ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННО-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ*

А. М. Гришин, А. С. Якимов
Томский государственный университет, Россия
e-mail: `fire@mail.tsu.ru, yakimovas@mail.ru`

A numerical algorithm for solving the 3D wave equation based on an iteration-interpolation method is developed. The obtained scheme is absolutely stable. The scheme provides the second order approximation in time and space. Convergence of the scheme is examined and the results of the test calculation is presented.

Введение

В работах [1–7] предложен итерационно-интерполяционный метод (ИИМ) для решения различных уравнений математической физики. Работа [2] переведена на английский язык [3], здесь для одного частного случая утверждалось, что погрешность аппроксимации — $O(h^{2k})$, где h — шаг разностной сетки, а $k = 1, 2$ — номер итерации. В [4] даны алгоритмы ИИМ для решения уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типа, допускающих точное решение, и приведена оценка точности полученных численных решений, а в [5] — развитие ИИМ для решения трехмерного уравнения теплопроводности. Обобщение ИИМ на трехмерный случай для уравнения параболического типа сделано в [6]. Современное состояние ИИМ изложено в [7].

Суть алгоритма ИИМ заключается в использовании метода последовательных приближений на каждом элементарном отрезке разностной сетки, соответствующей области определения исследуемой краевой задачи, в результате чего точность приближенного решения можно повысить путем как уменьшения шага разностной сетки, так и увеличения числа итераций [1]. В дальнейшем установлена связь ИИМ с теорией сплайнов [3] и даны примеры применения ИИМ для решения некоторых нелинейных краевых задач [4].

В монографии [8] приведен обзор методов решения уравнения с частными производными второго порядка гиперболического типа [9–12]. В [10] решена задача Коши. В работе [11] для двумерного уравнения колебаний имеет место трехслойная аддитивная разностная схема, а в трехмерном пространстве — четырехслойная с погрешностью аппроксимации

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00714).

$O(\tau + |h|^2)$. В [11] отмечено, что вид локально-одномерных схем для гиперболического уравнения второго порядка зависит от числа измерений по пространству.

В данной статье предлагается развитие алгоритма ИИМ [6, 7] для решения трехмерного волнового уравнения. Цель настоящей работы — для трехмерного волнового уравнения на базе ИИМ получить разностные схемы, которые безусловно устойчивы, обладают абсолютной погрешностью аппроксимации для этого уравнения по времени и по пространству. Отметим, что неявно использовался подход Дугласа (схема стабилизирующей поправки [9]), предложенный для решения трехмерного уравнения теплопроводности. Как известно [9], разностные схемы стабилизирующей поправки безусловно устойчивы.

1. Алгоритм обобщения итерационно-интерполяционного метода для решения трехмерного волнового уравнения

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, логическую схему ИИМ для волнового уравнения с постоянными коэффициентами переноса внутри параллелепипеда R: $x = (x_1, x_2, x_3)$, $0 < x_m < d_m$, $m = 1, 2, 3$, при $0 < t \leq t_k$ приведем к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{m=1}^{3} v_m \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + f(x,t). \tag{1.1}$$

Для построения разностного аналога уравнения (1.1) введем сетку с координатами узлов $x_{1,i} = ih_1$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, N)$, $x_{2,j} = jh_2$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$, $x_{3,k} = kh_3$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \ldots, h_m = d_m/N, m = 1, 2, 3$, где h_m — шаги по пространству, τ — шаг по времени. При написании операторов разностных схем вводятся верхние промежуточные (формальные) слои n, $n + 1/3$, $n + 2/3$, а также $n - 1$, $n + 1$ — начальный и конечный (фактические) слои по времени t.

Используя результаты статьи [6], введем следующие обозначения (одна и две точки "сверху" приписываются частной производной по времени):

$$a(t,x) = \ddot{u} - v_2 \partial^2 u/\partial x_2^2 - v_3 \partial^2 u/\partial x_3^2; \tag{1.2}$$

$$b(t,x) = \ddot{u} - v_3 \partial^2 u/\partial x_3^2. \tag{1.3}$$

Разностные операторы $A_1 a_i, \Lambda_1 u_i, A_2 b_{i,j}, \Lambda_2 u_{i,j}, A_3 u_{i,j,k}, \Lambda_3 u_{i,j,k}$ внутри области определения R взяты из статьи [6] и при постоянных шагах по пространству имеют вид

$$A_1 a_i = (a_{i-1} + 4a_i + a_{i+1})/6, \Lambda_1 u_i = v_1(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})/h_1^2,$$

$$i = 1, \ldots, N-1, \quad 0 < x_m < d_m, \quad m = 2, 3,$$

$$A_2 b_{i,j} = (b_{i,j-1} + 4b_{i,j} + b_{i,j+1})/6, \Lambda_2 u_{i,j} = v_2(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1})/h_2^2,$$

$$i, j = 1, \ldots, N-1\ , \quad 0 < x_3 < d_3,$$

$$\begin{gathered} A_3 u_{i,j,k} = (u_{i,j,k-1} + 4u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1})/6, \\ \Lambda_3 u_{i,j,k} = v_3(u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1})/h_3^2, \\ i, j, k = 1, \ldots, N-1. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Разностные операторы внутри области определения R для нового, предлагаемого ниже подхода записываются следующим образом:

$$A_1u = (u_{i-1,j,k} + 4u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k})/6, \Lambda_1 u = v_1(u_{i-1,j,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i+1,j,k})/h_1^2,$$

$$A_2u = (u_{i,j-1,k} + 4u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k})/6, \Lambda_2 u = v_2(u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k})/h_2^2,$$

$$A_3u = (u_{i,j,k-1} + 4u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1})/6, \Lambda_3 u = v_3(u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1})/h_3^2,$$

$$i, j, k = 1, \ldots, N-1. \qquad (1.5)$$

Следуя алгоритму из [1, 5–7] и используя обозначения (1.2), (1.4) для уравнения (1.1) последовательно запишем следующие соотношения.

