течения на границе [8]. В результате этого для плоского течения получим

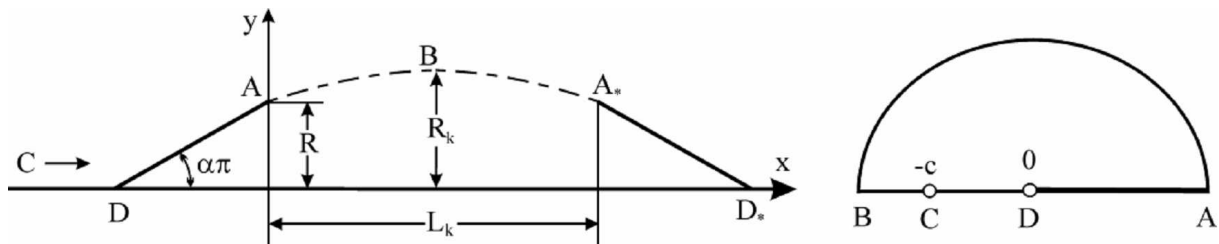


Рис. 1. Схема течения в физической области и соответствие границ при конформном отображении.

следующее представление:

$$\Psi(p) = y + \frac{1}{2\pi} \int_L V(Q) \ln \frac{r_2}{r_1} dl(Q), \quad (2)$$

где  $r_2$  — расстояние между произвольной точкой  $p(x, y)$  внутри области течения и граничной точкой  $Q$ ;  $r_1$  — расстояние между  $p$  и точкой  $\bar{Q}$ , которая симметрична  $Q$  относительно оси симметрии;  $dl$  — элемент длины дуги образующей.

Для осесимметричного течения функция тока выражается поверхностным интегралом, который в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Psi(p) = \frac{y}{2} \left[ y - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{V(Q) \cos \Theta}{r_2} d\Omega \right]$$

( $d\Omega$  — элемент граничной поверхности  $\Omega$ ). Осевая симметрия задачи позволяет выполнить интегрирование по углу  $\Theta$  и получить в произвольно выбранном меридиональном сечении следующее выражение для функции тока:

$$\Psi(p) = \frac{y^2}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_L V(Q) r_1 [(2 - \lambda^2)K(\lambda) - 2E(\lambda)] dl(Q). \quad (3)$$

Через  $K(\lambda)$  и  $E(\lambda)$  обозначены полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем  $\lambda = \sqrt{1 - r_2^2/r_1^2}$ .

Интегральные представления для функций тока плоского (2) и осесимметричного (3) течений запишем в виде

$$\Psi^\varepsilon(p) = \frac{y^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} + \frac{1-2\varepsilon}{4\pi} \int_L V(Q) R^\varepsilon(p, Q) dl(Q). \quad (4)$$

Здесь

$$R^0(p, Q) = 2 \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad R^1(p, Q) = r_1 [(2 - \lambda^2)K(\lambda) - 2E(\lambda)]. \quad (5)$$

Выражение (4) можно представить в следующей форме:

$$\Psi^\varepsilon(z) = \frac{y^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} + \frac{1-2\varepsilon}{4\pi} \int_L V(\zeta) R^\varepsilon(z, \zeta) \cdot |d\zeta|,$$

где  $z = x + iy$  — точка наблюдения;  $\zeta$  — точка интегрирования. При этом

$$r_1 = |z - \bar{\zeta}|, \quad r_2 = |z - \zeta|.$$

При предельном переходе в (4), когда точка  $p(z)$  устремляется к точке  $P(x(t), y(t))$  на границе  $L$ , из условия непротекания приходим к условию

$$\frac{y^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} + \frac{1-2\varepsilon}{4\pi} \int_L V(s) F^\varepsilon(t, s) \cdot |d\zeta| = 0, \quad (6)$$

где положение точки интегрирования  $\zeta = x(s) + iy(s)$  определяется величиной параметра  $s$ , и с использованием дополнительного условия симметрии течения относительно вертикали, проходящей через мидель каверны, получаем

$$F^\varepsilon(s, t) = R^\varepsilon [x(t), y(t), x(s), y(s)] + R^\varepsilon [x(t), y(t), x_0 - x(s), y(s)].$$

