АЛЬТЕРНИРОВАННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПОНТРЯГИНА СО СМЕШАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Б. М. Мухамедиев, М. Е. Мансурова
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: M_Mansurova@kazsu.kz

The concept of alternated integrals proved to be useful in control theory under the conditions of uncertainty. In this article the concepts of the upper and lower alternated integrals are generalized to the case when the sets of controls depend on phase variables. For these sets the approximation estimations were obtained using the alternated sums under the Hausdorf metric.

Введение

Понятие альтернированного интеграла, которое введено в [1, 2], используется в теории дифференциальных игр, в теории управления в условиях неопределенности. Работы в этом направлении [3–6] продолжаются и в настоящее время.

Альтернированный интеграл можно представить как множество достижимости в обратном времени. В статье [7] это понятие было названо верхним альтернированным интегралом, а в работе [8] дано определение нижнего альтернированного интеграла, которое накладывает менее ограничительные предположения на информированность о ходе процесса.

В ранее опубликованных работах допускалось, что множества управлений зависят лишь от времени. Однако, например, для экономических систем характерно то, что возможности управления расширяются с ростом экономики. В данной статье приведены оценки аппроксимации альтернированными суммами в метрике Хаусдорфа для случая, когда множества управлений зависят от фазовых переменных.

1. Альтернированные интегралы и их дискретные аналоги

Известно, что для простоты всякую линейную систему можно представить в виде

$$\dot{x} = -u + v, \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta. \tag{1}$$

Здесь x — вектор фазового состояния; u — вектор управления; v — вектор неопределенных воздействий на систему, при любой их реализации систему в момент ϑ необходимо привести во множество M. Предполагается, что оно непустое, замкнутое, ограниченное и выпуклое.

Возможности управляющей стороны и реализации неопределенных воздействий ограничены условиями
$$u \in U(x), \quad v \in V, \tag{2}$$
где $U(\cdot)$ — многозначное отображение, V — заданное множество.

Предполагается, что $U(x)$, V — непустые ограниченные замкнутые выпуклые множества при любых возможных значениях вектора состояния x. Возможна также их зависимость от времени t, но здесь для упрощения она не предполагается.

Под решением дифференциального уравнения
$$\dot{x} = -u(t) + v(t),$$
где $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — измеримые на $[t_0, \vartheta]$ функции, понимается абсолютно непрерывная функция $x(\cdot)$, почти всюду на $[t_0, \vartheta]$ удовлетворяющая этому уравнению.

Возьмем произвольные разбиения $\omega = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$, где $t_0 < t_1 < \dots < t_N = \vartheta$. Обозначим $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ и определим $\tau = \max\{\tau_i | 0 \leqslant i \leqslant N-1\}$ — диаметр разбиения ω, что записывается как $\tau = |\omega|$.

Для заданных функций $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ решение уравнения (1) с начальным условием $x(t') = x'$ обозначим через
$$\varphi[t, t', x', u(\cdot), v(\cdot)].$$

Предполагается, что отображение $U(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $K > 0$, т. е.
$$\chi(U(x'), U(x'')) \leqslant K\|x' - x''\|,$$
где $\chi(\cdot,\cdot)$ — расстояние по Хаусдорфу, $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Тогда выполняется условие Каратеодори, что обеспечивает существование решения для (1) и (2) [9].

Понятия верхнего и нижнего альтернированных интегралов связаны с гипотезами информированности о ходе процесса и реализациях функции неопределенных факторов.

При первой гипотезе информированности на каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$ управляющая функция $u_i(\cdot)$ выбирается при известной реализации функции $v_i(\cdot)$ неопределенных воздействий на этом отрезке, а при второй гипотезе выбор $u_i(\cdot)$ происходит без знания $v_i(\cdot)$.