По направлению координаты x_1

$$a = v_1 \partial^2 u/\partial x_1^2 + f$$

разностные схемы, полученные в результате поочередного интегрирования по пространственным переменным, имеют вид [6]

$$A_1 a_i = \Lambda_1 u_i^{n+1/3} + A_1 f_i^{n-1},$$

$$i = 1, \ldots, N-1, \;\; 0 < x_m < d_m, m = 2, 3. \qquad (1.6)$$

По направлению координаты x_2

$$b_i = v_2 \partial^2 u_i/\partial x_2^2 + a_i, \;\; i = 1, \ldots, N-1$$

разностные уравнения записываются как

$$A_2 b_{i,j} = \Lambda_2 u_{i,j}^{n+2/3} + A_2 a_{i,j},$$

$$i, j = 1, \ldots, N-1, \;\; 0 < x_3 < d_3. \qquad (1.7)$$

Окончательно по направлению координаты x_3

$$\ddot{u}_{i,j} = v_3 \partial^2 u_{i,j}/\partial x_3^2 + b_{i,j}, \;\; i, j = 1, \ldots, N-1,$$

разностные схемы ИИМ принимают вид

$$A_3 \ddot{u}_{i,j,k} = \Lambda_3 u_{i,j,k}^{n+1} + A_3 b_{i,j,k}, i, j, k = 1, \ldots, N-1. \qquad (1.8)$$

Отметим, что разностные уравнения вида, например, (1.6) получаются непосредственно из логической схемы ИИМ [1, 7], а для нахождения разностных уравнений (1.6)–(1.8) используются операторы из (1.4). Для получения конкретного вида соотношения (1.6) подставим в него значение a из (1.2):

$$A_1(\ddot{u}_i - v_2 \partial^2 u_i/\partial x_2^2 - v_3 \partial^3 u_i/\partial x_3^2) = \Lambda_1 u_i^{n+1/3} + A_1 f_i^{n-1},$$

$$i = 1, \ldots, N-1, \;\; 0 < x_m < d_m, \;\; m = 2, 3. \qquad (1.9)$$

Из выражений (1.5), (1.9) следует, что оператор A_1 может действовать на любую сеточную функцию, осредняя ее в направлении x_1, но не может действовать на частные производные функций, которые берутся по пространственным переменным с других координатных направлений. Используя (1.5), вместо (1.9) по координатному направлению x_1 имеем дифференциально-разностную схему

$$A_1\ddot{u} = \Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^{n-1} + \Lambda_3 u^{n-1} + A_1 f^{n-1},$$

$$i, j, k = 1, \ldots, N-1. \tag{1.10}$$

Далее найдем a_i из уравнения (1.6), умножая обе части его на A_1^{-1} слева. Это можно сделать, так как матрица, соответствующая этому оператору, трехдиагональна (1/6, 4/6, 1/6) при $h_m = \text{const}$, $m = 1, 2, 3$, и имеет диагональное преобладание. Тогда, замечая, что $A_1^{-1}A_1 = E$, получим

$$a_i = A_1^{-1}\Lambda_1 u_i^{n+1/3} + f_i^{n-1}. \tag{1.11}$$

В левую часть операторного уравнения (1.7) подставим значение b из (1.3), а в правую — значение a_i из (1.11). В результате (1.7) примет вид

$$A_2(\ddot{u}_{i,j} - v_3\partial^2 u_{i,j}/\partial x_3^2) = \Lambda_2 u_{i,j}^{n+2/3} + A_2(A_1^{-1}\Lambda_1 u_{i,j}^{n+1/3} + f_{i,j}^{n-1}) =$$

$$= \Lambda_2 u_{i,j}^{n+2/3} + (A_2 A_1^{-1})(\Lambda_1 u_{i,j}^{n+1/3}) + A_2 f_{i,j}^{n-1},$$
$$i, j = 1, \ldots, N-1, \quad 0 < x_3 < d_3. \tag{1.12}$$

Используя обозначения (1.5) и соотношение $A_2 A_1^{-1} = E$ (при $h_m = \text{const}$ $A_1 = A_2 = A_3$), аналогично предыдущему (1.9), (1.10) из (1.12) получим

$$A_2\ddot{u} = \Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^{n+2/3} + \Lambda_3 u^{n-1} + A_2 f^{n-1},$$

$$i, j, k = 1, \ldots, N-1. \tag{1.13}$$

Наконец, в правую часть уравнения (1.8) подставим значение $b_{i,j}$, полученное из разностного соотношения (1.7) и предварительно умноженное слева на A_2^{-1}. Тогда разностная схема (1.8) перепишется как

$$A_3\ddot{u}_{i,j,k} = \Lambda_3 u_{i,j,k}^{n+1} + A_3(A_2^{-1}\Lambda_2 u_{i,j,k}^{n+2/3} + A_1^{-1}\Lambda_1 u_{i,j,k}^{n+1/3} + f_{i,j,k}^{n-1}) =$$

$$= \Lambda_3 u_{i,j,k}^{n+1} + (A_3 A_2^{-1})(\Lambda_2 u_{i,j,k}^{n+2/3}) + (A_3 A_1^{-1})(\Lambda_1 u_{i,j,k}^{n+1/3}) + A_3 f_{i,j,k}^{n-1}. \tag{1.14}$$