Вдоль заданной границы  $DA$  определим некоторым образом зависимость длины дуги  $l$  от параметра  $s$ :

$$l = l(s), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Вдоль образующей каверны полагаем заданной зависимость продольной координаты от другого вспомогательного параметра  $s$ :

$$x = x(s), \quad 0 \leq s \leq \pi.$$

Тогда исходные соотношения (6) примут следующий вид:

$$\frac{y^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon} + \frac{1-2\varepsilon}{4\pi} \left[ \int_0^1 V(s) F^\varepsilon(s, t) \frac{dl}{ds} ds + \sqrt{1+\sigma} \int_0^\pi F^\varepsilon(s, t) \sqrt{x_s^2 + y_s^2} ds \right] = 0. \quad (7)$$

При этом число кавитации  $\sigma$  введено обычным образом:

$$\sigma = \frac{2(P_\infty - P_k)}{\rho V_\infty^2} = \frac{V_0^2}{V_\infty^2} - 1,$$

где  $P_\infty - P_k$  — разность давлений в невозмущенном потоке и в каверне;  $\rho$  — плотность жидкости.

Требование выполнения соотношения (7) на двух участках границы ( $L_1 = DA$  и  $L_2 = AB$ ) приводит к системе двух функциональных уравнений для нахождения зависимости  $V = V(s)$  на кавитаторе и функции  $y = y(s)$ , описывающей вместе с заданной зависимостью  $x = x(s)$  форму образующей каверны в параметрическом виде.

Для анализа особенностей решения задачи, выбора зависимостей  $l = l(s)$ ,  $x = x(s)$ , переменных аппроксимации искомых функций, а также для оценки точности предлагаемого численного метода решения выпишем точное решение плоской задачи о кавитационном обтекании клина по схеме Рябушинского. Решение этой задачи выстраивается с помощью классического метода решения задач такого типа (см., например, [7]).

## 2. Точное решение задачи Рябушинского для клина

Симметричную часть области течения в верхней полуплоскости  $z = x + iy$  отобразим конформно на единичный полукруг  $\Gamma_\zeta$  в плоскости вспомогательного комплексного переменного  $\zeta$  с соответствием точек, указанным на рис. 1. В результате конформного отображения области изменения комплексного потенциала на  $\Gamma_\zeta$  получим

$$\frac{dW}{d\zeta} = NV_0 \frac{1-\zeta}{((\zeta+c)(1+c\zeta))^{3/2}}, \quad (8)$$

где  $N$  — искомая вещественная постоянная;  $V_0$  — величина скорости вдоль границы каверны.

Комплексная скорость течения имеет следующий вид:

$$\frac{1}{V_0} \frac{dW}{dz} = e^{-i\alpha\pi} \zeta^\alpha. \quad (9)$$

Согласно формулам (8), (9) соответствие между физической и параметрической плоскостями устанавливает функция

$$z(\zeta) = Ne^{i\alpha\pi} \int_1^\zeta \frac{1-\zeta}{((\zeta+c)(1+c\zeta))^{3/2} \zeta^\alpha} d\zeta + iR. \quad (10)$$

Применение формулы (9) для бесконечно удаленной точки  $C$  при  $\zeta = c$  приводит к соотношению

$$\frac{V_\infty}{V_0} = c^\alpha,$$

которое позволяет выразить параметр через число кавитации и угол раствора клина:

$$c = (1 + \sigma)^{-1/(2\alpha)}. \quad (11)$$

Из формул (9) и (10) при  $\zeta = t$  получим закон распределения скорости вдоль образующей клина в параметрическом виде

$$V(t) = \sqrt{1 + \sigma} t^\alpha, \\ l(t) = N \int_0^t \frac{1-\xi}{((\xi+c)(1+c\xi))^{3/2} \xi^\alpha} d\xi, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (12)$$

Согласно (10) параметрическое уравнение границы каверны при  $\zeta = e^{is}$  имеет вид

$$x(s) = N \int_0^s g(s) \cos \alpha(\pi - s) ds, \\ y(s) = R + N \int_0^s g(s) \sin \alpha(\pi - s) ds, \quad 0 \leq s \leq \pi, \quad (13)$$

где

$$g(s) = \frac{2 \sin \frac{s}{2}}{(1 + 2c \cdot \cos s + c^2)^{3/2}}.$$

Случай совпадения точек  $B$  и  $C$  ( $c = 1$ ) соответствует задаче кавитационного обтекания клина по схеме Кирхгофа ( $\sigma = 0$ ).

**Анализ особенностей.** Отметим теперь некоторые характерные особенности поведения решения. Для скорости плоского течения как при безотрывном, так и при кавитационном обтекании в окрестности точки остановки

$$V = \left| \frac{dw}{dz} \right| \approx Cl^p, \quad p = \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Для криволинейной границы угол  $\alpha\pi$  равен углу между осью симметрии и касательной к препятствию в точке остановки. Данная формула следует также из формул точного решения задачи Рябушинского для клина.

