

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКИХ СЛОЕВ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ С ОБЩЕЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА*

В. К. АНДРЕЕВ

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Красноярск, Россия
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
e-mail: andr@icm.krasn.ru*

An unidirectional motion of two immiscible viscous fluid layers with common interface is investigated. An initial value problem is posed. A priori estimates and uniqueness of the solution are obtained. The general solution was found by Laplace transformation method. Asymptotical solution behavior is discussed for the case of a linear initial velocity.

1. Постановка задачи. Интеграл энергии и априорные оценки

Предположим, что имеются два слоя вязких несжимаемых жидкостей толщины l_1 и l_2 соответственно, контактирующие через поверхность раздела $y = 0$ (рис. 1).

Будем считать движение однонаправленным, градиент давления в жидкостях отсутствует, так что $\mathbf{u}_j = (u_j(y, t), 0, 0)$, $p_{jx} = 0$. Поэтому движение определяется только под действием начального поля скоростей. Тогда в уравнениях Навье—Стокса конвективное ускорение равно нулю и совместное движение этих слоев описывается решением следующей начально-краевой задачи:

$$u_{1t} = \nu_1 u_{1yy} \quad (-l_1 < y < 0); \quad (1)$$

$$u_1(y, 0) = u_{10}(y); \quad (2)$$

$$u_1(-l_1, t) = 0; \quad (3)$$

$$u_{2t} = \nu_2 u_{2yy} \quad (0 < y < l_2); \quad (4)$$

$$u_2(y, 0) = u_{20}(y); \quad (5)$$

$$u_2(l_2, t) = 0; \quad (6)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант НШ № 587.3.2006.1).

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2007.

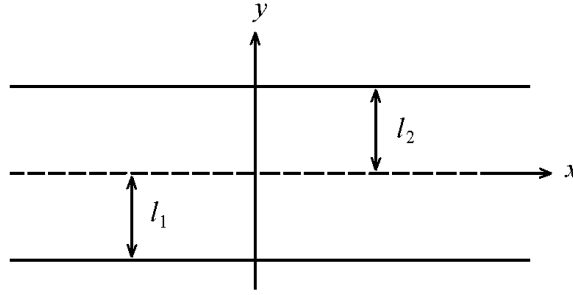


Рис. 1. Схема области течения

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad t > 0; \quad (7)$$

$$\mu_1 u_{1y}(0, t) = \mu_2 u_{2y}(0, t), \quad t > 0. \quad (8)$$

Условия (3) и (6) представляют собой условия прилипания на неподвижных стенках; (7) — равенство скоростей, а (8) — равенство касательных напряжений на поверхности раздела; $\nu_{1,2} = \mu_{1,2}/\rho_{1,2}$, $\mu_{1,2}$ — динамические вязкости, $\rho_{1,2}$ — плотности жидкостей — известные постоянные.

Получим априорные оценки решения задачи (1)–(8), когда условия (7) и (8) выполнены для всех $t \geq 0$, т. е. для гладкого решения. Умножим уравнение (1) на $\rho_1 u_1$, (4) — на $\rho_2 u_2$ и проинтегрируем по y от $-l_1$ до нуля (от нуля до l_2). Складывая полученные равенства и используя граничные условия (3), (6)–(8), приходим к соотношению

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_1 \int_{-l_1}^0 u_1^2 dy + \rho_2 \int_0^{l_2} u_2^2 dy \right] = -\mu_1 \int_{-l_1}^0 u_{1y}^2 dy - \mu_2 \int_0^{l_2} u_{2y}^2 dy. \quad (9)$$

Поскольку правая часть в (9) не положительна, то полная энергия в системе монотонно убывает и

$$\begin{aligned} E(t) &\equiv \frac{1}{2} \rho_1 \int_{-l_1}^0 u_1^2(y, t) dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^{l_2} u_2^2(y, t) dy \leq \\ &\leq E(0) = \frac{1}{2} \rho_1 \int_{-l_1}^0 u_{10}^2(y) dy + \frac{1}{2} \rho_2 \int_0^{l_2} u_{20}^2(y) dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10), в частности, вытекает единственность решения задачи (1)–(8): если $u_{10} = u_{20} = 0$, то и $u_1(y, t) = u_2(y, t) \equiv 0$.