Замечая, что $A_3 A_2^{-1} = E$, $A_3 A_1^{-1} = E$, из операторного уравнения (1.14) окончательно получим следующее уравнение:

$$A_3\ddot{u} = \Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^{n+2/3} + \Lambda_3 u^{n+1} + A_3 f^{n-1},$$

$$i, j, k = 1, \ldots, N-1. \tag{1.15}$$

Таким образом, для решения трехмерного волнового уравнения (1.1) внутри области определения R получены разностные уравнения (1.10), (1.13), (1.15), аппроксимация и устойчивость которых будет рассмотрена ниже.

2. Постановка задачи и метод построения разностной схемы

Пусть требуется решить трехмерное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа [9–12]

$$g(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + s(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m}\left[v_m(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_m}\right] +$$

$$+w\sum_{\substack{m=1\\k\neq m}}^{3}\frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_k} + \sum_{m=1}^{3} w_m(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_m} + f(x,t) \qquad (2.1)$$

в параллелепипеде R: $x=(x_1,x_2,x_3)$, $0<x_m<d_m$, $m=1,2,3$, для $w=\mathrm{const}$, $|w|<1$ [11] с начальными условиями

$$u|_{t=0}=p_1(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=p_2(x) \qquad (2.2)$$

и для простоты анализа при граничных условиях первого рода

$$u\big|_{x_1=d_1}=s_1(t,x_2,x_3), \quad u\big|_{x_2=d_2}=s_2(t,x_1,x_3), \quad u\big|_{x_3=d_3}=s_3(t,x_1,x_2),$$

$$u\big|_{x_1=0}=q_1(t,x_2,x_3), \quad u\big|_{x_2=0}=q_2(t,x_1,x_3), \quad u\big|_{x_3=0}=q_3(t,x_1,x_2). \qquad (2.3)$$

В общем случае при наличии смешанных производных имеем 27-точечный шаблон в пространстве, а при их отсутствии — семиточечный крест в параллелепипеде R. Используя результаты, полученные в разд. 1 и в [5], запишем разностные операторы внутри области определения R. Для простоты дальнейшего анализа положим $g=\mathrm{const}$, $s=\mathrm{const}$ ($g=s=1$), $v_m=\mathrm{const}$, $w_m=\mathrm{const}$, $m=1,2,3$ в (2.1). При переменных коэффициентах переноса в (2.1) разностные операторы подробно выписаны в [6, 7]. Тогда имеем

$$\ddot{u}_{i,j,k}=\tau^{-2}(u^{n+1}_{i,j,k}-2u^{n}_{i,j,k}+u^{n-1}_{i,j,k}), \quad \dot{u}_{i,j,k}=(u^{n+1}_{i,j,k}-u^{n-1}_{i,j,k})/(2\tau),$$

$$\Delta_1 u_{i,j,k}=w_1(u_{i+1,j,k}-u_{i-1,j,k})/(2h_1),$$

$$\Lambda_{1,2}u=2w(u_{i+1,j+1,k}-u_{i+1,j-1,k}-u_{i-1,j+1,k}+u_{i-1,j-1,k})/(4h_1h_2),$$

$$\Lambda_{1,3}u=2w(u_{i+1,j,k+1}-u_{i+1,j,k-1}-u_{i-1,j,k+1}+u_{i-1,j,k-1})/(4h_1h_3),$$

$$\Lambda_{2,3}u=2w(u_{i,j+1,k+1}-u_{i,j+1,k-1}-u_{i,j-1,k+1}+u_{i,j-1,k-1})/(4h_2h_3),$$

$$A_1 f=(f_{i-1,j,k}+4f_{i,j,k}+f_{i+1,j,k})/6, \Lambda_{1-3}u=(\Lambda_{1,2}+\Lambda_{1,3}+\Lambda_{2,3})u,$$

$$i,j,k=1,\ldots,N-1. \qquad (2.4)$$

Операторы A_m, Δ_m, $m=2,3$, по другим координатным направлениям x_2,x_3 получаются циклической заменой индексов [5]. На n временном слое решение можно найти из формулы Тэйлора и уравнения (2.1), если воспользоваться разложением из [13], которое в общем случае перепишется так:

$$u^n_{i,j,k}=u^{n-1}_{i,j,k}+\tau\frac{\partial u^{n-1}_{i,j,k}}{\partial t}+$$

$$+0.5\tau^2 \left\{ \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(v_m \frac{\partial u_{i,j,k}}{\partial x_m} \right) - \frac{\partial u_{i,j,k}}{\partial t} + w \sum_{\substack{m=1 \\ s\neq m}}^{3} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}}{\partial x_m \partial x_s} + \sum_{m=1}^{3} w_m \frac{\partial u_{i,j,k}}{\partial x_m} + f_{i,j,k} \right\}^{n-1},$$

$$i,j,k = 1,\ldots,N-1. \tag{2.5}$$

Используя обозначения (1.5), (2.4), получим следующую систему разностных уравнений внутри параллелепипеда R (при написании разностных схем предполагается, что $(u^{n-1})^{1/3} = (u^{n-1})^{2/3} = (u^{n-1})^1 = u^{n-1}$, $(u^n)^{1/3} = (u^n)^{2/3} = (u^n)^1 = u^n$)):