Определим множества допустимых управлений — функций $u_i(\cdot)$ на интервале $[t_i, t_{i+1}]$ при первой гипотезе информированности:
$$U^i(x_i, v_i(\cdot)) = \{u(\cdot) | u(t) \in U(\varphi(t, t_i, x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)), t_i \leqslant t < t_{i+1}\},$$
и при второй гипотезе информированности:
$$U_i(x_i) = \{u(\cdot) | u(t) \in U(\varphi(t, t_i, x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)), t_i \leqslant t < t_{i+1}, \forall v_i(\cdot) \in V_i\},$$
где V_i — совокупность всех измеримых на $[t_i, t_{i+1})$ функций $v(\cdot)$ со значениями из множества V.

Через $\varphi(t_i, t_{i+1}, X, u_i(\cdot), v_i(\cdot))$ обозначим совокупность векторов x_i, таких, что $\varphi(t_{i+1}, t_i, x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)) \in X$, т. е. таких начальных состояний x_i в момент t_i, из которых система при функциях $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ приводится во множество X в момент t_{i+1}.

Для данного разбиения ω определим множества

$$X^N(M) = M, \quad X_N(M) = M,$$

$$X^i(M) = \left\{ x_i | x_i \in \bigcap_{v_i(\cdot) \in V_i} \bigcup_{u_i(\cdot) \in U^i(x_i, v_i(\cdot))} \varphi(t_i, t_{i+1}, X^{i+1}(M), u_i(\cdot), v_i(\cdot)) \right\},$$

$$X_i(M) = \left\{ x_i | x_i \in \bigcup_{u_i(\cdot) \in U_i(x_i)} \bigcap_{v_i(\cdot) \in V_i} \varphi(t_i, t_{i+1}, X_{i+1}(M), u_i(\cdot), v_i(\cdot)) \right\}$$

для $i = N-1, \ldots, 1, 0$.

Лемма 1. *Множество $X^0(M)$ представляет собой совокупность начальных состояний x_0, из которых достижимо конечное множество M при любых реализациях неопределенных воздействий при первой гипотезе информированности.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X^0(M)$. Возьмем любой вектор $x_i \in X^i(M)$. Тогда по определению $X^i(M)$ имеем

$$x_i \in \bigcup_{u_i(\cdot) \in U^i(x_i, v_i(\cdot))} \varphi(t_i, t_{i+1}, X^{i+1}(M), u_i(\cdot), v_i(\cdot))$$

при любых $v_i(\cdot) \in V_i$. Значит, существует $u_i(\cdot) \in U^i(x_i, v_i(\cdot))$, что $x_i \in \varphi(t_i, t_{i+1}, X^{i+1}(M), u_i(\cdot), v_i(\cdot))$. Тогда найдется $x_{i+1} \in X^{i+1}(M)$, для которого $x_i = \varphi(t_i, t_{i+1}, x_{i+1}, u_i(\cdot), v_i(\cdot))$, или иначе

$$x_{i+1} = \varphi(t_{i+1}, t_i, x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)),$$

причем $x_{i+1} \in X^{i+1}(M)$. Следовательно, систему (1), (2) при любых реализациях $v_i(\cdot) \in V_i$ можно из состояния x_i перевести во множество $X^{i+1}(M)$ за счет выбора некоторого $u_i(\cdot) \in U^i(x_i, v_i(\cdot))$.

Тогда, применяя последовательно эти рассуждения для $i = 0, 1, \ldots, N-1$, начиная с $x_0 \in X^0(M)$, получим, что систему можно в момент ϑ вывести во множество M при любых реализациях $v_i(\cdot) \in V_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Докажем обратное. Пусть $x_0 \notin X^0(M)$. Проведем рассуждения для шага i. Если $x_i \notin X^i(M)$, то найдется $v_i(\cdot) \in V_i$, для которого

$$x_i \notin \bigcup_{u_i(\cdot) \in U^i(x_i, v_i(\cdot))} \varphi(t_i, t_{i+1}, X^{i+1}(M), u_i(\cdot), v_i(\cdot)).$$