Под словами “гладкое решение” понимается классическое решение рассмотренной задачи, при котором (7) и (8) выполнены для всех $t \geq 0$ и выполнены условия согласования для начальных значений

$$u_{10}(0) = u_{20}(0), \quad \mu_1 u_{10y}(0) = \mu_2 u_{20y}(0), \quad u_{10}(-l_1) = 0, \quad u_{20}(-l_2) = 0. \quad (11)$$

На самом деле равенство (9) позволяет установить асимптотическое поведение гладкого решения при $t \rightarrow \infty$. Действительно, в силу условий (3) и (6) для $u_1(y, t)$, $u_2(y, t)$

справедливы неравенства Пуанкаре

$$\int_{-l_1}^0 u_1^2(y, t) dy \leq \frac{l_1^2}{2} \int_{-l_1}^0 u_{1y}^2(y, t) dy, \quad \int_0^{l_2} u_2^2(y, t) dy \leq \frac{l_2^2}{2} \int_0^{l_2} u_{2y}^2(y, t) dy. \quad (12)$$

Используя (12), из (9) выводим неравенство

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq -\frac{2\mu_1}{l_1^2} \int_{-l_1}^0 u_1^2(y, t) dy - \frac{2\mu_2}{l_2^2} \int_0^{l_2} u_2^2(y, t) dy \leq -4\delta E(t),$$

где $\delta = \min(\nu_1 l_1^{-2}, \nu_2 l_2^{-2})$. Интегрируя последнее неравенство, найдем

$$E(t) \leq E(0) e^{-4\delta t} \quad (13)$$

для всех $t \geq 0$, что существенным образом уточняет просто условие ограниченности энергии (10).

Чтобы получить оценки для $u_j(y, t)$, необходимо оценить интегралы

$$\int_{-l_1}^0 u_{1y}^2 dy, \quad \int_0^{l_2} u_{2y}^2 dy.$$

Заметим, что из (9) следуют лишь неравенства

$$\int_0^t \int_{-l_1}^0 u_{1y}^2 dy dt \leq \frac{E(0)}{\mu_1}, \quad \int_0^t \int_0^{l_2} u_{2y}^2 dy dt \leq \frac{E(0)}{\mu_2}$$

для всех $t \geq 0$.

Пусть $u(y, t)$ — решение уравнения $u_t = \nu u_{yy}$, $y \in [a, b]$, тогда имеет место тождество

$$\int_0^t \int_a^b (u_t^2 + \nu^2 u_{yy}^2) dy dt + \nu \int_a^b u_y^2 dy = 2\nu \int_0^t (u_t u_y) \Big|_a^b dt + \nu \int_a^b u_{0y}^2 dy, \quad (14)$$

где $u_0(y) = u(y, 0)$. Оно вытекает из равенств

$$\int_0^t \int_a^b (u_t - \nu u_{yy})^2 dy dt = 0, \quad u_t u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (u_t u_y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_y^2).$$

Положим сначала в (14) $u = u_1$, $a = -l_1$, $b = 0$, $\nu = \nu_1$ и все умножим на ρ_1 ; затем возьмем $u = u_2$, $a = 0$, $b = l_2$, $\nu = \nu_2$ и все умножим на ρ_2 . После сложения приходим к другому интегральному тождеству для задачи (1)–(8):

$$\begin{aligned} & \rho_1 \int_0^t \int_{-l_1}^0 (u_{1t}^2 + \nu_1^2 u_{1yy}^2) dy dt + \rho_2 \int_0^t \int_0^{l_2} (u_{2t}^2 + \nu_2^2 u_{2yy}^2) dy dt + \\ & + \mu_1 \int_{-l_1}^0 u_{1y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} u_{2y}^2 dy = \mu_1 \int_{-l_1}^0 u_{10y}^2 dy + \mu_2 \int_0^{l_2} u_{20y}^2 dy. \end{aligned} \quad (15)$$

При выводе (1) были учтены граничные условия (3), (6)–(8). Следовательно, для всех $t \geq 0$

$$\int_{-l_1}^0 u_{1y}^2 dy \leq \frac{E_1}{\mu_1}, \quad \int_0^{l_2} u_{2y}^2 dy \leq \frac{E_1}{\mu_2}, \quad (16)$$

где E_1 — правая часть (1).

Используя оценки (13) и (16), получим

$$\begin{aligned} u_1^2(y, t) &= 2 \int_{-l_1}^y u_1(y, t) u_{1y}(y, t) dy \leq 2 \left(\int_{-l_1}^0 u_1^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{-l_1}^0 u_{1y}^2 dy \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 2 \sqrt{\frac{2E(0)E_1}{\rho_1\mu_1}} e^{-2\delta t} \equiv c_1^2 e^{-2\delta t}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|u_1(y, t)| \leq c_1 e^{-\delta t}. \quad (17)$$

Аналогично,

$$|u_2(y, t)| \leq c_2 e^{-\delta t}, \quad (18)$$

где $c_2^2 = 2[2E(0)E_1/(\rho_2\mu_2)]^{1/2}$.