$$\tau^{-2} A_1(u^{n+1/3} - 2u^n + u^{n-1}) + (2\tau)^{-1} A_1(u^{n+1/3} - u^{n-1}) =$$

$$= (\Lambda_1 + \Delta_1)u^{n+1/3} + (\Lambda_2 + \Delta_2)u^{n-1} + (\Lambda_3 + \Delta_3)u^{n-1} + \Lambda_{1-3}u^{n-1} + A_1 f^{n-1}; \tag{2.6}$$

$$\tau^{-2} A_2(u^{n+2/3} - 2u^n + u^{n-1}) + (2\tau)^{-1} A_2(u^{n+2/3} - u^{n-1}) =$$

$$= (\Lambda_1 + \Delta_1)u^{n+1/3} + (\Lambda_2 + \Delta_2)u^{n+2/3} + (\Lambda_3 + \Delta_3)u^{n-1} + \Lambda_{1-3}u^{n-1} + A_2 f^{n-1}; \tag{2.7}$$

$$\tau^{-2} A_3(u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}) + (2\tau)^{-1} A_3(u^{n+1} - u^{n-1}) =$$

$$= (\Lambda_1 + \Delta_1)u^{n+1/3} + (\Lambda_2 + \Delta_2)u^{n+2/3} + (\Lambda_3 + \Delta_3)u^{n+1} + \Lambda_{1-3}u^{n-1} + A_3 f^{n-1},$$

$$i,j,k = 1,\ldots,N-1. \tag{2.8}$$

Здесь u^{n-1} задано из первого начального (2.2), а u^n находится по формуле (2.5) при использовании разностных операторов Λ_m, Δ_m, $m = 1,2,3$, $\Lambda_{1,2}u$, $\Lambda_{1,3}u$, $\Lambda_{2,3}u$ из (1.5), (2.4).

При исследовании аппроксимации, устойчивости разностных схем (2.6)–(2.8) и для написания программы расчета удобно пользоваться вместо двух последних уравнений (2.7), (2.8) более простыми разностными уравнениями [9]. Вычтем из второго уравнения первое, а из третьего — второе, тогда вместо двух последних уравнений системы (2.6)–(2.8) получим

$$\tau^{-2}(A_2 u^{n+2/3} - A_1 u^{n+1/3}) + (2\tau)^{-1}(A_2 u^{n+2/3} - A_1 u^{n+1/3}) =$$

$$= (\Lambda_2 + \Delta_2)(u^{n+2/3} - u^{n-1}) + \tau^{-2} A_2(2u^n - u^{n-1}) + (2\tau)^{-1} A_2 u^{n-1} -$$

$$-[\tau^{-2} A_1(2u^n - u^{n-1}) + (2\tau)^{-1} A_1 u^{n-1}] + A_2 f^{n-1} - A_1 f^{n-1}, \tag{2.9}$$

$$\tau^{-2}(A_3 u^{n+1} - A_2 u^{n+2/3}) + (2\tau)^{-1}(A_3 u^{n+1} - A_2 u^{n+2/3}) =$$

$$= (\Lambda_3 + \Delta_3)(u^{n+1} - u^{n-1}) + \tau^{-2} A_3(2u^n - u^{n-1}) + (2\tau)^{-1} A_3 u^{n-1} -$$

$$-[\tau^{-2} A_2(2u^n - u^{n-1}) + (2\tau)^{-1} A_2 u^{n-1}] + A_3 f^{n-1} - A_2 f^{n-1},$$

$$i,j,k = 1,\ldots,N-1. \tag{2.10}$$

На гранях $x_1 = 0$, $x_1 = d_1$ имеем

$$u^{n+1}_{N_1,j,k} = s^{n+1}_{1,j,k}\big|_{x_1=d_1}, \quad j = 0,\ldots,N, \quad k = 0,\ldots,N,$$

$$u^{n+1}_{0,j,k} = q^{n+1}_{1,j,k}, \quad j = 0,\ldots,N, \quad k = 0,\ldots,N. \tag{2.11}$$

На остальных гранях формулы вида (2.11) получаются одна из другой круговой заменой индексов [5].

3. Устойчивость разностной схемы ИИМ по начальным данным

В работе [5] в приближении замороженных коэффициентов [9, 13] методом Фурье найдено условие безусловной устойчивости явно-неявных разностных уравнений (2.6)–(2.8) или (2.6), (2.9), (2.10) по начальным данным при $g = f = 0$, $s = 1$, $v_m = w_m = \mathrm{const}$, $m = 1, 2, 3$. Представляет интерес оценка величины η — множителя роста гармоники при переходе со слоя на слой [13] при $g \neq 0$. Сделаем стандартную подстановку [13]

$$u^{n+1} = \eta u^{n-1}, \quad u_{i,j,k}^{n-1} = \exp[I(g_1 x_{1,i} + g_2 x_{2,j} + g_3 x_{3,k})], \tag{3.1}$$

