

# ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МОДЕЛЕЙ СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

И. М. БОНДАРЬ, А. И. БОНДАРЬ

*Новосибирский государственный  
архитектурно-строительный университет, Россия*

Various approximate models describing movements of a body with one fixed point are presented assuming that the angular velocity of rotation is much greater than the angular velocity of rotation of the axis. Models of the first and the second order have been constructed. Invariance of the first order models on the Euler angles is proved. Conditions for stability of a spherical motion are determined and an equation describing small amplitude stable oscillations of a body is derived.

## Введение

При построении различных моделей сферического движения мы обратили внимание на различие моделей первого приближения, построенных на основе динамических уравнений Эйлера в проекциях на неподвижные оси и в проекциях на подвижные оси. Модели первого приближения удобно использовать в том случае, если угловая скорость собственного вращения тела  $\vec{\omega}_0$  значительно больше угловой скорости вращения оси  $\vec{\omega}_1$  (например, модель вращения волчка). При таком условии можно считать, что углы поворота оси вращения и соответствующие угловые скорости — малые величины. В данной работе исследуются различные варианты построения моделей такого движения. Получены условия устойчивого сферического движения тела и уравнения малых колебаний при его устойчивом движении.

## 1. Преобразование координат в моделях первого и второго приближения

Рассматривается движение твердого тела, имеющего неподвижную точку  $O$ , через которую проходит его ось вращения. Основным движением предполагается вращение тела относительно этой оси с угловой скоростью  $\vec{\omega}_0$ ,  $\vec{\omega}_0 = \text{const}$ . Пусть  $Oxyz$  — подвижная система координат,  $O\xi\eta\zeta$  — неподвижная система координат (рис. 1), центры которых совпадают с неподвижной точкой  $O$ . Ось вращения тела совпадает с осью  $Oz$ . Угловая скорость вращения оси  $\vec{\omega}_1$ , при этом  $\omega_0 \gg \omega_1$ .

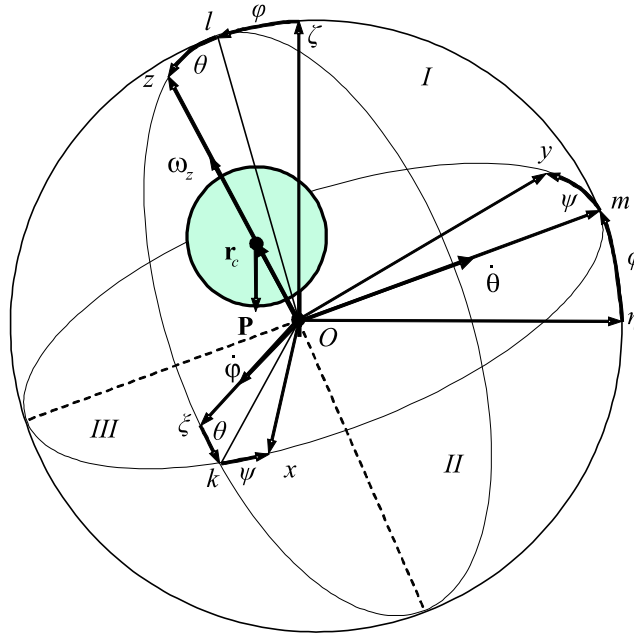


Рис. 1.

В произвольный момент времени ориентация системы  $Oxyz$  относительно системы  $O\xi\eta\zeta$  может быть определена тремя углами Эйлера —  $\varphi, \psi, \theta$  [1]. Под моделями первого и второго приближения будем понимать модели сферического движения, в которых углы  $\varphi, \psi, \theta$  являются малыми величинами. Предположим, что угловые скорости поворотов  $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$  также малы. В моделях первого приближения будем считать, что для малых величин  $\alpha, \beta$  имеют место соотношения  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\alpha \cdot \beta \approx 0$ . В моделях второго приближения  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ ,  $\alpha \cdot \beta \neq 0$ . Величины выше второго порядка малости считаются равными нулю.

Пусть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы координатных осей  $Ox, Oy, Oz$ ;  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$  — единичные векторы координатных осей  $O\xi, O\eta, O\zeta$ . Получим выражения векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  через векторы  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$  и углы Эйлера. Переход от системы  $Oxyz$  к системе  $O\xi\eta\zeta$  можно осуществить при помощи трех последовательных поворотов: на угол  $\varphi$  вокруг оси  $O\xi$ , на угол  $\theta$  вокруг оси  $Om$  и на угол  $\psi$  вокруг оси  $Oz$ . Все повороты производятся против часовой стрелки при рассмотрении их с конца соответствующей оси. При первом повороте на угол  $\varphi$  мы переводим систему  $Oxyz$  в промежуточное положение  $O\xi ml$ . Соответствующий переход задается матрицей  $A_1$ , которая с учетом малости величины  $\varphi$  будет иметь следующий вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi \\ 0 & -\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

Первоначальный поворот на угол  $\theta$  вокруг оси  $O\eta$  задается матрицей  $A_2$ :

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица перехода векторов

	$\vec{l}$	$\vec{m}$	$\vec{n}$
$\vec{i}$	1	$\psi$	$-\theta$
$\vec{j}$	$-\psi$	1	$\varphi$
$\vec{k}$	$\theta$	$-\varphi$	1

Первоначальный поворот на угол  $\psi$  вокруг оси  $O\zeta$  задается матрицей  $A_3$ :

$$A_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \psi & 0 \\ -\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, определив проекции векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  на координатные оси системы  $O\xi\eta\zeta$ , что последовательный поворот сначала на угол  $\varphi$ , потом на угол  $\theta$  задается матрицей

$$A_2A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi \\ 0 & -\varphi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & \varphi \\ 0 & -\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

Конечный поворот системы  $Oxyz$  из начального положения в произвольное положение в случае изменения углов в порядке  $\varphi, \theta, \psi$  задается матрицей  $A$ , являющейся произведением трех матриц  $A = A_3A_2A_1$ :

$$A = A_3(A_2 \cdot A_1) = \begin{pmatrix} 1 & \psi & 0 \\ -\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & \varphi \\ 0 & -\varphi & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \psi & -\theta \\ -\psi & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

Такой алгоритм преобразования координат, когда матрицы преобразования составляются для поворотов системы  $Oxyz$  относительно системы  $O\xi\eta\zeta$  на каждый из трех углов из начального положения, проще, чем алгоритм преобразования координат, приведенный в [1], где второй и третий повороты системы производятся из промежуточных состояний.

