Неконформные конечные элементы в трехмерных задачах теории упругости*

А. А. Калинкин
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия
e-mail: alexander.a.kalinkin@intel.com

In this article, we propose nonconformal finite elements of the Crouise—Raviart type for a 3D elasticity problem on a parallelipedal grid. We also propose a two-step iterative method for solution of the corresponding grid problem. We construct a preconditioner based on a transition from the elasticity operator to the grid Laplace operator as well as on a diagonalisation of the tangent displacement matrix and internal Chebyshev's iterations for the normal displacements. Theoretical and experimental analysis of the method is performed.

Введение

При решении задач механики сплошной среды широко используется неконформный метод конечных элементов (МКЭ), когда допустимое пространство сеточных функций не является подмножеством пространства разрешимости исходной вариационной задачи. В этом случае наиболее употребимы элементы Крузея—Равьяра [1], степени свободы для которых связаны со сторонами симплициальной сетки.

Для трехмерной задачи Стокса неконформные элементы со степенями свободы на гранях ячеек параллелепипедальной (или "почти" параллелепипедальной) сетки введены в работе [5], где рассмотрены узловые и "моментные "степени свободы. Для двумерных уравнений Ламе аналогичный неконформный МКЭ детально проанализирован Р. Фолком в [2]. Перенос этих результатов на трехмерный случай вызывает определенные трудности, связанные с наличием жестких вращательных перемещений (даже при наличии условий Дирихле на части границы). В работе [4] в рамках разрывного метода Галеркина проведено исследование неконформного метода на симплициальном разбиении для плоской задачи теории упругости. Устойчивость обеспечивается добавлением стабилизирующего функционала на границах ячеек. В работе [3] анонсирован перенос результатов Р. Фолка на трехмерный случай. Однако в [3] не используется стабилизирующая добавка, а для приведенного способа аппроксимации отсутствуют доказательства корректности сеточной задачи и сходимости приближенного решения к точному. Математически проблема неустойчивости связана с тем, что в общем случае закрепления

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00164а).

части границы может отсутствовать сеточный аналог неравенства Корна. В этом случае сеточный оператор теории упругости имеет не пустое ядро и, следовательно, не порождает скалярное произведение в пространстве разрешимости сеточной задачи.

В настоящей работе для трехмерной задачи теории упругости предлагаются неконформные элементы типа Крузея—Равьяра на параллелепипедальной сетке (отличные от предложенных в [5]), построено экономичное решение возникающих сеточных задач итерационным методом. Собственно, речь пойдет о конструировании переобусловливателя в обобщенном методе сопряженных градиентов. Приводится ряд тестовых расчетов, иллюстрирующих весьма высокую эффективность рассмотренной методики.

1. Аппроксимация неконформными элементами

Пусть $\Omega \subset R^3$ — составленное из параллелепипедов ограниченное открытое множество и $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ — его граница. Далее пусть $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1}^3$ — вектор упругих перемещений и $\varepsilon(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))_{i,j=1}^3$ — симметричный тензор деформаций с компонентами

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Пусть $\mathbf{L}_2(\Omega) = (L_2(\Omega))^3$, $\mathbf{H}^l(\Omega) = (H^l(\Omega))^3$ — пространства Соболева для векторных полей,

$$\mathbf{C}^\infty(\Omega, \gamma) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{C}^\infty(\Omega), \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \gamma \subset \partial\Omega\},$$

и $\mathbf{H}^1(\Omega, \gamma)$ — замыкание $\mathbf{C}^\infty(\Omega, \gamma)$ по норме пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$, задаваемой равенством

$$\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^3 \|u_i\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

В пространстве $\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ зададим симметричную билинейную форму

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \int\limits_\Omega \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \lambda \int\limits_\Omega (\nabla \cdot \mathbf{u})(\nabla \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \tag{1.1}$$

где

$$\varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}).$$

Тогда обобщенная задача может быть сформулирована следующим образом: для некоторого векторного поля $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ требуется найти поле перемещений $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega, \Gamma_D)$, удовлетворяющее при произвольной вектор-функции $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega, \Gamma_D)$ интегральному тождеству