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Гладкое решение задачи (1)–(8) при $t \rightarrow \infty$ стремится к стационарному (нулевому) решению, причем справедливы оценки скорости сходимости (17) и (18), равномерные по y из интервалов $(-l_1, 0)$, $(0, l_2)$.*

Как будет показано в дальнейшем, выход решения задачи (1)–(8) на нулевое при $t \rightarrow \infty$ имеет место и когда не выполнены условия (11), т. е. и для неклассического решения.

2. Решение в изображениях по Лапласу

Для получения более точной информации о поведении $u_j(y, t)$ применим к задаче (1)–(8) преобразование Лапласа:

$$\tilde{u}_j(y, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u_j(y, t) dt \quad (j = 1, 2) \quad (19)$$

(условия применимости формулы (19) см., например, в [1]). В результате приходим к краевой задаче для изображений $\tilde{u}_j(y, p)$:

$$\tilde{u}_1'' - \frac{p}{\nu_1} \tilde{u}_1 = -\frac{1}{\nu_1} u_{10}(y) \quad (-l_1 < y < 0); \quad (20)$$

$$\tilde{u}_1(-l_1, p) = 0; \quad (21)$$

$$\tilde{u}_2'' - \frac{p}{\nu_2} \tilde{u}_2 = -\frac{1}{\nu_2} u_{20}(y) \quad (0 < y < l_2); \quad (22)$$

$$\tilde{u}_2(l_2, p) = 0; \quad (23)$$

$$\tilde{u}_1(0, p) = \tilde{u}_2(0, p); \quad (24)$$

$$\mu_1 \tilde{u}'_1(0, p) = \mu_2 \tilde{u}'_2(0, p), \quad (25)$$

где штрих означает дифференцирование по y .

Общее решение уравнений (20) и (22) находится без труда:

$$\tilde{u}_1(y, p) = \frac{(F - G)}{W \operatorname{ch} \sqrt{p/\nu_1} l_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} (y + l_1) - \frac{1}{\sqrt{p\nu_1}} \int_{-l_1}^y u_{10}(z) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} (y - z) \right] dz; \quad (26)$$

$$\tilde{u}_2(y, p) = C \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} y + D \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} y - \frac{1}{\sqrt{p\nu_2}} \int_0^y u_{20}(z) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (y - z) \right] dz, \quad (27)$$

где введены обозначения

$$C(p) = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \frac{[F(p) - G(p)]}{W(p)} + G(p),$$

$$D(p) = \frac{[F(p) - G(p)]}{W(p)} \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 + \frac{1}{\sqrt{p\nu_1}} \int_{-l_1}^0 u_{10}(z) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} z dz,$$

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{p\nu_2} \operatorname{sh} \sqrt{p/\nu_2} l_2} \int_0^{l_2} u_{20}(z) \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (l_2 - z) \right] dz - \frac{\operatorname{cth} \sqrt{p/\nu_2} l_2}{\sqrt{p\nu_1}} \int_{-l_1}^0 u_{10}(z) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} z dz,$$

$$G(p) = -\frac{\mu}{\nu_1} \sqrt{\frac{\nu_2}{p}} \int_{-l_1}^0 u_{10}(z) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} z dz, \quad (28)$$

$$W(p) = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} + \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1, \quad \mu = \mu_1/\mu_2, \quad \nu = \nu_1/\nu_2.$$

Оригиналы $u_j(y, t)$ ($j = 1, 2$) восстанавливаются по формуле

$$u_j(y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \tilde{u}_j(y, p) dp. \quad (29)$$

Очевидно, что в общем случае для произвольных $u_{10}(y)$, $u_{20}(y)$ выписать решения в явном виде с помощью этой формулы затруднительно.

3. Линейное начальное поле скоростей

Предположим, что начальные функции $u_{10}(y)$, $u_{20}(y)$ представляют собой поля скоростей типа течения Куэтта:

$$u_{10}(y) = v_1 \left(1 + \frac{y}{l_1}\right), \quad u_{20}(y) = v_2 \left(1 - \frac{y}{l_2}\right) \quad (30)$$

с некоторыми постоянными v_1, v_2 . Поскольку $v_1 \neq v_2$, то при $t = 0$ скорость терпит разрыв на поверхности раздела $y = 0$ (не выполнены условия (7) и (8)). При $t > 0$ этот разрыв скоростей будет “диффундировать” в глубь обеих жидкостей по формулам (29), которые для начальных данных (30) могут быть существенно упрощены.