Поскольку операция перемножения матриц не обладает свойством коммутативности, то в общем случае конечные повороты системы  $Oxyz$  некоммутативны. Это означает, что в общем случае ориентация системы  $Oxyz$  относительно системы  $O\xi\eta\zeta$ , получаемая в результате двух последовательных поворотов, зависит от порядка выполнения этих поворотов. Однако в случае малых углов  $\psi, \theta, \varphi$  с точностью до малых первого порядка перемножение матриц коммутативно. Действительно, с учетом, что  $\psi \cdot \theta = 0$ , получим

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varphi \\ 0 & -\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & \varphi \\ \theta & -\varphi & 1 \end{pmatrix} = A_2A_1.$$

Следовательно, в моделях первого приближения перемещения подвижной системы  $Oxyz$  относительно неподвижной системы  $O\xi\eta\zeta$  не зависят от порядка изменения углов Эйлера, т. е. преобразования координат в моделях первого приближения инвариантны относительно порядка изменения малых углов Эйлера.

Теперь, используя матрицу конечного поворота  $A$ , можно построить таблицу перехода от единичных векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  к единичным векторам  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$  и наоборот.

Если поворот осуществляется по часовой стрелке, то соответствующий угол в таблице меняет свой знак. В случае, когда поворот производится только на два угла, например, на углы  $\varphi, \theta$ , в таблице значение  $\psi$  заменяется нулем.

Для моделей второго приближения ориентация системы  $Oxyz$  относительно системы  $O\xi\eta\zeta$ , получаемая в результате двух последовательных поворотов, зависит от порядка выполнения этих поворотов. Если в матрицах перехода определять значения до второго порядка малости, то для малого угла  $\alpha$  можно оставить в матрицах  $\cos \alpha$ . В этом случае получим

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \varphi \\ 0 & -\varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$A_2 A_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \varphi \\ 0 & -\varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \varphi \theta & -\theta \\ 0 & \cos \varphi & \varphi \\ \theta & -\varphi & \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \varphi \\ 0 & -\varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\theta \\ \varphi \theta & \cos \varphi & \varphi \\ \theta & -\varphi & \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$A_1 A_2 \neq A_2 A_1.$$

Следовательно, преобразования координат в моделях второго приближения не инвариантны относительно порядка изменения малых углов Эйлера.

## 2. Угловая скорость вращения

Рассмотрим последовательность поворотов системы  $Oxyz$  относительно системы  $O\xi\eta\zeta$  на углы  $\varphi, \theta, \psi$  с соответствующими угловыми скоростями  $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ . Тогда угловая скорость  $\vec{\omega}_1$  выразится как

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\varphi} + \vec{\theta} + \vec{\psi} = \omega_{1x}\vec{i} + \omega_{1y}\vec{j} + \omega_{1z}\vec{k} = \omega_{1\xi}\vec{l} + \omega_{1\eta}\vec{m} + \omega_{1\zeta}\vec{n}.$$

Получим проекции вектора  $\vec{\omega}_1$  на оси системы  $Oxyz$  и системы  $O\xi\eta\zeta$ . В соответствии с рис. 1 и таблицей переходов от единичных векторов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  к единичным векторам  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$  и наоборот будем иметь:

1) вектор  $\vec{\varphi}$  направлен вдоль оси  $O\xi$ , следовательно,

$$\vec{\varphi} = \dot{\varphi} \cdot \vec{l} = \dot{\varphi}(\vec{i} - \psi\vec{j} + \theta\vec{k}) = \dot{\varphi} \cdot \vec{i};$$

2) вектор  $\vec{\theta}$ , направленный вдоль промежуточной оси  $Om$ , лежит в плоскости, проходящей через оси  $Ox, Oy$  (эта плоскость на рисунке обозначена цифрой III). Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{\theta} &= \dot{\theta}_x \vec{i} + \dot{\theta}_y \vec{j} = \dot{\theta} \sin \psi \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cos \psi \cdot \vec{j} = \dot{\theta} \psi \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cdot \vec{j} = \\ &= \dot{\theta} \cdot \vec{j} = \dot{\theta}(-\psi \cdot \vec{l} + \vec{m} + \varphi \cdot \vec{n}) = \dot{\theta} \cdot \vec{m}; \end{aligned}$$

3) аналогично  $\vec{\psi} = \dot{\psi} \cdot \vec{k} = \dot{\psi}(\theta \cdot \vec{l} - \varphi \cdot \vec{m} + \vec{n}) = \dot{\psi} \cdot \vec{n}$ .

Таким образом,  $\omega_x = \omega_\xi = \dot{\varphi}$ ,  $\omega_y = \omega_\eta = \dot{\theta}$ ,  $\omega_z = \omega_\zeta = \dot{\psi}$ ,

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\varphi} \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cdot \vec{j} + \dot{\psi} \cdot \vec{k} = \dot{\varphi} \cdot \vec{l} + \dot{\theta} \cdot \vec{m} + \dot{\psi} \cdot \vec{n}.$$

Мы получили, что в моделях первого приближения проекции угловой скорости  $\vec{\omega}_1$  на оси систем  $Oxyz$  и  $O\xi\eta\zeta$  равны. Тогда полная угловая скорость  $\vec{\omega}$  сферического движения тела выразится формулой  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_0$ .