где $I = \sqrt{-1}$, $g_m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $m = 1, 2, 3$ — гармоники. Подставим (3.1) в (2.6), (2.9), (2.10) при $g = 1, s = f = p_2 = 0$ и для сокращения дальнейших выкладок введем обозначения

$$a_m = 4\tau^2 v_m h_m^{-2} \sin^2(g_m h_m/2), \quad X_m = \sin(g_m h_m), \quad b_m = \tau^2 w_m h_m^{-1} X_m,$$

$$r_m = [1 + 2\cos^2(g_m h_m/2)]/3, \quad m = 1, 2, 3,$$

$$c_1 = \tau^2 (h_1 h_2)^{-1} X_1 X_2, \quad c_2 = \tau^2 (h_2 h_3)^{-1} X_2 X_3, \quad c_3 = \tau^2 (h_1 h_3)^{-1} X_1 X_3,$$

$$c = 2w \sum_{m=1}^{3} c_m, \quad \alpha = \sum_{m=1}^{3} a_m, \quad \beta = \sum_{m=1}^{3} b_m, \quad \gamma = \beta - \alpha - c. \tag{3.2}$$

Тогда по каждому из направлений получим

$$u^{n+1/3}(r_1 + a_1 - Ib_1) = 2u^n r_1 + u^{n-1}(-r_1 - a_2 - a_3 + Ib_2 + Ib_3 - c); \tag{3.3}$$

$$u^{n+2/3}(r_2 + a_2 - Ib_2) = r_1 u^{n+1/3} + 2u^n(r_2 - r_1) + u^{n-1}(r_1 - r_2 + a_2 - Ib_2); \tag{3.4}$$

$$u^{n+1}(r_3 + a_3 - Ib_3) = r_2 u^{n+2/3} + 2u^n(r_3 - r_2) + u^{n-1}(r_2 - r_3 + a_3 - Ib_3), \tag{3.5}$$

$$u^n = u^{n-1}[1 + 0{,}5(I\beta - \alpha - c)].$$

Выразим $u^{n+1/3}$ из (3.3) и подставим в (3.4), затем найдем $u^{n+2/3}$ из полученного соотношения и внесем его в (3.5). В результате для определения η окончательно имеем уравнение

$$\eta = \frac{S + U - I(T + V)}{W - ID},$$

$$|\eta| = \frac{[(S+U)^2 + (T+V)^2]^{0,5}}{(W^2 + D^2)^{0,5}}, \tag{3.6}$$

где

$$I^2 = -1, S = F + p - r_1 r_2 c; \quad W = F + a; \quad D = E + b; \quad T = E + q;$$

$$F = r_3 r_2 r_1 + r_1(a_2 a_3 - b_2 b_3) + r_2(a_1 a_3 - b_1 b_3) + r_3(a_2 a_1 - b_2 b_1) + a_1 a_2 a_3 - a_1 b_2 b_3 - a_2 b_1 b_3 - a_3 b_2 b_1;$$

$$p = a_1 r_2(r_3 - r_1) + r_1 a_2(r_3 - r_2), \quad a = r_3 r_2 a_1 + r_3 a_2 r_1 + a_3 r_2 r_1;$$

$$E = r_1(b_2 a_3 + a_2 b_3) + r_2(b_1 a_3 + a_1 b_3) + r_3(b_2 a_1 + a_2 b_1) + a_2 a_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 + a_1 a_2 b_3 - b_1 b_2 b_3;$$

$$q = b_1 r_2(r_3 - r_1) + r_1 b_2(r_3 - r_2), \quad b = r_3 r_2 b_1 + r_3 b_2 r_1 + b_3 r_2 r_1;$$

$$\phi = b_1(r_3 r_2 - r_1 r_2) + b_2(r_3 r_1 - r_1 r_2) + (r_3 - r_2)(a_1 b_2 - b_1 a_2);$$

$$\psi = r_1 r_2 r_3 + a_1(r_3 r_2 - r_1 r_2) + a_2(r_3 r_1 - r_1 r_2) + (r_2 - r_3)(a_2 a_1 + b_1 b_2);$$

$$U = \gamma(\phi + \psi); \ \ V = \gamma(\phi - \psi). \tag{3.7}$$

Необходимое условие устойчивости Неймана разностных схем записывается как $|\eta| \leq 1$ [9, 13]. В силу того что $|\sin g_m h_m| \leq 1$, $|\cos g_m h_m| \leq 1$, найдем оценку сверху для η. В частности, знаменатель будет минимален в (3.6) при $g_m h_m/2 = k\pi$, $m = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда из выражений (3.2), (3.6), (3.7) имеем $r_m = 1$, $\sin g_m h_m = \sin g_m h_m/2 = 0$, $m = 1, 2, 3$, $p = q = c = b = a = 0$, $E = T = D = 0$, $U = V = 0$, $S = W = F$, $F = 1$ и

$$|\eta| = \frac{F}{F} \equiv 1. \tag{3.8}$$

Из (3.6), (3.8) видно, что разностные схемы (2.6), (2.9), (2.10) безусловно устойчивы для $\tau > 0$.

4. Об экономичности метода и погрешности аппроксимации разностной схемы

Представляют интерес число арифметических действий для нахождения численного решения и аппроксимация (абсолютная устойчивость по начальным данным доказана ниже). Внутри R: $x \in (0 < x_m < d_m,\ m = 1, 2, 3)$ получается $S_1 = (N-1)^3$ разностных уравнений (2.6)–(2.8) или (2.6), (2.9), (2.10) для определения S_1 неизвестных u.

На гранях $x_m = 0$, $x_m = d_m$, $m = 1, 2, 3$, имеем также $S_2 = 6N^2$ конечных алгебраических выражений (2.11) для определения S_2 заданных функций из (2.3).

С учетом абсолютной устойчивости (см. разд. 3) расчет по однородным разностным схемам (2.6)–(2.8) экономичен, так как для получения численного решения в узлах области определения понадобится $O(S_1)$ арифметических действий, пропорциональное числу узлов R.