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int\limits_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}. \tag{1.2}$$

В Ω зададим параллелепипедальную сетку $\mathcal{T} = \{\tau\}$, состоящую из ячеек

$$\tau = [x_{1,i_1}, x_{1,i_1+1}] \times [x_{2,i_2}, x_{2,i_2+1}] \times [x_{3,i_3}, x_{3,i_3+1}].$$

Рассмотрим каноническую ячейку (reference cell) $\hat{\tau} = [-1,1]^3$ со следующей нумерацией ее граней $\hat{e}_l, \quad l = 1,\dots,6$:

$$\hat{e}_{2k-1} = \hat{\tau} \cap \{\hat{x}_k = -1\}, \quad \hat{e}_{2k} = \hat{\tau} \cap \{\hat{x}_k = 1\}, \quad k = 1,2,3.$$

В $\hat{\tau}$ введем 18-мерное пространство неконформных **CR** элементов (типа Крузея—Равьяра) $\mathbf{Q}(\hat{\tau})$, состоящее из векторов вида

$$\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1\hat{x}_1 + c_1\hat{x}_2 + d_1\hat{x}_3 + r_1\hat{x}_2^2 + s_1\hat{x}_3^2 \\ a_2 + b_2\hat{x}_1 + c_2\hat{x}_2 + d_2\hat{x}_3 + r_2\hat{x}_1^2 + s_2\hat{x}_3^2 \\ a_3 + b_3\hat{x}_1 + c_3\hat{x}_2 + d_3\hat{x}_3 + r_3\hat{x}_1^2 + s_3\hat{x}_2^2 \end{pmatrix}.$$

В пространстве $\mathbf{Q}(\hat{\tau})$ найдем два базиса — Φ_l^k и Ψ_l^k, связанных с двумя различными способами задания интерполирующих операторов, из следующих условий:

$$\hat{\Phi}_l^k(\hat{\mathbf{p}}_m) = \delta_{lm}\mathbf{e}^k, \quad P_{\hat{e}_m}\hat{\Psi}_l^k = \delta_{lm}\mathbf{e}^k,$$

где $l,\ m = 1,\dots,6,\ k = 1,2,3$ и векторы $\hat{\mathbf{p}}_m$ — центры граней $\hat{e}_m$:

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = -\mathbf{e}^1, \quad \hat{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{e}^1, \quad \hat{\mathbf{p}}_3 = -\mathbf{e}^2, \quad \hat{\mathbf{p}}_4 = \mathbf{e}^2, \quad \hat{\mathbf{p}}_5 = -\mathbf{e}^3, \quad \hat{\mathbf{p}}_6 = \mathbf{e}^3,$$

а

$$P_\omega \mathbf{u} = \frac{1}{\mathrm{mes}(\omega)} \int\limits_\omega \mathbf{u}(\mathbf{x})d\omega.$$

Пусть $\mathbf{u}_\tau$ — сужение $\mathbf{u}$ на ячейку τ. Введем пространство

$$\mathbf{H}_h = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\boldsymbol{\Omega}) \mid \mathbf{u}_\tau \in \mathbf{H}^1(\tau)\}$$

и зададим в нем полунорму следующим равенством

$$|\mathbf{u}|_{\Omega,h} = \left(\sum_{\tau\in\mathcal{T}} |\mathbf{u}_\tau|^2_{\mathbf{H}^1(\tau)}\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим его замкнутое подпространство

$$\mathbf{V}_h = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega) \mid \mathbf{u}_\tau \in \mathbf{Q}(\tau)\} \subset \mathbf{H}_h.$$

Пусть $\mathcal{E}_0$ — множество всех различных внутренних граней ячеек $\tau \in \mathcal{T}$ (имеющих непустое пересечение с Ω), т. е. $\forall\, e \in \mathcal{E}_0\ \exists\, \tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ такие, что $e = \tau_1 \cap \tau_2$. Обозначим

$$[\mathbf{u}]_e(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\tau_1}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_{\tau_2}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in e \in \mathcal{E}_0.$$