Вычисляя значения интегралов, входящих в соотношения (28), получим

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(y, p) &= \frac{v_1}{p} \left(1 + \frac{y}{l_1}\right) + \operatorname{sh} \left[\sqrt{\frac{p}{\nu_1}} (y + l_1) \right] \left[(v_2 - v_1) \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 - \sqrt{\frac{\nu_2}{p}} \left(\frac{v_2}{l_2} + \frac{\mu v_1}{l_1} \right) \right] \times \\ &\times \left[p \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\nu}} + \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right) \right]^{-1}; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2(y, p) &= \frac{v_2}{p} \left(1 - \frac{y}{l_2}\right) + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} (y - l_2) \left[\frac{\mu}{\sqrt{\nu}} (v_2 - v_1) + \sqrt{\frac{\nu_2}{p}} \left(\frac{v_2}{l_2} + \frac{\mu v_1}{l_1} \right) \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right] \times \\ &\times \left[p \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\nu}} + \operatorname{cth} \sqrt{\frac{p}{\nu_2}} l_2 \operatorname{th} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} l_1 \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Можно проверить, что явные выражения (31) и (32) удовлетворяют краевой задаче (20)–(25). Поскольку в (31) $y < 0$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} p \tilde{u}_1(y, p) = v_1(1 + y/l_1)$; в (32) $y > 0$ и $\lim_{p \rightarrow \infty} p \tilde{u}_2(y, p) = v_2(1 - y/l_2)$, что и должно быть согласно свойствам преобразования Лапласа. Для нахождения пределов $\lim_{t \rightarrow \infty} u_j(y, t)$ следует вычислить $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{u}_j(y, p)$. Используя асимптотические соотношения $\operatorname{sh} x \sim x$, $\operatorname{th} x \sim x$, $\operatorname{ch} x \sim 1$, $\operatorname{cth} x \sim 1/x$ при $x \rightarrow 0$, из (31) находим при $p \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} p \tilde{u}_1(y, p) &\sim \frac{v_1}{l_1} (y + l_1) + \left[\frac{(v_2 - v_1)}{l_2} \sqrt{\frac{\nu_2}{p}} - \left(\frac{v_2}{l_2} + \frac{\mu v_1}{l_1} \right) \sqrt{\frac{\nu_2}{p}} \right] \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} (y + l_1) = \\ &= (y + l_1) \left[\frac{v_1}{l_1} - \frac{v_1}{l_1} \frac{(\mu + l_1/l_2)}{(\mu + l_1/l_2)} \right] = 0, \end{aligned}$$

откуда $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{u}_1(y, p) = 0$. Точно так же и $\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{u}_2(y, p) = 0$. Это означает, что при $t \rightarrow \infty$ скорости в слоях стремятся к нулю: происходит торможение жидкости за счет трения ее о стенки и диффузии поверхности раздела.

Замечание 1. Как следует из формул (26) и (28)

$$\tilde{u}_1(y, p) = \frac{F(p) - G(p)}{W(p) \operatorname{ch} \sqrt{p/\nu_1} l_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu_1}} (y + l_1) + \tilde{u}_{1ч},$$

где $\tilde{u}_{1ч}$ — интегральное слагаемое в (26). Учитывая формулы (28), легко видеть, что при $p \rightarrow 0$ $p \tilde{u}_1(y, p) \rightarrow 0 \quad \forall y \in (-l_1, 0)$. Аналогично и $p \tilde{u}_2(y, p) \rightarrow 0 \quad \forall y \in (0, l_2)$.

Тем самым решение нашей задачи при больших временах стремится к покою и в общем случае, когда не выполнены условия согласования (11).

4. Решение для полугораниченных слоев

Для получения такого решения достаточно в формулах (31) и (32) устремить l_1 и l_2 к бесконечности. В результате получим после некоторых преобразований

$$\tilde{u}_1(y, p) = \frac{v_1}{p} + \frac{(v_2 - v_1)}{(1 + \mu/\sqrt{\nu})} \cdot e^{\sqrt{p/\nu_1} y}, \quad \tilde{u}_2(y, p) = \frac{v_2}{p} - \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \frac{(v_2 - v_1)}{(1 + \mu/\sqrt{\nu})} \cdot \frac{e^{-\sqrt{p/\nu_1} y}}{p}. \quad (33)$$

Поскольку оригинал изображения $e^{-\alpha p/p}$ ($\alpha > 0$) есть $1 - \operatorname{erf}(\alpha/2\sqrt{t})$ [1], где

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\pi} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$$