Тогда для любого $u_i(\cdot) \in U^i(x_i, v_i(\cdot))$ имеем

$$x_i \notin \varphi\left(t_i, t_{i+1} X^{i+1}(M), u_i(\cdot), v_i(\cdot)\right),$$

т. е. $x_i \neq \varphi(t_i, t_{i+1}, x_{i+1}, u_i(\cdot), v_i(\cdot))$ для любого $x_{i+1} \in X^{i+1}(M)$ или

$$x_{i+1} \neq \varphi(t_{i+1}, t_i, x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)),$$

т. е. $\varphi(t_{i+1}, t_i, x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)) \notin X^{i+1}(M)$.

Применяя эти рассуждения для шагов $i = 0, 1, \ldots, N-1$, придем к $x_N \notin M$, т. е. при любых реализациях $v_i(\cdot) \in V_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$ систему невозможно вывести во множество M. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Множество $X_0(M)$ представляет собой совокупность начальных состояний x_0, из которых конечное множество M достижимо при любых реализациях неопределенных воздействий при второй гипотезе информированности.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X_0(M)$. Выберем любой вектор состояния $x_i \in X_i(M)$ на шаге i.

Тогда по определению $X_i(M)$ найдется $u_i(\cdot) \in U_i(x_i)$, такое, что для любого $v_i(\cdot) \in V_i$ состояние $x_i \in \varphi(t_i, t_{i+1}, X_{i+1}(M), u_i(\cdot), v_i(\cdot))$. Значит, существует $x_{i+1} \in X_{i+1}(M)$, для которого $x_i = \varphi(t_i, t_{i+1}, x_{i+1}, u_i(\cdot), v_i(\cdot))$, или

$$x_{i+1} = \varphi(t_{i+1}, t_i, x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)), \quad x_{i+1} \in X_{i+1}(M).$$

Повторяя рассуждения для $i = 0, 1, \ldots, N-1$, придем к $x_N = x(\vartheta) \in M$.

Докажем обратное. Пусть $x_0 \notin X_0(M)$. Возьмем $x_i \notin X_i(M)$ на шаге i. Тогда для любого $u_i(\cdot) \in U_i(x_i)$ найдется $v_i(\cdot) \in V_i$, что

$$x_i \notin \varphi(t_i, t_{i+1}, X_{i+1}(M), u_i(\cdot), v_i(\cdot)).$$

Значит, для любого $x_{i+1} \in X_{i+1}(M)$ будет справедливо

$$x_i \neq \varphi(t_i, t_{i+1}, x_{i+1}, u_i(\cdot), v_i(\cdot))$$

или

$$x_{i+1} \neq \varphi(t_{i+1}, t_i, x_i, u_i(\cdot), v_i(\cdot)), \quad x_{i+1} \notin X_{i+1}(M).$$

Повторяя эти рассуждения для $i = 0, 1, \ldots, N-1$, получим $x_N = x(\vartheta) \notin M$. Лемма доказана. □

Наряду с системой (1)–(3) рассмотрим дискретную систему

$$z_{i+1} = z_i - \tau_i u_i + \tau_i v_i, \tag{3}$$

$$u_i \in U(z_i), \quad v_i \in V, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4}$$

Для нее при первой гипотезе информированности при выборе $u_i \in U(z_i)$ известны x_i и $v_i \in V$, а при второй гипотезе информированности известен лишь вектор состояния x_i на шаге i.

Определим множества

$$H^N(M) = M, \quad H_N(M) = M,$$

$$H^i(M) = \Big\{ z_i | z_i \in \big[H^{i+1}(M) + \tau_i U(z_i) \big] \overset{*}{-} \tau_i V \Big\},$$

$$H_i(M) = \Big\{ z_i | z_i \in \Big[H_{i+1}(M) \overset{*}{-} \tau_i V \Big] + \tau_i U(z_i) \Big\}, \quad i = N-1, \ldots, 1, 0,$$

где $\overset{*}{-}$ означает геометрическую разность множеств.