Ее проекции на оси системы  $Oxyz$  будут

$$\omega_x = \omega_{1x} = \dot{\varphi}, \quad \omega_y = \omega_{1y} = \dot{\theta}, \quad \omega_z = \omega_{1z} + \omega_0 = \dot{\psi} + \omega_0,$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cdot \vec{j} + (\dot{\psi} + \omega_0) \cdot \vec{k}. \quad (2)$$

Выражая векторы  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  через векторы  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$ , получим выражения угловой скорости  $\vec{\omega}$  в проекциях на оси системы  $O\xi\eta\zeta$ :

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\varphi}(\vec{l} + \psi\vec{m} - \theta\vec{n}) + \dot{\theta}(-\psi\vec{l} + \vec{m} + \varphi\vec{n}) + (\dot{\psi} + \omega_0)(\theta\vec{l} - \varphi\vec{m} + \vec{n}) = \\ &= (\dot{\varphi} + \omega_0\theta) \cdot \vec{l} + (\dot{\theta} - \omega_0\varphi) \cdot \vec{m} + (\dot{\psi} + \omega_0) \cdot \vec{n}. \end{aligned} \quad (3)$$

При построении моделей первого приближения сферического движения можно воспользоваться либо динамическими уравнениями Эйлера, либо уравнениями Лагранжа второго рода. Рассмотрим оба варианта построения моделей.

### 3. Модель в проекциях на подвижные оси

Для получения уравнений сферического движения воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента относительно основной (неподвижной) системы координат  $O\xi\eta\zeta$ . Пусть  $\vec{K}_O$  — кинетический момент тела относительно неподвижного центра  $O$  (рис. 1),  $\vec{M}_O$  — главный момент внешних сил относительно того же центра. Тогда

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O.$$

Обозначим  $A, B, C$  — моменты инерции тела относительно осей  $Ox, Oy, Oz$  соответственно. Тогда проекции кинетического момента на оси системы  $Oxyz$  будут иметь вид

$$K_x = A\omega_x = A\dot{\varphi}, \quad K_y = B\dot{\theta}, \quad K_z = C(\dot{\psi} + \omega_0).$$

По формуле абсолютной и относительной производных получим

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_O.$$

Здесь  $\frac{d\vec{K}_O}{dt}$  — производная вектора  $\vec{K}_O$  в системе  $O\xi\eta\zeta$  (абсолютная производная),  $\frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt}$  — производная того же вектора в системе  $Oxyz$  (относительная производная),  $\vec{\omega}_1$  — угловая скорость вращения системы  $Oxyz$  относительно системы  $O\xi\eta\zeta$ . Следовательно,

$$\frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_O = \vec{M}_O,$$

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(K_x\vec{i} + K_y\vec{j} + K_z\vec{k}) = \frac{d}{dt}(A\dot{\varphi}\vec{i} + B\dot{\theta}\vec{j} + C(\dot{\psi} + \omega_0)\vec{k}) = A\ddot{\varphi}\vec{i} + B\ddot{\theta}\vec{j} + C\ddot{\psi}\vec{k},$$

$$\omega_0 = \text{const},$$

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{K}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\varphi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \\ A\dot{\varphi} & B\dot{\theta} & C(\dot{\psi} + \omega_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} [C\dot{\theta}(\dot{\psi} + \omega_0) - B\dot{\psi}\dot{\theta}] - \vec{j} [C\dot{\varphi}(\dot{\psi} + \omega_0) - A\dot{\varphi}\dot{\psi}] + \vec{k}(B\dot{\varphi}\dot{\theta} - A\dot{\varphi}\dot{\theta}) = \\ = \vec{i} \cdot C\dot{\theta}\omega_0 - \vec{j} \cdot C\dot{\varphi}\omega_0.$$

Таким образом,

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = A\ddot{\varphi}\vec{i} + B\ddot{\theta}\vec{j} + C\ddot{\psi}\vec{k} + C\omega_0\dot{\theta}\vec{i} - C\omega_0\dot{\varphi}\vec{j}.$$

Пусть  $\vec{P} = m\vec{g}$  — вес тела, приложенный в центре масс тела  $C$ . Координаты точки  $C$  в системе  $Oxyz$  будут  $x_c = 0$ ,  $y_c = 0$ ,  $z_c = R$ . Тогда  $\vec{P} = -mg\vec{n}$ . Главный момент внешних сил относительно центра  $O$  равен  $\vec{M}_O = \vec{r}_c \times \vec{P} = -mg\vec{r}_c \times \vec{n}$ , где  $\vec{r}_c$  — радиус-вектор центра масс тела относительно опорной точки  $O$ . Единичный вектор  $\vec{n}$  определяется согласно таблице переходов от векторов  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$  к векторам  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ :  $\vec{n} = -\theta\vec{i} + \varphi\vec{j} + \vec{k}$ .

Тогда для момента  $\vec{M}_O$  получим

$$\vec{M}_O = mg \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\theta & \varphi & 1 \\ 0 & 0 & R \end{vmatrix} = mgR(\varphi\vec{i} + \theta\vec{j}).$$

Следовательно,  $M_x = mgR\varphi$ ,  $M_y = mgR\theta$ ,  $M_z = 0$ .

В проекциях на координатные оси подвижной системы координат  $Oxyz$  получаем дифференциальные уравнения движения тела

$$A\ddot{\varphi} + C\omega_0\dot{\theta} = mgR\varphi,$$

$$B\ddot{\theta} - C\omega_0\dot{\varphi} = mgR\theta,$$

$$C\ddot{\psi} = 0.$$

Из последнего уравнения  $\ddot{\psi} = 0$ ,  $\dot{\psi} = c = \text{const}$ ,  $\psi = ct + c_1$ .

Полагая  $c = 0$ ,  $c_1 = 0$ , получим  $\psi = 0$  для любых  $t$ . Это значит, что угол  $\psi$  и угловую скорость  $\dot{\psi}$  можно исключить из рассмотрения. Тогда первые два уравнения примут вид

$$\begin{cases} A\ddot{\varphi} + C\dot{\theta}\omega_0 = mgR\varphi, \\ B\ddot{\theta} - C\dot{\varphi}\omega_0 = mgR\theta. \end{cases} \quad (4)$$

Это модель сферического движения тела по первому приближению, построенная на основе динамических уравнений Эйлера в проекциях на подвижные оси координат.

При построении модели первого приближения в проекциях на оси системы  $Oxyz$  условие, что система жестко не связана с вращающимся телом, обязательно. Если это не так, то угол  $\psi$  не является малым и тогда модель первого приближения нельзя строить. Эта ошибка допущена в [2] при построении модели первого приближения вращения волчка.