Известно [7], что кривизна свободной границы в точке фиксированного отрыва обращается в бесконечность, если она не совпадает с точкой гладкого отрыва. Согласно формулам (9), (10) получим следующее выражение для ускорения:

$$\frac{d\bar{V}}{dl} = \frac{\alpha V_0}{N} \frac{\left[ \left( \bar{V}^{\frac{1}{\alpha}} + c \right) \left( 1 + c \bar{V}^{\frac{1}{\alpha}} \right) \right]^{\frac{3}{2}}}{\bar{V}^{\frac{1}{\alpha}-2} \left( 1 - \bar{V}^{\frac{1}{\alpha}} \right)}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0}.$$

Кривизна границы каверны выражается формулой

$$\kappa = \frac{d\vartheta}{dl} = -\frac{\alpha}{dl/ds} = -\frac{\alpha}{2N} \frac{(1 + 2c \cdot \cos s + c^2)^{\frac{3}{2}}}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Характер поведения решения в окрестности точки отрыва каверны будет тот же и в предельном случае течения при  $c = 0$  ( $\sigma = \infty$ ), которому соответствует бесконечная длина пластины (см. рис. 1). Тогда последние две формулы приобретают наиболее простой вид

$$\frac{dV}{dl} = \frac{\alpha V_0}{N} \frac{\bar{V}^{\frac{1}{2\alpha}+2}}{1 - \bar{V}^{\frac{1}{\alpha}}},$$

$$\kappa = -\frac{\alpha}{dl/ds} = -\frac{\alpha}{2N} \frac{1}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} = \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{l}(2-\bar{l})}}.$$

В последней формуле через  $\bar{l}$  обозначена длина дуги, отнесенная к длине свободной границы  $AB$ .

Полученные формулы устанавливают порядки особенностей ускорения и кривизны образующей каверны в точках фиксированного отрыва как в плоском, так и в осесимметричном случае.

В осесимметричном случае зависимость  $p = p(\alpha)$  находится в результате решения задачи о симметричном безотрывном обтекании полубесконечного конуса с прямолинейной образующей с углом при вершине  $2\alpha\pi$ . Численные данные, приведенные в работе [9], представим в виде приближенной формулы

$$p(\alpha) = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} (-10.355\alpha^3 + 17.285\alpha^2 - 12.208\alpha + 5.077),$$

погрешность которой менее 0.1% в диапазоне от  $\alpha = 1/12$  ( $30^\circ$  при вершине) до  $\alpha = 1/2$  (диск).

**Замены переменных.** Для повышения гладкости подынтегральной функции в интегральных уравнениях (7) произведем замену переменных. На участке  $L_1$ , соответствующем заданной границе кавитатора, зависимость длины дуги от параметра введем следующим образом:

$$l(s) = l_* s^{\frac{1}{1+p}} \left( 1 + \frac{1-s}{1+p} \right), \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (14)$$

где  $l_* = l(1)$  — полная длина обтекаемой дуги  $L_1$ . Отсюда

$$\frac{dl}{ds} = \frac{l_*(2+p)}{(1+p)^2} \frac{1-s}{s^{\frac{p}{1+p}}}. \quad (15)$$

Из сопоставления формул (12) и (15) следует, что порядки особенности этих функций в точках остановки ( $s = 0$ ) и отрыва каверны ( $s = 1$ ) совпадают. Замена (14) позволяет избавиться от особенности подынтегральной функции  $V_* = V(s) \frac{dl}{ds}$  в первом интеграле уравнения (7) при  $s = 0$ .

Для кавитаторов в форме вертикальной пластины или диска вместо (14) используется замена

$$l(s) = \frac{l(2)}{1 + \pi/4} \left[ \frac{(3+s)\sqrt{s}}{(1+s)^2} + \arctan \sqrt{s} \right],$$

которая получается из формулы (13) при  $\alpha = 1/2$  и  $c = 1$ .