Лемма 3. *Множество $H^0(M)$ представляет собой множество допустимых начальных состояний z_0 системы (3), (4) при первой гипотезе информированности.*

Доказательство. Возьмем $z_i \in H^i(M)$. Тогда для любого $v_i \in V$ найдется вектор $u_i \in U(z_i)$, для которого $z_i + \tau_i v_i \in H^{i+1}(M) + \tau_i u_i$, т. е.

$$z_{i+1} = z_i - \tau_i u_i + \tau_i v_i \in H^{i+1}(M).$$

Выбрав любое начальное состояние $z_0 \in H^0(M)$ и применяя эти рассуждения последовательно для $i = 0, 1, \ldots, N-1$, придем к $z_N \in H^N(M) = M$.

Докажем обратное. Если $z_i \notin H^i(M)$, то найдется $v_i \in V$ такое, что для любого $u_i \in U(z_i)$ будем иметь

$$z_i \notin H^{i+1}(M) + \tau_i u_i - \tau_i v_i,$$

т. е.

$$z_{i+1} = z_i - \tau_i u_i + \tau_i v_i \notin H^{i+1}(M).$$

Это значит, что если $z_0 \in H^0(M)$, то возможны реализации $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1} \in V$ такие, что при любом выборе $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$ в соответствии с первой гипотезой информированности конечное состояние $z_N \notin H^N(M) = M$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Множество $H_0(M)$ представляет собой множество допустимых начальных состояний системы (3), (4) при второй гипотезе информированности.*

Доказательство. Пусть $z_i \in H_i(M)$. По определению $H_i(M)$ имеем, что существует вектор $u_i \in U(z_i)$ такой, что для любого $v_i \in V$ справедливо

$$z_i \in H_{i+1}(M) + \tau_i u_i - \tau_i v_i$$

т. е.

$$z_{i+1} = z_i - \tau_i u_i + \tau_i v_i \in H_{i+1}(M).$$

При $i = 0 \quad z_0 \in H_0(M)$.

Проводя эти рассуждения для $i = 0, 1, \ldots, N-1$, получим, что можно обеспечить включение $z_N \in H_N(M) = M$ при любых реализациях $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1} \in V$.

Докажем обратное. Возьмем $z_i \notin H_i(M)$. Тогда для любого $u_i \in U(z_i)$ найдется $v_i \in V$ такой, что

$$z_i \notin H_{i+1}(M) + \tau_i u_i - \tau_i v_i$$

или

$$z_{i+1} = z_i - \tau_i u_i + \tau_i v_i \notin H_{i+1}(M).$$

Повторяя эти рассуждения для $i = 0, 1, \ldots, N-1$, можно показать, что если $z_0 \notin H_0(M)$, то при любых стратегиях выбора $u_0 \in U(z_0), \ldots, u_{N-1} \in U(z_{N-1})$ в соответствии со второй гипотезой информированности найдутся реализации $v_0, v_1, \ldots, v_{N-1} \in V$ такие, что $z_N \notin H_N(M) = M$. Лемма доказана. □

Положим

$$X^\omega(M) = X^0(M), \quad X_\omega(M) = X_0(M), \quad H^\omega(M) = H^0(M), \quad H_\omega(M) = H_0(M).$$

Верхним альтернированным интегралом называется множество

$$X^*(M) = \bigcap_\omega X^\omega(M),$$

а нижним альтернированным интегралом — множество

$$X_*(M) = \bigcup_\omega X_\omega(M).$$

Справедливы включения

$$H_\omega(M) \subset H^\omega(M),$$

$$X_\omega(M) \subset X_*(M) \subset X^*(M) \subset X^\omega(M).$$

2. Аппроксимация альтернированных интегралов

При практической реализации альтернированные интегралы заменяются их дискретными аналогами, и необходимо уметь оценить допускаемую при этом погрешность. Для получения оценок используется подход, близкий к [10], но отличающийся от него зависимостью множества управлений от вектора фазовых переменных.