Действительно, если мы жестко свяжем тело с подвижной системой координат, то тогда  $\dot{\psi} = \omega_0$ ,  $\psi = \omega_0 t$ ,  $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$  и

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1 \times \vec{K}_O &= \vec{\omega} \times \vec{K}_O = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{\varphi} & \dot{\theta} & \omega_0 \\ A\dot{\varphi} & B\dot{\theta} & C\omega_0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(C\omega_0\dot{\theta} - B\omega_0\dot{\theta}) - \vec{j}(C\omega_0\dot{\varphi} - A\omega_0\dot{\varphi}) + \vec{k}(B\dot{\varphi}\dot{\theta} - A\dot{\varphi}\dot{\theta}). \end{aligned}$$

С учетом малости величин

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = A\ddot{\varphi}\vec{i} + B\ddot{\theta}\vec{j} + C\dot{\omega}_0\vec{k} + (C - B)\omega_0\dot{\theta}\vec{i} - (C - A)\omega_0\dot{\varphi}\vec{j}.$$

Соответствующие дифференциальные уравнения движения будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} A\ddot{\varphi} + (C - B)\dot{\theta}\omega_0 = mgR\varphi, \\ B\ddot{\theta} - (C - A)\dot{\varphi}\omega_0 = mgR\theta. \end{cases} \quad (5)$$

Эта модель при  $A = B$  совпадает с моделью, полученной в [2], но она ошибочна, так как отличается от верной модели (4) коэффициентами гироскопической связи.

## 4. Инвариантность модели первого приближения

Если угол  $\psi$  не рассматривать, тогда возможны два варианта поворота системы  $Oxyz$  относительно системы  $O\xi\eta\zeta$ :

1) поворот на угол  $\varphi$ , затем поворот на угол  $\theta$  (это преобразование определяется матрицей переходов  $A^{(1)} = A_2A_1$ , рис. 2);

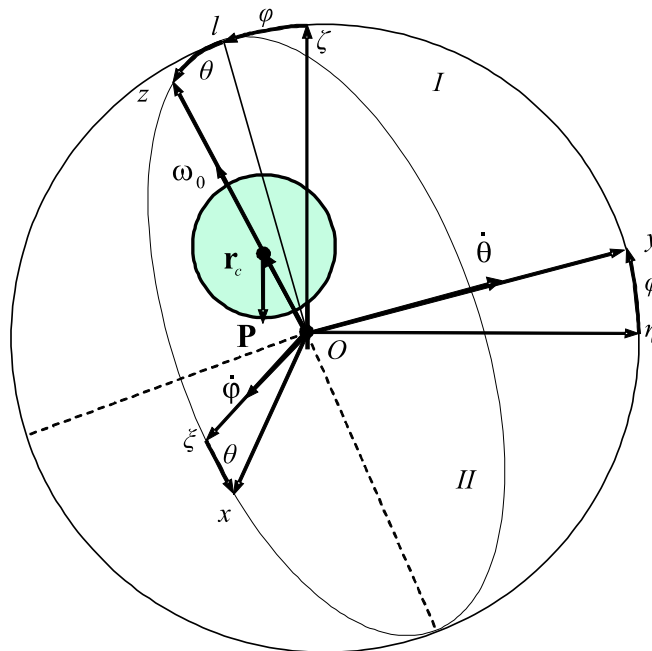


Рис. 2.

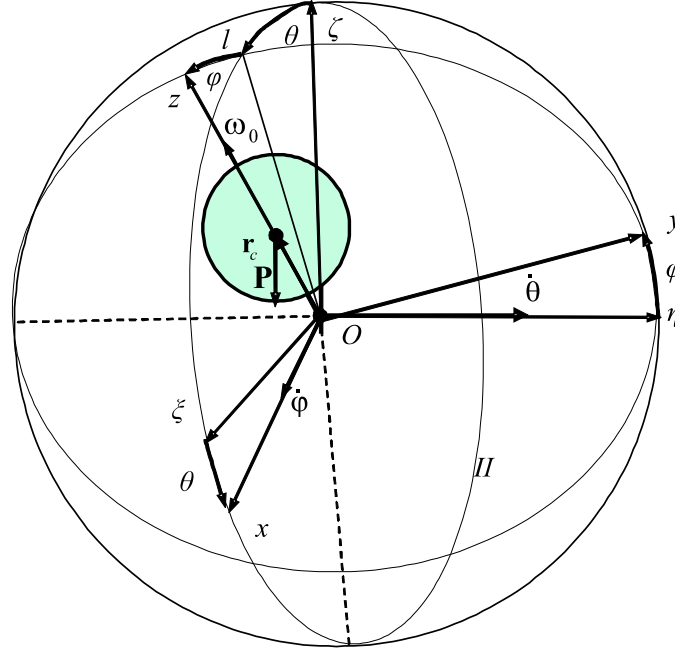


Рис. 3.

2) поворот на угол  $\theta$ , затем поворот на угол  $\varphi$  (это преобразование определяется матрицей перехода  $A^{(2)} = A_1 A_2$ , рис. 3).

Соответствующие угловые скорости с точностью до малых величин первого порядка равны

$$\begin{aligned}\vec{\omega}^1 &= \dot{\varphi} \cos \theta \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cdot \vec{j} + (\dot{\varphi} \sin \theta + \omega_0) \cdot \vec{k} = \dot{\varphi} \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cdot \vec{j} + \omega_0 \cdot \vec{k}, \\ \vec{\omega}^2 &= \dot{\varphi} \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cos \varphi \cdot \vec{j} + (\omega_0 - \dot{\theta} \sin \varphi) \cdot \vec{k} = \dot{\varphi} \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cdot \vec{j} + \omega_0 \cdot \vec{k}, \\ \vec{\omega}^{(1)} &= \vec{\omega}^{(2)} = \vec{\omega}.\end{aligned}$$

Если угловая скорость сферического движения тела не зависит от порядка изменения углов Эйлера, то этим же свойством обладает и кинетический момент тела относительно неподвижного центра. А это означает, что *модели первого приближения инвариантны относительно порядка изменения малых углов Эйлера*.