Вдоль свободной границы зависимость  $x = x(s)$  определим по формуле (13) при  $c = 0$ :

$$x(s) = \frac{L_k}{2} \int_0^s \sin \frac{s}{2} \cos \alpha(\pi - s) ds \Big/ \int_0^\pi \sin \frac{s}{2} \cos \alpha(\pi - s) ds, \quad 0 \leq s \leq \pi.$$

Отсюда в результате вычисления интегралов для диска получим уравнение

$$x(s) = \frac{L_k}{2\pi} (s - \sin s), \quad \alpha = 1/2; \quad (16)$$

$$x(s) = \frac{L_k}{2} \left[ 1 - \frac{(1 - 2\alpha) \cos A + (1 + 2\alpha) \cos B}{2 \cos \alpha \pi} \right], \quad \alpha \neq 1/2, \quad (17)$$

где  $A = \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)s - \alpha\pi$ ;  $B = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)s + \alpha\pi$ . Выберем переменные аппроксимации искомых функций таким образом, чтобы зависимости искомых функций от этих переменных были близки к линейным функциям. В этом случае существенно упрощается задача приближения этих функций. В качестве переменной аппроксимации для распределения скорости вдоль кавитатора используется переменная

$$q = s^{\frac{p}{1+p}}. \quad (18)$$

Интерполяция искомой функции  $y = y(s)$  вдоль свободной границы осуществляется по вспомогательной переменной  $u = u(s)$ , которая выражается через переменную интегрирования  $s$  согласно (13) по следующим формулам:

$$u(s) = \frac{1 - \cos s}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{2},$$

$$u(s) = \frac{2 \sin \alpha \pi + (1 - 2\alpha) \sin A - (1 + 2\alpha) \sin B}{2(\sin \alpha \pi - 2\alpha)}, \quad \alpha \neq \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Непосредственная проверка показывает, что зависимости  $V = V(q)$  и  $y = y(u)$  близки к линейным функциям в точном решении плоской задачи. По построению функция  $y = y(u)$  является линейной в предельном случае плоской задачи Рябушинского для прямолинейной полубесконечной пластины при  $c = 0$  ( $\sigma = \infty$ ).

Отметим, что предельное решение осесимметричной задачи Рябушинского для прямолинейной образующей при  $R \rightarrow \infty$ , когда число кавитации также стремится к бесконечности, переходит в соответствующее плоское при  $c = 0$ , для которого построено точное решение.

Использованные замены переменных интегрирования и аппроксимации искомых функций позволяют также учесть все характерные особенности поведения решения в точке отрыва.

Другая особенность интегральных уравнений задачи — наличие логарифмической особенности подынтегральных функций при совпадении точек наблюдения и интегрирования при  $s = t$ . В осесимметричном случае логарифмическую особенность имеет эллиптический интеграл первого рода при  $\lambda = 1$  ( $s = t$ ). Вычисление интегралов с логарифмической особенностью осуществляется с помощью замены переменной

$$z^r = |t - s|.$$

В отличие от замены Вандрея

$$z = \operatorname{sgn}(s - t) \sqrt{|t - s|},$$

которая широко применялась при численном решении интегральных уравнений задачи о безотрывном обтекании тел вращения, используемая замена обеспечивает непрерывность  $(r - 2)$  производных подынтегральных функций в новых переменных. В расчетах принято  $r = 4$ .

Для полных эллиптических интегралов применяются следующие известные аппроксимации [10]:

$$K(\lambda) = \ln(4) - \frac{1}{2} \ln \Delta + \sum_{k=1}^4 \Delta^k (a_k - b_k \ln \Delta),$$

$$E(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^4 \Delta^k (c_k - d_k \ln \Delta), \quad \Delta = 1 - \lambda^2.$$

Численные значения коэффициентов аппроксимации приведены в [10]. Максимальная относительная погрешность данных представлений не превышает  $3 \cdot 10^{-8}$ .

### 3. Алгоритм численного решения системы интегральных уравнений

После замены переменных интегрирования в (7) численное решение системы интегральных уравнений (7) осуществляется методом сплайновой коллокации.

Отрезок  $[0, 1]$  изменения переменной  $s$ , соответствующий заданному участку границы  $L_1 = AD$ , разобьем на  $n$  промежутков посредством системы узлов:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1.$$

Вдоль образующей границы каверны  $L_2 = AB$  введем  $m + 1$  узлов, которым соответствуют точки разбиения отрезка  $[0, \pi]$ :

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = \pi.$$

Соответственно данным узловым точкам получим узловые точки  $q_k = q(t_k)$  по формуле (18) и  $u_k = u(s_k)$  — по (19). Функции  $V = V(q)$  и  $y = y(u)$  приблизим кубическим сплайном. Учитывая специальный выбор независимых переменных, обеспечивающий близость



искомых функций к линейным, в качестве краевых условий примем условия равенства нулю вторых производных искомых функций в концевых точках.