Лемма 5. *Для* $\tau = |\omega|$ *имеет место включение*

$$X^{\omega}(M) \subset H^{\omega}(M + C_1 \tau S),$$

где $C_1 = \dfrac{1}{2} K b T$, $T = \vartheta - t_0$.

Доказательство. По методу математической индукции покажем, что

$$X^i(M) \subset H^i \left(M + \frac{1}{2} K b \sum_{j=i}^{N-1} \tau_j^2 S \right), \quad 0 \leqslant i \leqslant N.$$

Для $i = N$ по определению это включение выполняется как равенство.

Предположим, что данное включение справедливо для номера $i+1$, и покажем, что тогда оно справедливо для номера i, $0 \leqslant i \leqslant N-1$. Учитывая лемму Гроноулла [11], имеем

$$X^i(M) = \left\{ x_i | x_i \in \bigcap_{v_i(\cdot) \in V_i} \bigcup_{u_i(\cdot) \in U^i(x_i, v_i(\cdot))} \left[X^{i+1}(M) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_i(t) dt - \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i(t) dt \right] \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ x_i | x_i \in \left[X^{i+1}(M) + \tau_i U(x_i) + \frac{1}{2} K b \tau_i^2 S \right] \overset{*}{-} \tau_i V \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ x_i | x_i \in \left[H^{i+1}(M) + \frac{1}{2} K b \sum_{j=i}^{N-1} \tau_j^2 S + \tau_i U(x_i) \right] \overset{*}{-} \tau_i V \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ x_i | x_i \in \left[H^{i+1} \left(M + \frac{1}{2} K b \sum_{j=i}^{N-1} \tau_j^2 S \right) + \tau_i U(x_i) \right] \overset{*}{-} \tau_i V \right\} =$$

$$= H^i \left(M + \frac{1}{2} K b \sum_{j=i}^{N-1} \tau_j^2 S \right).$$

Требуемое включение для номера i доказано. Следовательно,

$$X^{\omega}(M) = X^0(M) \subset H^0 \left(M + \frac{1}{2} K b \sum_{j=0}^{N-1} \tau_j^2 S \right) = H^0 \left(M + \frac{1}{2} K b T \tau S \right) =$$

$$= H^{\omega} \left(M + \frac{1}{2} K b T \tau S \right) = H^{\omega} \left(M + \frac{1}{2} C_1 \tau S \right).$$

Лемма доказана. □

Лемма 6. *Справедливо включение*

$$H_\omega(M) \subset X_\omega(M + C_1\tau S),$$

где $C_1 = \dfrac{1}{2}KbT$, $\tau = |\omega|$.

Доказательство. Используя метод математической индукции, покажем, что

$$H_i(M) = X_i\left(M + \frac{1}{2}Kb\sum_{j=i}^{N-1}\tau_j^2 S\right), \quad 0 \leqslant i \leqslant N-1.$$

Для $i = N$ включение выполняется по определению множеств $H_N(M)$ и $X_N(M)$.

Предположим, что требуемое включение имеет место для номера $i+1$, и докажем его для номера i, $0 \leqslant i \leqslant N-1$:

$$H_i(M) = \Big\{z_i | z_i \in \Big[H_{i+1}(M) \overset{*}{-} \tau_i V\Big] + \tau_i U(z_i)\Big\} \subset$$

$$\subset \left\{z_i | z_i \in \left[X_{i+1}\left(M + \frac{1}{2}Kb\sum_{j=i+1}^{N-1}\tau_j^2 S\right) \overset{*}{-} \tau_i V\right] + \tau_i U(z_i)\right\} \subset$$