## 5. Проектирование на оси неподвижной системы координат

Построим модель движения тела в проекциях на неподвижные оси координат системы  $O\xi\eta\zeta$ .

Определим проекции кинетического момента  $\vec{K}_O$  на оси неподвижной системы координат. Имеем

$$\begin{aligned}\vec{K}_O &= A\dot{\varphi} \cdot \vec{i} + B\dot{\theta} \cdot \vec{j} + C\omega_0 \cdot \vec{k} = \\ &= A\dot{\varphi}(\vec{l} + \psi\vec{m} - \theta\vec{n}) + B\dot{\theta} \cdot (-\psi\vec{l} + \vec{m} + \varphi\vec{n}) + C\omega_0 \cdot (\theta\vec{l} - \varphi\vec{m} + \vec{n}) = \\ &= A\dot{\varphi} \cdot \vec{l} + B\dot{\theta} \cdot \vec{m} + C\omega_0\theta \cdot \vec{l} - C\omega_0\varphi \cdot \vec{m} + C\omega_0 \cdot \vec{n}.\end{aligned}$$



Следовательно,

$$K_\xi = A\dot{\varphi} + C\omega_0\theta, \quad K_\eta = B\dot{\theta} - C\omega_0\varphi, \quad K_\zeta = C\omega_0,$$

$$\frac{dK_\xi}{dt} = A\ddot{\varphi} + C\omega_0\dot{\theta}, \quad \frac{dK_\eta}{dt} = B\ddot{\theta} - C\omega_0\dot{\varphi}, \quad \frac{dK_\zeta}{dt} = 0.$$

Далее определим момент  $\vec{M}_O$  в проекциях на оси системы  $O\xi\eta\zeta$ . Это момент силы  $\vec{P} = -mg\vec{n}$  относительно центра  $O$ :  $\vec{M}_O = \vec{r}_c \times \vec{P}$ , где  $\vec{r}_c = R\vec{k} = R(\theta\vec{l} - \varphi\vec{m} + \vec{n})$ .

Тогда

$$\vec{M}_O = -mgR \begin{vmatrix} \vec{l} & \vec{m} & \vec{n} \\ \theta & -\varphi & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = mgR(\varphi\vec{l} + \theta\vec{m}).$$

Таким образом, будем иметь следующие уравнения:

$$\begin{cases} A\ddot{\varphi} + C\dot{\theta}\omega_0 = mgR\varphi, \\ B\ddot{\theta} - C\dot{\varphi}\omega_0 = mgR\theta. \end{cases} \quad (6)$$

Эта модель совпадает с моделью (4).

При выводе динамических уравнений сферического движения Л. Эйлер предложил два упрощения [3]. Первое упрощение состоит в проектировании обеих частей уравнения моментов на оси подвижной системы координат. Второе упрощение — выбор на оси подвижной системы координат главных осей инерции тела. Мы видим, что, строя модели первого приближения, от первого упрощения Эйлера можно отказаться, так как динамические уравнения в проекциях на неподвижные оси получаются того же порядка сложности, что и на подвижные оси.

## 6. Построение модели на основе уравнений Лагранжа второго рода

Теперь построим модель того же сферического движения твердого тела, используя уравнения Лагранжа второго рода. Следуя [1, 4], запишем кинетическую энергию тела в виде

$$T = \frac{1}{2} (A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2).$$

Так как в выражение кинетической энергии  $T$  входят квадраты угловых скоростей  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ , то, чтобы при возведении в квадрат не потерять удвоенные произведения малых величин, в выражении угловой скорости необходимо брать величины до второго порядка малости, используя модель второго приближения. В выражении потенциальной энергии также следует брать величины до второго порядка малости.

Потенциальная энергия тела может быть записана в виде  $= mgr_{c\zeta}$ , где  $r_{c\zeta}$  — проекция радиус-вектора центра масс тела  $r_c$  на ось  $O\zeta$ . Используя матрицу (1), получим  $\vec{r}_c = R\vec{k} = R(\theta\vec{l} - \varphi\vec{m} + \cos\varphi\cos\theta\vec{n})$ . Следовательно,  $r_{c\zeta} = R\cos\varphi\cos\theta$ , а  $= mgR\cos\theta\cos\varphi$ .

Ранее было показано, что для моделей второго приближения преобразования координат не инвариантны относительно порядка изменения углов Эйлера.

Исследуем, будет ли инвариантна модель сферического движения тела, построенная на основе уравнений Лагранжа второго рода с использованием приближений второго порядка. Построим модели движения тела в проекциях на оси системы  $Oxyz$  для двух случаев поворота: 1)  $\varphi \rightarrow \theta$  и 2)  $\theta \rightarrow \varphi$ .

$$1. \varphi \rightarrow \theta : \dot{\varphi}_x = \dot{\varphi} \cos \theta, \quad \dot{\varphi}_z = \dot{\varphi} \sin \theta,$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \cos \theta \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cdot \vec{j} + (\dot{\varphi} \sin \theta + \omega_0) \cdot \vec{k} = \dot{\varphi} \cdot \vec{i} + \dot{\theta} \cdot \vec{j} + (\omega_0 + \dot{\varphi} \theta) \cdot \vec{k},$$

$$T = \frac{1}{2} \left( A\dot{\varphi}^2 + B\dot{\theta}^2 + C(\omega_0 + \theta\dot{\varphi})^2 \right) = \frac{1}{2} \left( A\dot{\varphi}^2 + B\dot{\theta}^2 + C\omega_0^2 + 2C\omega_0\dot{\varphi}\theta \right).$$

Тогда

$$L = T - = \frac{1}{2} \left( A\dot{\varphi}^2 + B\dot{\theta}^2 + C\omega_0^2 + 2C\omega_0\dot{\varphi}\theta \right) - mgR \cos \theta \cos \varphi.$$

Уравнения Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

где  $q_1 = \varphi$ ,  $q_2 = \theta$ .