Пусть, $\mathcal{E}_D$ — множество всех граней, лежащих на Γ_D, и для $e = \tau \cap \Gamma_D$:

$$[\mathbf{u}]_e(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in e \in \mathcal{E}_D.$$

Введем два пространства сеточных функций, в которых будут сформулированы задачи о поиске приближенных решений. Пусть

$$\mathbf{V}_{h,0}^{(1)} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}_h \mid \quad \forall e \in \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_D \quad [\mathbf{u}]_e(\mathbf{p}_e) = \mathbf{0}\}, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{p}_e$ — центр грани e, и

$$\mathbf{V}_{h,0}^{(2)} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V}_h \mid \quad \forall e \in \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_D \quad P_e[\mathbf{u}]_e = \mathbf{0}\}. \tag{1.4}$$

При этом $\mathbf{V}_{h,0}^{(k)} \not\subset \mathbf{H}^1(\Omega, \Gamma_D)$, а следовательно, эти пространства порождают неконформный метод конечных элементов.

Сужение билинейной формы (1.5) на пространство $\mathbf{H}^1(\tau) \times \mathbf{H}^1(\tau)$ задается равенством

$$a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{v}_\tau) = 2\mu \int_\tau \varepsilon(\mathbf{u}_\tau) : \varepsilon(\mathbf{v}_\tau) d\mathbf{x} + \lambda \int_\tau (\nabla \cdot \mathbf{u}_\tau)(\nabla \cdot \mathbf{v}_\tau) d\mathbf{x}.$$

В пространстве $\mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h$ введем билинейную форму

$$a_{\Omega,h}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} a_\tau(\mathbf{u}_\tau, \mathbf{v}_\tau) + \sum_{e \in \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_D} \frac{2\mu}{h_e} \int_e [\mathbf{u}]_e \cdot [\mathbf{v}]_e \, de, \tag{1.5}$$

где h_e — характерный линейный размер грани e. Используя введенные пространства (1.3) и (1.4), сформулируем две сеточные задачи: найти вектор-функции $\mathbf{u}^{(k)} \in \mathbf{V}_{h,0}^{(k)}$, $k = 1, 2$, такие, что для любых вектор-функций $\mathbf{v}^{(k)} \in \mathbf{V}_{h,0}^{(k)}$ выполняются интегральные тождества

$$a_{\Omega,h}(\mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}^{(k)}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}^{(k)} d\mathbf{x} \,, \quad k = 1, 2. \tag{1.6}$$

Тогда можно доказать следущие теоремы (более подробно см. в [6]).

Теорема 1.1. *Найдется не зависящее от параметров сетки и вектор-функции* $\mathbf{u}$ *положительное число* c *такое, что* $\forall \, \mathbf{u} \in \mathbf{V}_{h,0}^{(k)}, \quad k = 1, 2,$ *имеет место неравенство*

$$|\, \mathbf{u}|_{\Omega,h} \le c \, \mathcal{F}_{\Omega,h}(\mathbf{u}),$$

где

$$\mathcal{F}_{\Omega,h}(\mathbf{u}) = \left\{ \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_\tau \varepsilon(\mathbf{u}_\tau) : \varepsilon(\mathbf{u}_\tau) d\mathbf{x} + \sum_{e \in \mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_D} \frac{1}{h_e} \int_e |\, [\mathbf{u}]_e|^2 de \right\}^{1/2}.$$

Теорема 1.2. *При* $\mathrm{mes}_2(\Gamma_D) > 0$ *найдется положительное число* h_0 *такое, что при* $h \le h_0$ *задачи* (1.6) *однозначно разрешимы.*