Требование выполнения интегральных уравнений (7) в точках границы при  $s = t_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и в точках свободной границы при  $s = s_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) приводит к замкнутой системе  $(n + m)$  трансцендентных уравнений относительно параметров:

$$V_1 = V(t_1), \dots, V_{n-1} = V(t_{n-1}), L_k, y_1 = y(s_1), \dots, y_m = y(s_m).$$

При решении задачи в варианте заданной длины каверны искомым параметром будет величина скорости вдоль границы каверны, а тем самым и число кавитации.

Полученную систему трансцендентных уравнений запишем в векторном виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0,$$

где

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_{m+n})$$

— вектор левых частей, а

$$\mathbf{X} = (V_1, \dots, V_{n-1}, L_k, y_1, \dots, y_m) \equiv (X_1, \dots, X_{n+m})$$

— вектор решения.

Данная система уравнений решается численно одним из возможных обобщений метода Стеффенсена нахождения корня функции на многомерный случай [11]. При выполнении определенных условий данный метод, как и классический метод Ньютона, имеет квадратичную сходимость, но в отличие от последнего не требует вычисления (или аппроксимации) частных производных.

После задания начального приближения  $X^0$  переход к последующим приближениям осуществляется по формуле [11]

$$X^{j+1} = X^j - G^{-1}(X^j), \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Общий элемент матрицы имеет вид

$$g_{ij} = \frac{F_i(X^j) - F_i(x_1^j, \dots, x_{k-1}^j, x_k^j - F_k(X^j), x_{k+1}^j, \dots, x_{n+m}^j)}{F_k(X^j)}.$$

Процесс вычисления продолжается до тех пор, пока длина вектора приращения решения в двух соседних итерациях и длина вектора левых частей системы в очередной итерации не станут меньше требуемой малой величины. Обращение матрицы  $G$  осуществляется по методу Гаусса — Жордана.

Вычисление интегралов от функций, имеющих необходимое число ограниченных производных, осуществляется по формуле Гаусса.

## 4. Анализ точности метода

Изложенный алгоритм расчета плоской и осесимметричной задач Рябушинского реализован в виде единой программы на языке Паскаль. Проверка точности осуществлялась путем сопоставления результатов расчета по предложенному методу ряда тестовых задач с их точными решениями.

Т а б л и ц а 1. Результаты тестовых расчетов в задаче о нахождении формы поверхности по распределению скорости

	$2x/L_k$	0.0489	0.1910	0.4122	0.6910	1
$\lambda = 2$	$(2y/L_k)_{\text{точн.}}$	0.1545	0.2939	0.4045	0.4755	0.5000
	$(2y/L_k)_{\text{числ.}}$	0.1548	0.2939	0.4045	0.4755	0.5000
$\lambda = 20$	$(2y/L_k)_{\text{точн.}}$	0.0154	0.0294	0.0404	0.0475	0.0500
	$(2y/L_k)_{\text{числ.}}$	0.0154	0.0294	0.0404	0.0475	0.0500

Т а б л и ц а 2. Результаты численного и точного решений в задаче Рябушинского для вертикальной пластины и клина

$\alpha$	$\sigma$	$L_k/2R$		$R_k/R$		$C_x$	
		Числ.	Точное	Числ.	Точное	Числ.	Точное
0.5	1.05	3.862	3.865	2.057	2.060	1.816	1.819
0.5	0.45	15.57	15.57	3.485	3.485	1.280	1.279
0.5	0.40	19.13	19.10	3.796	3.796	1.235	1.234
0.5	0.30	31.79	31.79	4.730	4.730	1.145	1.145
0.5	0.10	245.3	245.6	12.19	12.20	0.970	0.968
0.5	0.05	946.8	939.9	23.40	23.54	0.921	0.924
0.25	0.30	22.94	22.94	3.454	3.454	0.836	0.836

Изложенный метод решения плоских и осесимметричных задач можно использовать для решения общих по сравнению с кавитационными задачами обтекания, когда неизвестная (свободная) граница определяется по заданному вдоль нее закону распределения давления. Частным случаем задачи данного класса является обратная задача о нахождении формы образующей тела вращения по заданному на ней закону распределения величины скорости течения. В отличие от осесимметричных задач кавитационного обтекания в этом классе легко найти примеры точных решений в аналитическом виде.

При известном законе распределения скорости из точного решения задачи о безотрывном обтекании эллипсоида вращения рассмотрим следующую тестовую обратную задачу: найти форму тела вращения по известному закону распределения величины скорости течения вдоль его образующей. В табл. 1 приводятся данные численного и точного решений тестовой задачи. Начальные приближения выбирались существенно отличающимися от соответствующих точных решений. Так, например, при расчете варианта задачи для удлинения  $\lambda = 20$  в качестве начального приближения выбраны данные, соответствующие случаю  $\lambda = 1$ .