Пусть существуют ограниченные вплоть до четвертого порядка производные по пространству и по времени от искомой функции. Не умаляя общности, найдем погрешность аппроксимации разностных схем (2.6), (2.9), (2.10) для уравнения (2.1) при $s = f = w = 0$, $v_m = \mathrm{const}$, $w_m = 0$, $g = v_m = 1$, $m = 1, 2, 3$, тогда имеем

$$\tau^{-2} A_1(u^{n+1/3} - 2u^n + u^{n-1}) = \Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^{n-1} + \Lambda_3 u^{n-1}; \tag{4.1}$$

$$\tau^{-2}(A_2 u^{n+2/3} - A_1 u^{n+1/3}) = \Lambda_2(u^{n+2/3} - u^{n-1}) + \tau^{-2}[2(A_2 u^n - A_1 u^n) - (A_2 u^{n-1} - A_1 u^{n-1})]; \tag{4.2}$$

$$\tau^{-2}(A_3 u^{n+1} - A_2 u^{n+2/3}) = \Lambda_3(u^{n+1} - u^{n-1}) + \tau^{-2}[2(A_3 u^n - A_2 u^n) - (A_3 u^{n-1} - A_2 u^{n-1})], \tag{4.3}$$

$$i, j, k = 1, \ldots, N-1.$$

Из выражений (4.3), (4.2) последовательно находим [7]

$$\tau^{-2} A_2 u^{n+2/3} = \tau^{-2} A_3 u^{n+1} - \Lambda_3(u^{n+1} - u^{n-1}) + \tau^{-2}[A_3 u^{n-1} - A_2 u^{n-1} - 2(A_3 u^n - A_2 u^n)],$$

$$\begin{gathered} u^{n+2/3} = (A_2^{-1} A_3) u^{n+1} - \tau^2 A_2^{-1} \Lambda_3 (u^{n+1} - u^{n-1}) + A_2^{-1}(A_3 u^{n-1} - \\ - A_2 u^{n-1}) - 2A_2^{-1}(A_3 u^n - A_2 u^n), \\ u^{n+1/3} = (A_1^{-1} A_2) u^{n+2/3} - \tau^2 A_1^{-1} \Lambda_2 (u^{n+2/3} - u^{n-1}) + A_1^{-1}[A_2 u^{n-1} - \\ - A_1 u^{n-1} - 2(A_2 u^n - A_1 u^n)], \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$u^{n+1/3} = (A_1^{-1}A_2)[(A_2^{-1}A_3)u^{n+1} - \tau^2 A_2^{-1}\Lambda_3(u^{n+1} - u^{n-1}) +$$

$$+A_2^{-1}(A_3u^{n-1} - A_2u^{n-1}) - 2A_2^{-1}(A_3u^n - A_2u^n)] -$$

$$-\tau^2 A_1^{-1}\Lambda_2[(A_2^{-1}A_3)u^{n+1} - \tau^2 A_2^{-1}\Lambda_3(u^{n+1} - u^{n-1}) +$$

$$+A_2^{-1}(A_3u^{n-1} - A_2u^{n-1}) - 2A_2^{-1}(A_3u^n - A_2u^n) - u^{n-1}] +$$

$$+A_1^{-1}[(A_2u^{n-1} - A_1u^{n-1}) - 2(A_2u^n - A_1u^n)]. \tag{4.5}$$

Найдем разностную схему в целых шагах и покажем, что разностные схемы ИИМ — схемы с абсолютной погрешностью аппроксимации на уравнении. Для этого сложим почленно уравнения (4.1)–(4.3). Тогда получим

$$\tau^{-2}[A_3u^{n+1} + A_1(u^{n-1} - 2u^n)] = \Lambda_1 u^{n+1/3} + \Lambda_2 u^{n+2/3} + \Lambda_3 u^{n+1} +$$

$$+2\tau^{-2}(A_3u^n - A_1u^n) - \tau^{-2}(A_3u^{n-1} - A_1u^{n-1}). \tag{4.6}$$

Для нахождения погрешности аппроксимации разностной схемы ИИМ (4.6) исключим из нее величины $u^{n+1/3}$, $u^{n+2/3}$ при помощи формул (4.4), (4.5), тогда она перепишется так:

$$\tau^{-2}A_3(u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}) = \Lambda_1\{(A_2^{-1}A_3)u^{n+1} - \tau^2 A_2^{-1}\Lambda_3(u^{n+1} - u^{n-1}) +$$

$$+A_2^{-1}(A_3u^{n-1} - A_2u^{n-1}) - 2A_2^{-1}(A_3u^n - A_2u^n) - \tau^2 A_1^{-1}\Lambda_2 \times$$

$$\times[(A_2^{-1}A_3)u^{n+1} - \tau^2 A_2^{-1}\Lambda_3(u^{n+1} - u^{n-1}) +$$

$$+A_2^{-1}(A_3u^{n-1} - A_2u^{n-1}) - 2A_2^{-1}(A_3u^n - A_2u^n) - u^{n-1}] +$$

$$+A_1^{-1}(A_2u^{n-1} - A_1u^{n-1}) - 2A_1^{-1}(A_2u^n - A_1u^n)\} +$$

$$+\Lambda_2[(A_2^{-1}A_3)u^{n+1} - \tau^2 A_2^{-1}\Lambda_3(u^{n+1} - u^{n-1}) + A_2^{-1}(A_3u^{n-1} -$$

$$-A_2u^{n-1}) - 2A_2^{-1}(A_3u^n - A_2u^n)] + \Lambda_3 u^{n+1}. \tag{4.7}$$

Используя свойство переместительности [14] симметричных матриц A_m, Λ_m, а также $A_m^{-1}A_q = E$, $m, q = 1, 2, 3$, из (4.7) для уравнения (2.1) окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u_{i,j,k}}{\partial t^2} + \tau^2 \frac{\partial^4 u_{i,j,k}}{12\partial t^4} = \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial^2 u_{i,j,k}}{\partial x_m^2} + O\left(\tau^2 + \sum_{m=1}^{3} h_m^2\right).$$