Вычислим производные с учетом малости величин  $\theta, \varphi$ . После дифференцирования величины более первого порядка малости можно отбросить:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= A\dot{\varphi} + C\omega_0\theta, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= B\dot{\theta}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= A\ddot{\varphi} + C\dot{\theta}\omega_0, & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= B\ddot{\theta}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= mgR\varphi, & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= C\dot{\varphi}\omega_0 + mgR\theta. \end{aligned}$$

Следовательно, модель движения тела будет иметь вид

$$\begin{cases} A\ddot{\varphi} + C\dot{\theta}\omega_0 = mgR\varphi, \\ B\ddot{\theta} - C\dot{\varphi}\omega_0 = mgR\theta. \end{cases}$$

$$2. \theta \rightarrow \varphi : \dot{\theta}_y = \dot{\theta} \cos \varphi, \quad \dot{\theta}_z = -\dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{i} + \dot{\theta} \cos \varphi \vec{j} + (\omega_0 - \varphi\dot{\theta}) \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{i} + \dot{\theta} \vec{j} + (\omega_0 - \varphi\dot{\theta}) \vec{k},$$

$$T = \frac{1}{2} \left( A\dot{\varphi}^2 + B\dot{\theta}^2 + C\omega_0^2 - 2C\omega_0\varphi\dot{\theta} \right),$$

$$L = T - = \frac{1}{2} \left( A\dot{\varphi}^2 + B\dot{\theta}^2 + C\omega_0^2 - 2C\omega_0\varphi\dot{\theta} \right) - mgR \cos \theta \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= A\dot{\varphi}, & \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= B\dot{\theta} - C\omega_0\varphi, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= A\ddot{\varphi}, & \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= B\ddot{\theta} - C\omega_0\dot{\varphi}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -C\omega_0\dot{\theta} + mgR\varphi, & \frac{\partial L}{\partial \theta} &= mgR\theta. \end{aligned}$$

Следовательно, модель движения тела в этом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} A\ddot{\varphi} + C\dot{\theta}\omega_0 = mgR\varphi, \\ B\ddot{\theta} - C\dot{\varphi}\omega_0 = mgR\theta, \end{cases}$$

что совпадает с предыдущей моделью.

Следовательно, *модели сферического движения тела, построенные на основе уравнений Лагранжа второго рода с использованием приближений второго порядка, инвариантны относительно порядка изменения углов Эйлера.*

Модель (6) соответствует аналогичным моделям, полученным в [4] для волчка и в [1] для диска, и совпадает с моделью (4). Однако построение модели (6) с использованием уравнений Лагранжа сложнее, так как требует использования малых величин с точностью до второго порядка малости.

## 7. Исследование устойчивости вращения тела

Получим условие устойчивого движения тела по модели (4) и сравним его с условием устойчивого вращения тела для модели (5). Следуя [2, 5], будем искать частное решение системы в следующем виде:  $\theta = c_1 e^{\lambda t}$ ,  $\varphi = c_2 e^{\lambda t}$ . Подставляя эти значения в уравнения системы (6), получим

$$\begin{cases} C\omega_0\lambda c_1 + (A\lambda^2 - mgR)c_2 = 0, \\ (B\lambda^2 - mgR)c_1 - C\omega_0\lambda c_2 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо наличие соотношения

$$\Delta = \begin{vmatrix} C\omega_0\lambda & A\lambda^2 - mgR \\ B\lambda^2 - mgR & -C\omega_0\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^4 + \frac{C^2\omega_0^2 - (A+B)mgR}{AB}\lambda^2 + \frac{m^2g^2R^2}{AB} = 0. \quad (8)$$

Введем обозначения

$$\frac{C^2\omega_0^2 - (A+B)mgR}{AB} = 2p, \quad \frac{m^2g^2R^2}{AB} = q.$$

Тогда получим

$$\lambda^4 + 2p\lambda^2 + q = 0, \quad \lambda_{1,2}^2 = -p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Чтобы вращение тела было устойчивым, необходимо выполнение неравенства  $\lambda^2 < 0$  [5]. Следовательно, условием устойчивости вращения тела будет: 1)  $p > 0$ ; 2)  $p^2 - q \geq 0$ .

Второе условие более сильное, из него следует неравенство

$$\left( \frac{C^2\omega_0^2 - (A+B)mgR}{2AB} \right)^2 \geq \frac{m^2g^2R^2}{AB}$$

или  $C^2\omega_0^2 - (A+B)mgR \geq 2\sqrt{AB}mgR$ , откуда

$$\omega_0^2 \geq \frac{(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 mgR}{C^2}. \quad (9)$$

Это условие устойчивого вращения тела. При  $A = B$  будем иметь

$$\omega_0^2 \geq \frac{4AmgR}{C^2}.$$

Для модели (5) при  $A = B$  условие устойчивого вращения [2] имеет вид

$$\omega_0^2 \geq \frac{4AmgR}{(C - A)^2}.$$

Это условие требует ббольшую скорость  $\omega_0$  для устойчивого вращения волчка, чем это нужно в действительности, т. е. модель (5) рассчитывает устойчивость вращения с запасом. Однако если, например,  $A \rightarrow C$ , то  $\omega_0 \rightarrow \infty$ , что является заведомо неверным результатом. Действительное значение  $\omega_0$  при  $A = C$  дает формула (9):

$$\omega_0^2 \geq \frac{4mgR}{A}.$$

## 8. Интегрирование уравнений движения тела

Интегрируя систему дифференциальных уравнений (6), совпадающую с (4), получим уравнения, определяющие изменения углов  $\theta$  и  $\varphi$  в зависимости от времени  $t$ . Проанализируем отличие их от уравнений, полученных по модели (5). Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид (8). Из этого уравнения можно выразить  $\lambda^2$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= -\frac{C^2\omega_0^2 - (A + B)mgR}{2AB} + \sqrt{\left(\frac{C^2\omega_0^2 - (A + B)mgR}{2AB}\right)^2 - \frac{m^2g^2R^2}{AB}} = -\alpha_1^2, \\ \lambda_2^2 &= -\frac{C^2\omega_0^2 - (A + B)mgR}{2AB} - \sqrt{\left(\frac{C^2\omega_0^2 - (A + B)mgR}{2AB}\right)^2 - \frac{m^2g^2R^2}{AB}} = -\alpha_2^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для краткости дальнейшего изложения введем обозначения:

$$\frac{C\omega_0}{A} = a_1, \quad -\frac{mgR}{A} = a_2, \quad -\frac{C\omega_0}{B} = a_3, \quad -\frac{mgR}{B} = a_4. \quad (11)$$