Проверка точности метода осуществлялась также путем расчета вышеприведенной тестовой задачи о кавитационном обтекании клина по изложенному алгоритму. Результаты такого сравнения представлены в табл. 2. Эти результаты демонстрируют высокую точность разрабатываемого численного метода как для размеров каверны, так и для коэффициента сопротивления  $C_x$ .

В работе Bloch [15] приведены результаты единственного варианта расчета задачи Рябушинского для диска при  $\sigma = 0.3505$ . Отличие результатов расчета этого варианта задачи от наших данных для коэффициента сопротивления, длины и максимального диаметра каверны за диском не превысило 0.1 %.

Результаты численного решения задачи о кавитационном обтекании диска и сферы по схеме Рябушинского практически совпадают с данными Л.А. Кожуро [16].

## 5. Некоторые закономерности кавитационных течений

Поиск переменных аппроксимации искомым функциям, для которых получающиеся зависимости близки к линейным функциям, позволил обнаружить важное свойство форм образующих осесимметричных каверн. Это свойство сформулировано ранее в [12, 13] как принцип соответствия плоских и осесимметричных кавитационных течений. Согласно этому принципу каждому осесимметричному течению Рябушинского за конусом можно поставить в соответствие плоское течение Рябушинского за клином с тем же углом при вершине таким образом, что формы образующих плоской и осесимметричной каверн будут различаться незначительно. Этот принцип позволяет получить приближенное решение задачи о форме осесимметричной каверны за конусом в аналитическом виде. Систематические расчеты по проверке этого положения были проведены в диапазоне углов раствора конуса от 30 до 180° и чисел кавитации  $0.005 \leq \sigma \leq 1$ . Погрешность приближенного решения увеличивается с уменьшением числа кавитации, но и в этом случае она достаточно мала. Так, например, в задаче кавитационного обтекания диска при  $\sigma = 0.05$  максимальное отличие рассчитанного (“точного”) профиля каверны от приближенного за вертикальной пластиной, представленного в аналитическом виде, не превысило 1 %.

Основываясь на такого рода закономерности, метод расчета осесимметричных кавитационных течений за кавитатором произвольной формы модифицируем следующим образом. Вдоль образующей каверны согласно формуле (13) положим

$$x(s) = \frac{L_k I(c, s)}{2 I(c, \pi)}, \quad I(c, s) = \int_0^s \frac{\sin(s/2)}{(1 + 2c \cdot \cos s + c^2)^{3/2}} \cos \alpha(\pi - s) ds. \quad (20)$$

В качестве переменной аппроксимации искомой функции  $y = y(u)$  с учетом (13) положим

$$u(s) = \frac{J(c, s)}{J(c, \pi)}, \quad J(c, s) = \int_0^s \frac{\sin(s/2)}{(1 + 2c \cdot \cos s + c^2)^{3/2}} \sin \alpha(\pi - s) ds. \quad (21)$$

На каждом шаге итерационного процесса параметр  $c$  определяется из условия равенства удлинения осесимметричной каверны (см. рис. 1)

$$\delta = \frac{L_k}{2(R_k - R)} \equiv \frac{L_k}{2\Delta R_k}$$

удлинению плоской каверны за клином, полуугол при вершине которого выбирается равным углу наклона касательной к образующей кавитатора в точке схода каверны. Данному удлинению  $\delta$  соответствует единственное значение числа кавитации  $\sigma = \sigma_2$  плоской задачи при кавитационном обтекании выбранного клина. При этом величина параметра  $c$  определяется по формуле (11), а число кавитации плоской задачи  $\sigma = \sigma_2$  находится как корень некоторого трансцендентного уравнения [12]. Для зависимости  $\sigma_2 = \sigma_2(\alpha, \delta)$  на основе результатов расчетов предложена следующая аппроксимационная формула [13]:

$$\sigma_2 = \frac{2(\delta - \delta_{\min})}{\delta^2} + \frac{2.246\alpha^2 + 2.359\alpha + 0.035}{\alpha^2\delta^2} - \frac{3.202\alpha^2 - 4.885\alpha + 0.304}{\alpha^2\delta^2(\delta - \delta_{\min})},$$

где

$$\delta_{\min} = \frac{\cos \alpha\pi}{\sin \alpha\pi - 2\alpha}$$

— величина параметра  $\delta$  в предельном течении при  $c = 0$ . В частном случае  $\alpha = 1/2$  (вертикальная пластина) эта зависимость представлена в [14] в виде

$$\sigma_2(\delta) = \frac{2.0008\delta^2 + 0.784\delta - 0.508}{\delta^2(\delta - \pi/2)}.$$

Погрешность данного приближенного решения не превышает 0.02% в диапазоне удлинения  $6 \leq \delta \leq 200$ .