$$\subset \left\{z_i | z_i \in \bigcup_{u_i(\cdot)\in U_i(z)}\ \bigcap_{v_i(\cdot)\in V}\left[X_{i+1}\left(M + b\sum_{j=i+1}^{N-1}\tau_j^2 S\right) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i(t)dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_i(t)dt +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}Kb\tau_i^2 S\right]\right\} \subset \left\{z_i | z_i \in \bigcup_{u_i(\cdot)\in U_i(z)}\ \bigcap_{v_i(\cdot)\in V}\left[X_{i+1}\left(M + \frac{1}{2}Kb\sum_{j=i}^{N-1}\tau_j^2 S\right) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_i(t)dt +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_i(t)dt\right]\right\} = X_i\left(M + \frac{1}{2}Kb\sum_{j=i}^{N-1}\tau_j^2 S\right).$$

Тогда для номера $i = 0$ имеем

$$H_\omega(M) \subset H_0(M) \subset X_0\left(M + \frac{1}{2}Kb\sum_{j=0}^{N-1}\tau_j^2 S\right) \subset X_\omega\left(M + \frac{1}{2}KbT\tau S\right) = X_\omega\left(M + C_1\tau S\right).$$

Лемма доказана. □

Предположим, что $\alpha S \subset V \subset \beta S$.

Лемма 7. *Справедливо включение*

$$H^\omega(M) \subset H_\omega(M + \beta\tau S) \overset{*}{-} \alpha\tau S.$$

Доказательство. Для $i = N$ имеем $H^N(M) = H_N(M)$. Покажем, что

$$H^i(M) \subset \begin{cases} H_i(M + \tau_{i+1}V) \overset{*}{-} \tau_{i+1}V, & \text{если } \tau_{i+1} \geqslant \tau_i; \\ H_i(M + \tau_i V) \overset{*}{-} \tau_i V, & \text{если } \tau_i > \tau_{i+1}. \end{cases}$$

Предположим, что это включение справедливо для номера $i+1$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$:

$$H^i(M) \subset \Big\{z_i | z_i \in \big[H^{i+1}(M) + \tau_i U(z_i)\big] \overset{*}{-} \tau_i V\Big\},$$

В случае $\tau_{i+1} \geqslant \tau_i$

$$H^i(M) \subset \Big\{z_i | z_i \in \Big[H_{i+1}(M + \tau_{i+1} V) \overset{*}{-} \tau_{i+1} V + \tau_i U(z_i)\Big] \overset{*}{-} \tau_i V\Big\} \subset$$

$$\subset \Big\{z_i | z_i \in \Big[H_{i+1}(M + \tau_{i+1} V) \overset{*}{-} \tau_i V + \tau_i U(z_i)\Big] \overset{*}{-} \tau_{i+1} V\Big\} =$$

$$= \Big\{z_i | z_i \in H_i(M + \tau_{i+1} V) \overset{*}{-} \tau_{i+1} V\Big\},$$

а в случае $\tau_i > \tau_{i+1}$

$$H^i(M) \subset \Big\{z_i | z_i \in \Big[H_{i+1}(M + \tau_{i+1} V) \overset{*}{-} \tau_{i+1} V + \tau_i U(z_i)\Big] \overset{*}{-} \tau_i V\Big\} \subset$$

$$\subset \Big\{z_i | z_i \in \Big[H_{i+1}(M + \tau_i V) \overset{*}{-} \tau_i V + \tau_i U(z_i)\Big] \overset{*}{-} \tau_i V\Big\} = H_i(M + \tau_i V) \overset{*}{-} \tau_i V.$$

Повторяя рассуждения для $i = N-1, \ldots, 1, 0$, придем к

$$H^0(M) \subset \Big\{z_0 | z_0 \in H_0(M + \tau_i V) \overset{*}{-} \tau V\Big\},$$

поскольку $\tau = \max\{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{N-1}\}$.