Тогда уравнения (7) примут вид

$$\begin{aligned} a_1\lambda c_1 + \lambda^2 c_2 + a_2 c_2 &= 0, \\ \lambda^2 c_1 + \lambda a_3 c_2 + a_4 c_1 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Это два уравнения с тремя неизвестными:  $c_1, c_2, \lambda$ . В таком случае одной из неизвестных величин  $c_1, c_2$  можно придать произвольное значение. Пусть  $c_1 = 1$ . Тогда из первого

$$\text{уравнения } c_2 = -\frac{a_1\lambda}{\lambda^2 + a_2}.$$

Из соотношений (10) имеем четыре значения  $\lambda$ :

$$\lambda_1 = i\alpha_1, \quad \lambda_2 = -i\alpha_1, \quad \lambda_3 = i\alpha_2, \quad \lambda_4 = -i\alpha_2.$$

Каждому значению  $\lambda$  соответствует свое значение коэффициента  $c_2$ . Пусть  $c_2^{(i)}$  — значение коэффициента  $c_2$ , соответствующее  $\lambda_i, i = 1, \dots, 4$ . Имеем  $c_1^{(i)} = 1$ . Тогда, введя обозначения

$$b_1 = \frac{a_1\alpha_1}{a_2 - \alpha_1^2}, \quad b_2 = \frac{a_1\alpha_2}{a_2 - \alpha_2^2},$$

получим

$$c_2^{(1)} = -\frac{a_1 \lambda_1}{\lambda_1^2 + a_2} = -\frac{a_1 i \alpha_1}{a_2 - \alpha_1^2} = -b_1 i, \quad c_2^{(2)} = -\frac{a_1 \lambda_2}{\lambda_2^2 + a_2} = \frac{a_1 i \alpha_1}{a_2 - \alpha_1^2} = b_1 i,$$

$$c_2^{(3)} = -\frac{a_1 \lambda_3}{\lambda_3^2 + a_2} = -\frac{a_1 i \alpha_2}{a_2 - \alpha_2^2} = -b_2 i, \quad c_2^{(4)} = -\frac{a_1 \lambda_4}{\lambda_4^2 + a_2} = \frac{a_1 i \alpha_2}{a_2 - \alpha_2^2} = b_2 i.$$

Частные решения будут иметь вид

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= c_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} = e^{i\alpha_1 t} = \cos \alpha_1 t + i \sin \alpha_1 t, \\ \theta^{(2)} &= c_1^{(2)} e^{\lambda_2 t} = e^{-i\alpha_1 t} = \cos \alpha_1 t - i \sin \alpha_1 t, \\ \theta^{(3)} &= c_1^{(3)} e^{\lambda_3 t} = e^{i\alpha_2 t} = \cos \alpha_2 t + i \sin \alpha_2 t, \\ \theta^{(4)} &= c_1^{(4)} e^{\lambda_4 t} = e^{-i\alpha_2 t} = \cos \alpha_2 t - i \sin \alpha_2 t; \\ \varphi^{(1)} &= c_2^{(1)} e^{\lambda_1 t} = c_2^{(1)} e^{i\alpha_1 t} = -b_1 i (\cos \alpha_1 t + i \sin \alpha_1 t) = b_1 (\sin \alpha_1 t - i \cos \alpha_1 t), \\ \varphi^{(2)} &= c_2^{(2)} e^{\lambda_2 t} = c_2^{(2)} e^{-i\alpha_1 t} = b_1 i (\cos \alpha_1 t - i \sin \alpha_1 t) = b_1 (\sin \alpha_1 t + i \cos \alpha_1 t), \\ \varphi^{(3)} &= c_2^{(3)} e^{\lambda_3 t} = c_2^{(3)} e^{i\alpha_2 t} = -b_2 i (\cos \alpha_2 t + i \sin \alpha_2 t) = b_2 (\sin \alpha_2 t - i \cos \alpha_2 t), \\ \varphi^{(4)} &= c_2^{(4)} e^{\lambda_4 t} = c_2^{(4)} e^{-i\alpha_2 t} = b_2 i (\cos \alpha_2 t - i \sin \alpha_2 t) = b_2 (\sin \alpha_2 t + i \cos \alpha_2 t). \end{aligned}$$

За системы частных решений можно взять отдельно действительные части и отдельно мнимые части:

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= \cos \alpha_1 t, & \theta^{(2)} &= \sin \alpha_1 t, & \theta^{(3)} &= \cos \alpha_2 t, & \theta^{(4)} &= \sin \alpha_2 t; \\ \varphi^{(1)} &= b_1 \cos \alpha_1 t, & \varphi^{(2)} &= b_1 \sin \alpha_1 t, & \varphi^{(3)} &= b_2 \cos \alpha_2 t, & \varphi^{(4)} &= b_2 \sin \alpha_2 t. \end{aligned}$$

Общим решением будет

$$\begin{aligned} \theta &= A_1 \theta^{(1)} + A_2 \theta^{(2)} + A_3 \theta^{(3)} + A_4 \theta^{(4)}, \\ \varphi &= B_1 \varphi^{(1)} + B_2 \varphi^{(2)} + B_3 \varphi^{(3)} + B_4 \varphi^{(4)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \theta &= A_1 \cos \alpha_1 t + A_2 \sin \alpha_1 t + A_3 \cos \alpha_2 t + A_4 \sin \alpha_2 t, \\ \varphi &= b_1 (B_1 \cos \alpha_1 t + B_2 \sin \alpha_1 t) + b_2 (B_3 \cos \alpha_2 t + B_4 \sin \alpha_2 t), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4$  — константы интегрирования, они определяются начальными условиями при  $t = 0$ .