Как следует из способа введения переменных интегрирования и аппроксимации, зависимость  $y = y(u)$  является по построению линейной в задаче о кавитационном обтекании клина, в которой величина параметра  $c$  выражается через полученное число кавитации  $\sigma = \sigma_2$  по формуле (11). Результаты численных данных показывают, что искомая функция  $y = y(u)$  — практически линейная как в задаче кавитационного обтекания конусов, так и в задачах кавитационного обтекания кавитаторов с криволинейной образующей [13].

Результаты систематических численных расчетов показывают, что при фиксированном числе кавитации коэффициент сопротивления, определенный по площади миделя каверны, практически не зависит от формы кавитатора даже при относительно больших значениях числа кавитации. Численные данные, иллюстрирующие это свойство, приведены в табл. 3.

На основе точного решения получим, например, что при изменении угла при вершине клина от  $40^\circ$  до  $180^\circ$  для чисел кавитации  $\sigma = 0.01$  и  $\sigma = 0.3$  функция  $k(\sigma) = C_{x^*}/\sigma$  с точностью 0.07% принимает постоянные значения. Таким образом, как в плоском, так и в осесимметричном случае функция  $k(\sigma)$  не зависит от формы кавитатора, за исключе-

Т а б л и ц а 3. Данные для коэффициента сопротивления  $C_{x^*}$  клиньев ( $\varepsilon = 0, \sigma = 0.5$ ) и конусов ( $\varepsilon = 1, \sigma = 0.25$ ) с углом при вершине  $2\alpha\pi$

	$\alpha$ , град.					
	90	75	60	45	30	15
$C_{x^*}(\varepsilon = 0)$	0.409	0.409	0.409	0.409	0.409	0.409
$C_{x^*}(\varepsilon = 1)$	0.223	0.223	0.223	0.224	0.224	0.224

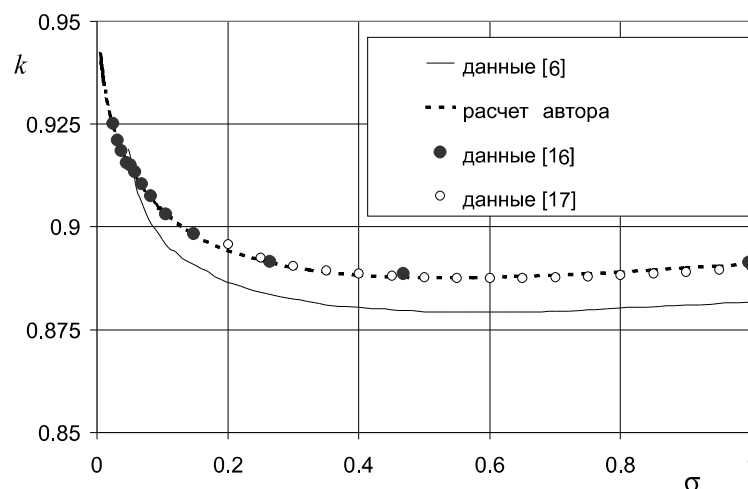


Рис. 2. Зависимость  $k = k(\sigma)$  для диска, по данным разных авторов.

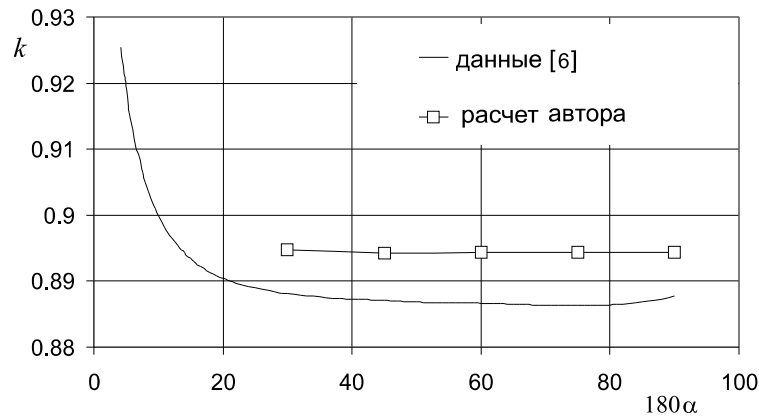


Рис. 3. Зависимость  $k = k(\sigma)$  для конусов  $\sigma = 0.2$ .