Отсюда и из $\alpha S \subset V \subset \beta S$ следует требуемое включение. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Пусть $r_0 S \subset M$, $r_0 > 0$, и $V \subset U(z)$ для любых значений z. Тогда*

$$r_0 S \subset H^\omega(M).$$

Доказательство. Проведем доказательство по методу математической индукции. Для $i = N$: $r_0 S \subset M = H^\omega(M)$. Допустим, что $r_0 S \subset H^{i+1}(M)$. Тогда для номера i имеем

$$H^i(M) \subset \Big\{z_i | z_i \in \big[H^{i+1}(M) + \tau_i U(z_i)\big] \overset{*}{-} \tau_i V\Big\} \supset \Big\{z_i | z_i \in \Big[r_0 S + \tau_i (U(z_i) \overset{*}{-} V)\Big]\Big\} \supset r_0 S.$$

Лемма доказана. □

Лемма 9. *Пусть $M \subset R_0 S$, $R_0 > 0$, $U(z) \subset qS$, $q>0$, для всех значений z. Тогда*

$$H^\omega(M) \subset [R_0 + T(q - \alpha)]S.$$

Доказательство. Для $i = N$ имеем $H^N(M) \subset R_0 S$. Покажем, что

$$H^i(M) \subset \left[R_0 + \sum_{j=i}^{N-1} \tau_j (q - \alpha)\right] S.$$

Предположим, что это включение справедливо для номера $i+1$. Докажем его для номера i.

$$H^i(M) \subset \Big\{z_i | z_i \in \big[H^{i+1}(M) + \tau_i U(z_i)\big] \overset{*}{-} \tau_i V\Big\} \subset$$

$$\subset \left\{z_i | z_i \in \left[R_0 + \sum_{j=i+1}^{N-1} \tau_j (q - \alpha) S + \tau_i q S\right] \overset{*}{-} \tau_i \alpha S\right\} =$$

$$= \left\{z_i | z_i \in \left[R_0 + \sum_{j=i}^{N-1} \tau_j (q - \alpha)\right] S\right\} = \left[R_0 + \sum_{j=i}^{N-1} \tau_j (q - \alpha)\right] S.$$

Включение доказано. Для $i = 0$ получим

$$H^\omega(M) = H^0(M) \subset [R_0 + T(q-\alpha)]S.$$

Лемма доказана. □

Лемма 10. *Пусть $V \subset U(z)$ для любых z, $r_0 S \subset M$. Тогда*

$$H^\omega(M + \mu S) \subset \left(1 + \frac{\mu}{r_0}\right) H^\omega(M).$$

Доказательство. Покажем, что справедливо включение

$$H^i(M + \mu S) \subset \left(1 + \frac{\mu}{r_0}\right) H^i(M), \quad 0 \leqslant i \leqslant N.$$

Для $i = N$ выполняется

$$H^N(M + \mu S) = M + \mu S \subset M + \frac{\mu}{r_0} M = \left(1 + \frac{\mu}{r_0}\right) M = \left(1 + \frac{\mu}{r_0}\right) H^N(M).$$

Предположим, что требуемое включение справедливо для номера $i+1$, и докажем его для номера i.

$$H^i(M + \mu S) = \Big\{ z_i | z_i \in \left[H^{i+1}(M + \mu S) + \tau_i U(z_i)\right] \overset{*}{-} \tau_i V \Big\} \subset$$

$$\subset \left\{ z_i | z_i \in \left[\left(1 + \frac{\mu}{r_0}\right) H^{i+1}(M) + \left(1 + \frac{\mu}{r_0}\right) \tau_i U(z_i)\right] \overset{*}{-} \left(\frac{\mu}{r_0} \tau_i U(z_i) + \tau_i V\right) \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ z_i | z_i \in \left(1 + \frac{\mu}{r_0}\right) \left[H^{i+1}(M) + \tau_i U(z_i)\right] \overset{*}{-} \tau_i V \right\} = \left(1 + \frac{\mu}{r_0}\right) H^i(M).$$