Пусть заданы начальные условия:

$$\theta(t=0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0, \quad \varphi(t=0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(t=0) = \dot{\varphi}_0.$$

Определим производные

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\alpha_1 A_1 \sin \alpha_1 t + \alpha_1 A_2 \cos \alpha_1 t - \alpha_2 A_3 \sin \alpha_2 t + \alpha_2 A_4 \cos \alpha_2 t, \\ \dot{\varphi} &= b_1 (-B_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 t + B_2 \alpha_1 \cos \alpha_1 t) + b_2 (-B_3 \alpha_2 \sin \alpha_2 t + B_4 \alpha_2 \cos \alpha_2 t). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя в (13) и (14) начальные условия, получим

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 &= \theta_0, & b_1 B_1 + b_2 B_3 &= \varphi_0, \\ \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_4 &= \dot{\theta}_0, & b_1 B_2 \alpha_1 + b_2 B_4 \alpha_2 &= \dot{\varphi}_0. \end{aligned}$$

В полученных четырех уравнениях восемь неизвестных  $A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4$ . Четырем неизвестным можно придать произвольные значения. Пусть  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 1$ . Тогда

$$A_3 = \theta_0 - 1, \quad B_3 = \frac{\varphi_0 - b_1}{b_2}, \quad A_4 = \frac{\dot{\theta}_0 - \alpha_1}{\alpha_2}, \quad B_4 = \frac{\dot{\varphi}_0 - b_1 \alpha_1}{b_2 \alpha_2}.$$

Уравнения движения тела в этом случае будут иметь вид

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \cos \alpha_1 t + \sin \alpha_1 t + (\theta_0 - 1) \cos \alpha_2 t + \frac{\dot{\theta}_0 - \alpha_1}{\alpha_2} \sin \alpha_2 t, \\ \varphi(t) &= b_1 (\cos \alpha_1 t + \sin \alpha_1 t) + (\varphi_0 - b_1) \cos \alpha_2 t + \frac{\dot{\varphi}_0 - b_1 \alpha_1}{\alpha_2} \sin \alpha_2 t. \end{aligned}$$

Следовательно, углы  $\theta$  и  $\varphi$  меняются по гармоническому закону с одинаковой частотой. Амплитуда колебаний зависит от начальных условий и от параметров, в выражения которых входит угловая скорость вращения тела  $\omega_0$ . Чем больше  $\omega_0$ , тем меньше амплитуда колебания углов  $\theta$  и  $\varphi$ .

Характер гармонических колебаний, соответствующих модели (5), будет такой же, как и для модели (4).

Если в формулах (10) подкоренное выражение равно нулю, то  $\alpha_1 = \alpha_2$ . В этом случае две гармоники сливаются в одну. Это так называемый случай резонансного движения [6]. Резонанс наступает на границе устойчивого движения, когда в соотношении (9) имеет место равенство. При  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \cos \alpha t + \sin \alpha t + (\theta_0 - 1) \cos \alpha t + \frac{\dot{\theta}_0 - \alpha}{\alpha} \sin \alpha t = \theta_0 \cos \alpha t + \frac{\dot{\theta}_0}{\alpha} \sin \alpha t, \\ \varphi(t) &= b_1 (\cos \alpha t + \sin \alpha t) + (\varphi_0 - b_1) \cos \alpha t + \frac{\dot{\varphi}_0 - b_1 \alpha}{\alpha} \sin \alpha t = \varphi_0 \cos \alpha t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\alpha} \sin \alpha t, \end{aligned} \quad (15)$$

где с учетом (9) и (10)

$$\alpha^2 = \frac{C^2 \omega_0^2 - (A + B)mgR}{2AB} = \frac{2\sqrt{AB}mgR}{2AB} = \frac{mgR}{\sqrt{AB}}.$$

На границе устойчивости для модели (5) уравнения колебания будут такими же, отличаются лишь границы устойчивости.

Для одних и тех же значений  $\omega_0$  из уравнений (10) следует, что  $\alpha_1$  для модели (5) больше действительного значения, а значение  $\alpha_2$  меньше действительного из модели (4). Следовательно, первая гармоника модели (5) имеет бóльшую частоту колебаний, вторая — меньшую. Отличие амплитуд колебания моделей (4) и (5) зависит от соотношения моментов инерции  $C$  и  $A$ . В критическом для модели (5) случае, когда  $C = A$ , в выражение

$$\frac{C^2 \omega_0^2 - (A + B)mgR}{2AB}$$

формул (10) вместо значения  $C$  следует подставить  $C - A = 0$ . При этом получим, что  $\lambda_1^2 > 0$ , — это означает неустойчивость движения при любом  $\omega_0$ . В действительности при  $C = A$ , если  $\omega_0$  удовлетворяет условию (9), движение тела устойчиво и соответствующие параметры этого движения определяются по формулам (10) и (15).

## Заключение

Сформулируем кратко полученные в работе результаты.

1. Предложено и исследовано несколько вариантов построения модели сферического движения твердого тела с неподвижным центром вращения.

2. Установлена инвариантность преобразования координат относительно порядка изменения углов Эйлера для моделей первого приближения. Для моделей второго приближения показано, что хотя преобразование координат не инвариантно относительно порядка изменения углов, но модели сферического движения, построенные с использованием величин второго порядка малости, такой инвариантностью обладают.

3. Получено условие устойчивого сферического движения твердого тела. Выведены уравнения малых колебаний тела при его устойчивом сферическом движении.

Авторы благодарят профессора Юрия Николаевича Григорьева за полезное обсуждение работы.

## Список литературы

- [1] МАРКЕЕВ А.П. Теоретическая механика. М: Наука, 1999. 569 с.
- [2] АЛФУТОВ Н.А. Устойчивость движения и равновесия. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2003. 253 с.
- [3] БУХГОЛЬЦ Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1969. Т. 2. 331 с.
- [4] МЕРКИН Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
- [5] МАЛКИН И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1952. 431 с.
- [6] КУНИЦИН А.Л. Об устойчивости в системах Ляпунова // ПММ. 2006. Т. 70, вып. 4. С. 547–554.

*Поступила в редакцию 16 марта 2007 г.*