Теорема 1.3. *Пусть* $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega, \Gamma_D) \cap \mathbf{H}^2(\Omega)$ *— решение задачи* (1.2), *а* $\mathbf{u}^{(\mathbf{k})} \in \mathbf{V}_{h,0}^{(k)}$, $k = 1, 2$, *— решения задач* (1.6). *Тогда имеют место оценки*

$$\begin{aligned} |\, \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}|_{\Omega,h} &\le c \, \bar{\kappa} \, h \, |\, \mathbf{u}|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}, \\ |||\, \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(k)}|||_{\Omega,h} &\le c \, \bar{\kappa} \, h \, |\, \mathbf{u}|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

где положительное число c *не зависит от параметров сетки и векторного поля* $\mathbf{u}$, *и*

$$|||\mathbf{u}|||_{\Omega,h} = \sqrt{a_{\Omega,h}(\mathbf{u}, \mathbf{u})},$$

а $\bar{\kappa}$ *— параметр, характеризующий регулярность сетки.*

Теорема 1.4. *Пусть* Ω — *параллелепипед и* $\Gamma_D = \partial\Omega$, $\mathbf{u}$ — *решение задачи* (1.2) *при* $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$, $\mathbf{u}^{(2)} \in \mathbf{V}_{h,0}^{(2)}$ — *решение задачи* (1.6) *при* $k = 2$. *Тогда имеет место оценка*

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(2)} \|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leq c\, \bar{\kappa}^2\, h^2\, \| \mathbf{f} \|_{\mathbf{L}_2(\Omega)},$$

где положительное число c *не зависит от параметров сетки и вектор-функции* $\mathbf{u}$. *Параметр* $\bar{\kappa}$ *взят из предыдущей теоремы.*

Отдельно надо остановиться на роли стабилизирующей добавки из (1.5). Приводится пример сеточной задачи без этой добавки, в котором, несмотря на наличие условий Дирихле на части границы, оператор задачи имеет непустое ядро (более подробно об этом см. в [6]).

2. Переобусловливание сеточных уравнений

Собственно, речь здесь идет о конструировании переобусловливателя в обобщенном методе сопряженных градиентов. Более подробно о нем можно прочитать в [7]. Общая схема построения переобусловливателя состоит из трех этапов.

Этап 1. На первом этапе показывается спектральная эквивалентность сеточного оператора Ламе трем сеточным операторам Лапласа. Позволяют это сделать сеточное неравенство Корна (см. раздел 1) и непрерывность сеточного энергетического скалярного произведения.

Теорема 2.1. *Найдется не зависящее от параметров сетки и вектор функции* $\mathbf{u}$ *положительное число* c *такое, что* $\forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{V}_{h,0}^{(k)}, \quad k = 1, 2$, *имеет место неравенство*

$$|||\mathbf{u}|||_{\Omega,h} \leq c\bar{\kappa}\, |\mathbf{u}|_{\Omega,h}. \tag{2.1}$$

Этап 2. На данном этапе строится матрица $\hat{B}$, для которой диагональные блоки соответствуют нормальным и касательным перемещениям. Это позволит в дальнейшем легко перейти к дополнениям Шура, соответствующим нормальным перемещениям, которые являются M-матрицами, и для обращения которых в следующем разделе будут использованы процедуры Чебышева. При этом доказывается следующая

Лемма 2.2. *Имеют место неравенства*

$$\frac{1}{\kappa^2}\,(\hat{A}u, u) \leq (\hat{B}u, u) \leq \kappa^2 c^{(k)}\,(\hat{A}, u) \quad \forall\; u \in \mathbf{R}^N, \quad k = 1, 2, \tag{2.2}$$

где числа $c^{(1)} = 8/3$ *и* $c^{(2)} = 6$ *соответствуют узловому и моментному базисам, число* κ — *параметр неравномерности сетки.*

Этап 3. И, наконец, пользуясь работами Ю. Кузнецова [9], мы спектрально эквивалентно заменяем обращение дополнений Шура на некоторое фиксированное число шагов в метода Чебышева. В качестве переобусловливателя к методу Чебышева мы используем попеременно-треугольный метод с двумя вариантами выбора параметров: либо используя оптимальный параметр из работ А.А. Самарского [10], находя крайние собственные значения дополнений Шура с помощью степенного метода, что крайне затратно, либо используя оптимальный параметр из работ А.Н. Коновалова [8].