— интеграл ошибок (интеграл вероятностей), то при $y < 0$

$$u_1(y, t) = \frac{v_2 + (\mu v_1/\sqrt{\nu}) - (v_2 - v_1) \operatorname{erf}(-y/2\sqrt{\nu_1 t})}{1 + \mu/\sqrt{\nu}}, \quad (34)$$

а при $y > 0$

$$u_2(y, t) = \frac{v_2 + (\mu v_1/\sqrt{\nu}) + [\mu(v_2 - v_1)/\sqrt{\nu}] \operatorname{erf}(y/2\sqrt{\nu_2 t})}{1 + \mu/\sqrt{\nu}}, \quad (35)$$

т. е. получаем автомодельное решение. Видно, что это решение совпадает с решением, найденным в [2, с. 217–219].

Если обе жидкости одинаковы ($\mu = 1, \nu = 1$), то скорость вдоль поверхности раздела есть $(v_1 + v_2)/2$. При $v_2 = -v_1$ в этом случае

$$u_1(y, t) = v_1 \operatorname{erf}\left(-\frac{y}{2\sqrt{\nu_1 t}}\right), \quad u_2(y, t) = -v_1 \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu_1 t}}\right). \quad (36)$$

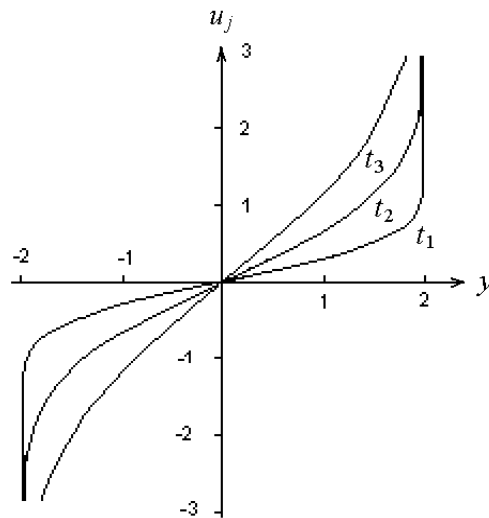


Рис. 2. Профиль скорости в случае одинаковых жидкостей в разные моменты времени, $0 < t_1 < t_2 < t_3$

С ростом времени для фиксированного y скорости $u_j(y, t)$ стремятся к нулю. Таким образом, поверхность раздела диффундирует в глубь обеих жидкостей, вызывая замедление, которое ведет к состоянию покоя в любой данной точке.

В общем же случае из (34) и (35) при $t \rightarrow \infty$ скорости стремятся к одному пределу $(v_2 + \mu\nu^{-1/2}v_1) / (1 + \mu\nu^{-1/2})$ и жидкости в каждой данной точке двигаются с постоянной скоростью.

Следует отметить, что находить значения $u_j(y, t)$ для любых y, t из (26)–(29) предпочтительнее методом численного обращения Лапласа при помощи квадратурной формулы наивысшей степени точности [3].

На рис. 2 представлен профиль скорости в случае, когда обе жидкости одинаковы, $v_2 = -v_1 = 2$, t фиксировано и в (29) $\tilde{u}_j(y, t)$ определяются по формулам (33). Результаты численных расчетов совпадают с теоретическими выводами по формулам (36).

Замечание 2. Изученная задача (1)–(8) может быть интерпретирована и по-другому. Пусть имеются два твердых стержня длины l_1 и l_2 , контактирующих между собой при $y = 0$. Тогда $u_1(y, t)$ — температура первого стержня, а $u_2(y, t)$ — второго, причем ν_1, ν_2 теперь коэффициенты температуропроводности, а μ_1, μ_2 — коэффициенты теплопроводности, $u_{10}(y), u_{20}(y)$ — начальные распределения температур в стержнях. Условия (2) и (6) означают, что на концах поддерживается нулевая температура.

Следует отметить, что решение подобной задачи отсутствует в известных справочниках по теплопроводности [4–6].

Список литературы

- [1] ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
- [2] ЖЕРМЕН П. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1983. 399 с.
- [3] КРЫЛОВ В.И., СКОБЛЯ Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М.: Наука, 1974. 224 с.
- [4] БЕЛЯЕВ Н.М., РЯДНО А.А. Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. Ч. 1. 327 с.
- [5] БЕЛЯЕВ Н.М., РЯДНО А.А. Методы теории теплопроводности. М.: Высшая школа, 1982. Ч. 2. 304 с.
- [6] ЛЫКОВ А.В. Тепломассообмен: справочник. М.: Энергия, 1971. 560 с.

*Поступила в редакцию 21 марта 2007 г.,
в переработанном виде — 14 июня 2007 г.*