Таким образом, погрешность аппроксимации разностных схем (4.1)–(4.3) на уравнении (2.1) при $s = f = w = 0$, $v_m = \mathrm{const}$, $w_m = 0$, $g = v_m = 1$, $m = 1, 2, 3$, имеет второй порядок по времени и по пространству. На уравнении (2.1) локальная погрешность аппроксимации разностной схемы (2.6)–(2.8) — $O\left(\tau^2 + \sum\limits_{m=1}^{3} h_m^2\right)$ при $v_m = \mathrm{const}$, $w_m = \mathrm{const}$, $m = 1, 2, 3$. Первое начальное условие из (2.2) удовлетворяется точно, а второе — с погрешностью аппроксимации $O(\tau^2)$ согласно (2.5) [13]. Граничные уравнения из (2.11) на соответствующей грани из (2.3) аппроксимируются точно, так как они заданы от пространственных координат x_m, $m = 1, 2, 3$, и времени явно на целом слое.

5. Сходимость и примеры применения метода

Сходимость разностных схем ИИМ установим на конкретном примере при решении частного трехмерного уравнения (5.1) с начальными условиями (5.2) и граничными значениями первого рода (5.3) в области $R : (0 \le x_m \le b,\ m = 1, 2, 3),\ 0 \le t \le t_k$, с постоянными коэффициентами переноса $C_m = \mathrm{const}$, $m = 1, 2, 3, 4$, на последовательности сгущающихся сеток по τ и h_m, $m = 1, 2, 3$:

$$C_4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_3 \frac{\partial u}{\partial t} = C_2 \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} + w \sum_{\substack{m=1 \\ k \ne m}}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_k} + C_1 \sum_{m=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_m} + F(x, t); \tag{5.1}$$

$$u|_{t=0} = (x_1 - b)^z + x_2^z + x_3^z + 1 = U,\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0; \tag{5.2}$$

$$u|_{x_1=0} = (1 + t^y)[(-b)^z + x_2^z + x_3^z + 1], \quad u|_{x_1=b} = (1 + t^y)(x_2^z + x_3^z + 1),$$

$$u|_{x_2=0} = (1 + t^y)[x_1 - b)^z + x_3^z + 1], \quad u|_{x_2=b} = (1 + t^y)[b^z + (x_1 - b)^z + x_3^z + 1],$$

$$u|_{x_3=0} = (1 + t^y)[(x_1 - b)^z + x_2^z + 1], \quad u|_{x_3=b} = (1 + t^y)[b^z + (x_1 - b)^z + x_2^z + 1]. \tag{5.3}$$

Легко видеть, что задача (5.1)–(5.3) имеет точное решение

$$u = (1 + t^y)[(x_1 - b)^z + x_2^z + x_3^z + 1] \tag{5.4}$$

при условии, что источник F в уравнении (5.1) взят в виде

$$F = Uy[C_4(y - 1)t^{y-2} + C_3 t^{y-1}] -$$

$$-(1 + t^y)z\{C_2 \times (z - 1)[x_3^{z-2} + (x_1 - b)^{z-2} + x_2^{z-2}] + C_1[x_3^{z-1} + (x_1 - b)^{z-1} + x_2^{z-1}]\}.$$

При исследовании сходимости разностных уравнений (2.6), (2.9), (2.10) для решения тестового примера воспользуемся следующими значениями опорных данных: $C_4 = 10^{-4}$, $C_2 = 1$, $C_1 = w = 0$, $z = 4$, $y = 4$, $b = 1$, $N = 21$, $h_m = 0,05$, $m = 1, 2, 3$. Программа составлена на языке Фортран-90, расчет проводился на ПЭВМ Pentium-4 (2.5 ГГц, транслятор Power Station-5) с двойной точностью.

В табл. 1 дается максимальная относительная погрешность $\varepsilon = (u - \tilde{u})100\,\%/u$ (u — точное решение (5.4), $\tilde{u}$ — приближенное численное решение) в момент времени $t_k = 3$ при различных значениях C_3. Видно, что фактический порядок точности разностных схем по τ лучше теоретического, полученного в четвертом разделе статьи на гладких функциях.

Таблица 1.

C_3	0				0.05			
τ	0.004	0.002	0.001	0.0005	0.004	0.002	0.001	0.0005
$\varepsilon, \%$	59	17.5	1.54	0.1	42.4	11.2	1.1	0.26

Таблица 2.

h	0.2	0.1	0.05	0.025
ε, %	2.54	0.77	0.28	0.17

В табл. 2 приведена та же погрешность ε, что и в табл. 1, для различных шагов по пространству при $C_4 = 10^{-2}$, $C_3 = C_1 = w = 0$, $y = 2$, $z = 6$, $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$ и прочих одинаковых входных данных в момент времени $t_k = 1$. Наибольшее время расчета варианта из таблиц составляет не более одной минуты. Из табл. 2 видно, что численное решение задачи сходится к точному при измельчении шагов разностной сетки.