нием, возможно, тонких клиньев и конусов (малые значения параметра  $2\alpha\pi$  — угла при вершине).

Имеет место практическое совпадение наших численных данных для функции  $k(\sigma)$  при  $\alpha = 1/2$  (диск) с данными работ [16, 17], но они значительно отличаются от результатов, представленных в [6] (рис. 2).

На рис. 3 представлена зависимость функции  $k$  от угла  $\alpha\pi$  полураствора конуса при постоянном значении числа кавитации  $\sigma = 0.2$ . При этом погрешность численных данных [6], приведенных на этом рисунке, в несколько раз превышает диапазон изменения функции  $k$ , в котором автор работы [6] пытается найти ее экстремальное значение.

Из приведенного анализа следует полная несостоятельность утверждения авторов работ [5, 6] о существовании оптимального конического кавитатора с углом полураствора, равным  $66^\circ$ , который обладает наименьшим сопротивлением среди конических кавитаторов с углами при вершине от  $30$  до  $180^\circ$ .

## Список литературы

- [1] ГУЗЕВСКИЙ Л.Г. Осесимметричные задачи обтекания со свободными границами // Исследования по развитой кавитации: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1976. С. 51–67.
- [2] ГУЗЕВСКИЙ Л.Г. Численный анализ кавитационных течений. Новосибирск, 1979. (Препр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т теплофизики; № 40–79).
- [3] GUZEVSKY L.G. Calculation of axially symmetric cavity flows // Russ. J. Eng. Thermophysics. 1992. Vol. 2. P. 193–212.
- [4] SEREBRYAKOV V.V. The models of the supercavitation prediction for high speed motion in water // Intern. Summer Sci. School “High Speed Hydrodynamics”, June 2002, Cheboksary, Russia. P. 71–92.
- [5] СУБХАНКУЛОВ Г.И., ХОМЯКОВ А.Н. Применение метода граничных элементов к расчету осесимметричных каверн // Гидродинамика больших скоростей: Межвуз. сб. науч. тр. Чуваш. гос. ун-та. Чебоксары, 1990. С. 124–132.
- [6] ХОМЯКОВ А.Н. Зависимость сопротивления осесимметричного конического кавитатора от угла раствора конуса и от числа кавитации // Изв. АН СССР. МЖГ. 1995. № 3. С. 170–173.

- [7] ГУРЕВИЧ М.И. Теория струй идеальной жидкости. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1979. 536 с.
- [8] PRAGER W. Die Druckverteilung an Körper in ebenen Potentialströmung // Phys. Z. 1928. N 23. P. 865–869.
- [9] ГЕСС ДЖ., ФОЛКНЕР С. Точные значения показателя степени в законе, определяющем потенциальное поле течения около полубесконечных конусов // Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3, № 4. С. 239–240.
- [10] HASTINGS C. Approximations for digital computers. Princeton: Princeton Univ. Press, 1955. 201 p.
- [11] МАЕРГОЙЗ М.Д. Об одном методе решения систем нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7, № 4. С. 869–874.
- [12] ГУЗЕВСКИЙ Л.Г. Аппроксимационные зависимости для осесимметричных каверн за конусами // Гидродинамические течения и волновые процессы: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1983. С. 82–91.
- [13] ГУЗЕВСКИЙ Л.Г., ЗАВАРЗИН Д.С. Соответствие между плоскими и осесимметричными кавитационными течениями // Докл. СО АН высш. шк. 2000. № 1. С. 10–17.
- [14] GUZEVSKY L.G., ZAVARZIN D.S. Analytical approximations of Riabouchinsky cavity flows past a disk // Intern. Summer Sci. School “High Speed Hydrodynamics”, June 2002, Cheboksary, Russia. P. 17–20 (Post-Meeting Volume).
- [15] БЛОСН Е. A Finite Difference Method for the Solution of Free Boundary Problems. Report NYU-NYO –1480-116. 1969. 122 p.
- [16] КОЖУРО Л.А. Расчет осесимметричного струйного обтекания тел по схеме Рябушинского // Уч. зап. ЦАГИ. 1980. Т. XI, № 5. С. 109–115.
- [17] ЗИГАНГАРЕЕВА Л.М., КИСЕЛЕВ О.М. О расчете кавитационного обтекания кругового конуса дозвуковым потоком сжимаемой жидкости // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 93–107.

*Поступила в редакцию 30 марта 2006 г.*