Так как $H^0(M) = H^\omega(M)$, то лемма доказана. □

Теорема 1. *Для любого разбиения ω в условиях лемм 5–10 имеют место включения*

$$H_\omega(M \overset{*}{-} C_1 \tau S) \subset X_*(M) \subset X^*(M) \subset H^\omega(M + C_1 \tau S),$$

причем расстояние по Хаусдорфу

$$\chi\left(H_\omega(M \overset{*}{-} C_1 \tau S), H^\omega(M + C_1 \tau S)\right) \leqslant C\tau,$$

где

$$C = (R_0 + T(q-\alpha)) \left[\frac{r}{\rho}(C_1 + \beta) + C_1\right] - \alpha.$$

Доказательство. Включения следуют из лемм 5 и 6 с учетом того, что для любого разбиения ω и любого множества M справедливы включения

$$X_\omega(M) \subset X_*(M), \quad X_*(M) \subset X^*(M), \quad X^*(M) \subset X^\omega(M).$$

Теперь получим оценку для расстояния по Хаусдорфу для разбиения с диаметром $\tau = |\omega|$. Согласно лемме 7 справедливо включение

$$H^\omega(M \overset{*}{-} (C_1 + \beta)\tau S) \subset H_\omega(M \overset{*}{-} (C_1 + \beta)\tau S + \beta \tau S) \overset{*}{-} \alpha \tau S \subset H_\omega(M \overset{*}{-} C_1 \tau S) \overset{*}{-} \alpha \tau S.$$

Тогда
$$H^{\omega}(M \overset{*}{-} (C_1+\beta)\tau S) + \alpha\tau S \subset H_{\omega}(M \overset{*}{-} C_1\tau S) \subset H^{\omega}(M + C_1\tau S).$$
Значит, требуемая оценка для расстояния по Хаусдорфу может быть получена как отклонение множества в правой части включений от множества в их левой части.

Воспользуемся следствием 2.2 из [10, с. 57]. Если
$$\rho S \subset M \overset{*}{-} (C_1+\beta)\tau S \subset rS,$$
где ρ, r — некоторые положительные числа, то
$$M \subset M \overset{*}{-} (C_1+\beta)\tau S + \frac{r}{\rho}(C_1+\beta)\tau S.$$
Тогда на основании лемм 9 и 10
$$H^{\omega}(M + C_1\tau\, S) \subset H^{\omega}\left(M \overset{*}{-} (C_1+\beta)\tau S + \frac{\tau}{\rho}(C_1+\beta)\,\tau S + C_1\tau S\right) \subset$$
$$\subset \left[1 + \left(\frac{r}{\rho}(C_1+\beta) + C_1\right)\tau\right] H^{\omega}\left(M \overset{*}{-} (C_1+\beta)\tau\, S\right) \subset H^{\omega}\left(M \overset{*}{-} (C_1+\beta)\tau\, S\right) +$$
$$+ (R_0 + T\,(q-\alpha))\left(\left(\frac{r}{\rho}+1\right)C_1 + \frac{r}{\rho}C_1\right)\tau\, S = H^{\omega}\left(M \overset{*}{-} (C_1+\beta)\tau\, S\right) + \alpha\tau\, S + C\tau\, S,$$
где обозначено
$$C = (R_0 + T\,(q-\alpha))\left(\frac{r}{\rho}(C_1+\beta) + C_1\right) - \alpha.$$
Лемма доказана. □

Список литературы

[1] Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. Ч. 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1280.

[2] Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. Ч. 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.

[3] Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[4] Петросян Л.А. Дифференциальные игры с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195.

[5] Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И. О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.

[6] Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1988.

[7] Азамов А. О втором методе Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Математический сборник. 1982. Т. 118(160). С. 422–430.

[8] Никольский М.С. О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Математический сборник. 1985. Т. 128(170), № 1(9). С. 35–49.

[9] Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

[10] Мухамедиев Б.М. Математические методы оценивания потенциальных возможностей экономики и управления экономической динамикой в условиях неопределенности. Алма-Ата: КазГУ, 1998.

[11] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 7 февраля 2007 г.