Представляет интерес влияние числа Куранта $\mathrm{Ku} = \tau(C_2/C_4)^{0,5}/h$ на точность численного решения задачи [13]. В табл. 3 дана погрешность ε для опорных данных из табл. 2, различных шагов по пространству и различных C_2: 1; 10; 100, $C_4 = 0,01$ при $\tau_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ и $\tau_2 = 10^{-3}$. Как видно из табл. 3, для улучшения точности расчета целесообразно уменьшать шаг по времени τ. Наконец, в табл. 4 рассмотрена погрешность ε для опорных данных из табл. 1 при $\tau = 10^{-3}$ и различных значениях C_1, C_3, w.

Таким образом, наличие смешанных производных в (5.1) (варианты под номерами 2, 3 и 4 в табл. 4) не ухудшает точность расчета на конкретном тестовом примере.

Рассмотрим решение задачи, аналогичной задаче нахождения колебания прямоугольной мембраны $0 \le x_m \le b$, $m = 1, 2, 3$, с закрепленным краем

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{5.5}$$

вызванные начальным отклонением

$$u|_{t=0} = X_1 X_2 X_3, \tag{5.6}$$

где $X_m = \sin(\pi x_m / b)$, $m = 1, 2, 3$, и начальной скоростью, равной нулю

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{5.7}$$

Если взять точное решение краевой задачи (5.1), (5.5)–(5.7) в виде

$$u = \cos(a\pi t) X_1 X_2 X_3,$$

то источник F в уравнении (5.1) перепишется при $C_3 = C_1 = w = 0$ как

$$F = \pi^2 \cos(a\pi t) \left(\frac{3C_2}{b^2} - C_4 a^2 \right) X_1 X_2 X_3.$$

Таблица 3.

Ku	0.2	0.64	2	0.4	1.28	4	0.8	2.56	8
h	0.1	0.1	0.1	0.05	0.05	0.05	0.025	0.025	0.025
ε_1, %	0.77	0.79	5	0.28	0.61	13.7	0.17	3.8	43.1
Ku	0.1	0.32	1	0.2	0.64	2	0.4	1.28	4
h	0.1	0.1	0.1	0.05	0.05	0.05	0.025	0.025	0.025
ε_2, %	0.72	0.73	0.83	0.232	0.229	1.25	0.1	0.28	22.7

Таблица 4.

№	C_1	C_3	w	ε, %
1	1	0	0	1.59
2	0	0	0.5	1.57
3	0	0.05	0.5	1.12
4	1	0.05	0.5	1.17

Таблица 5.

Ku	1	3.2	10	2	6.4	20	4	12.8	40
C_2	1	10	100	1	10	100	1	10	100
h	0.1	0.1	0.1	0.05	0.05	0.05	0.025	0.025	0.025
ε, %	0.81	0.82	2.65	0.21	0.21	2.01	0.052	0.056	1.85

В табл. 5 дана погрешность ε для $C_4 = 10^{-4}$, $a = 1$, $b = 1$ и различных C_2 при $\tau = 10^{-3}$ в момент времени $t_k = 1$. Как видно, при Ku ≤ 40 ($h = 0.025$, $C_2 = 100$) существует устойчивое численное решение модельной краевой задачи (5.1), (5.5)–(5.7).

Заключение

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1. Для численного решения трехмерного волнового уравнения на основе ИИМ получена разностная схема с абсолютной погрешностью аппроксимации на уравнении для равномерных сеток внутри параллелепипеда $O\left(\tau^2 + \sum\limits_{m=1}^{3} h_m^2\right)$.

2. При постоянных коэффициентах переноса разностные уравнения безусловно устойчивы.

3. На тестовых примерах показана практическая сходимость разностной схемы ИИМ.

Список литературы

[1] Гришин А.М. Об одном видоизменении метода М.Е. Швеца // Инженерно-физический журн. 1970. Т. 19, № 1. С. 84–93.

[2] Гришин А.М., Берцун В.Н. Итерационно-интерполяционный метод и теория сплайнов // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214, № 4. С. 701–704.

[3] Grishin A.M., Bercun V.N. The iterational-interpolation method and spline theory // Sovet. Math. Dokl. 1974. Vol. 15, N 1. P. 222–227.

[4] Гришин А.М. Об одном итерационно-интерполяционном методе // Тр. НИИ прикл. мат. и механики при ТГУ. Томск: Изд-во ТГУ, 1973. С. 45–48.

[5] Гришин А.М., Якимов А.С. Обобщение итерационно-интерполяционного метода для решения трехмерного параболического уравнения общего вида // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 2. С. 26–41.

[6] Якимов А.С. Об одном методе расщепления // Числ. методы механики сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ВЦ; ИТПМ. 1985. Т. 16, № 2. С. 144–161.

[7] Итерационно-интерполяционный метод и его приложения / А.М. Гришин, В.И. Зинченко, К.Н. Ефимов, А.Н. Субботин, А.С. Якимов. Томск: Изд-во ТГУ, 2004.

[8] Марчук Г.И. Методы расщепления. М.: Наука, 1988.

[9] Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

[10] Коновалов А.Н. Метод дробных шагов решения задачи Коши для многомерного уравнения колебаний // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147, № 1. С. 25–27.

[11] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

[12] Дьяконов Е.Г. О применении разностных схем с расщепляющимся оператором для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 4. С. 762–765.

[13] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

[14] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.

Поступила в редакцию 18 апреля 2005 г.,
в переработанном виде — 22 ноября 2006 г.