3. Численный эксперимент

Приведем результаты численных экспериментов задачи в рассматриваемой в области $\Omega = (0,1)^3$ с точным решением

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 64[x_1x_2x_3(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)]^2\mathbf{e}^3, \tag{3.1}$$

т. е. задан вектор объемных сил как действие оператора теории упругости на функцию $\mathbf{u}$. Далее, как нетрудно заметить, функция $\mathbf{u}$ является решением смешанной краевой задачи Дирихле—Неймана:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D = \overline{\Omega} \cap \{x_3 = 0,\, x_3 = 1\}; \quad \sigma(\mathbf{u})\mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D. \tag{3.2}$$

В расчетах использовались значения коэффициентов Ламе μ и λ, соответствующие значениям модуля Юнга $E = 10^3$ и коэффициента Пуассона $\nu = 0.1$. Все расчеты проводились на последовательности кубических сеток с шагами $h = 2^{-k}$, $k = 3, ..., 6$.

В табл. 1 и 2 приведены спектральные числа обусловленности матриц $B^{-1}A$ для узлового и моментного базисов, вычисленные степенным методом, где A — матрица жесткости, соответствующая уравнению Ламе, а B — построенный нами переобусловливатель, s — количество шагов в методе Чебышева. В скобках указаны соответствующие числа обусловленности при наличии спектральной информации.

Т а б л и ц а 1. Спектральные числа обусловленности матриц $B^{-1}A$ для узлового базиса

h	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
2^{-3}	17.8 (14.4)	10.8 (11.4)	7.99 (7.58)	6.7 (5.89)
2^{-4}	33.6 (32.1)	20.5 (24.0)	14.2 (14.7)	11.1 (10.1)
2^{-5}	71.5 (56.9)	44.4 (49.0)	29.2 (28.8)	21.8 (18.7)

Т а б л и ц а 2. Спектральные числа обусловленности матриц $B^{-1}A$ для моментного базиса

h	$s=1$	$s=2$	$s=3$	$s=4$
2^{-3}	34.8 (28.2)	21.6 (21.5)	16.3 (14.9)	13.9 (12.2)
2^{-4}	101. (71.6)	61.0 (53.9)	41.8 (33.5)	32.5 (23.5)
2^{-5}	204.0 (142.0)	125.0 (123.0)	82.6 (72.4)	61.7 (47.2)

Главный вывод, который следует из приведенных расчетов, это слабая зависимость числа итераций и, что более важно, спектрального числа обусловленности при замене оптимальных параметров, требующих знания спектральной информации, на параметры [8] адаптивного подхода при выборе переобусловливателя для чебышевской процедуры.

Список литературы

[1] Crouzeix M., Raviart P.-A. Conforming and nonconforminf finite element methods for solving the stationary Stokes equations I // RAIRO. 1973. R.-3. P. 33–75.

[2] Falk R.S. Nonconforming finite element methods for the equation of linear elasticity // Math. Comp. 1991. Vol. 57. P. 529–550.

[3] Georgiev I., Margenov S. DD-MIC(0) preconditioning of rotated trilinear FEM elasticity systems // Comp. Assisted Mech. Eng. Sci. 2004. Vol. 11. P. 197–209.

[4] Hansbo P., Larson M.G. Discontinuous Galerkin and Crouzeix—Raviart the Element: Application to Elasticity. Prep. N 2000-09, Chalmers Finite Element Center, Göteborg, 2001. 12 p.

[5] Rannacher R., Turek S. Simple nonconforming quadrilateral Stokes element // Numer. Methods Partial Differential Equations. 1992. Vol. 8. P. 97–111.

[6] Kalinkin A.A., Laevsky Yu.M. Preconditioning of grid Lame equations in the nonconforming finite element method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2007. Vol. 22, N 1. P. 39–63.

[7] Kalinkin A.A., Laevsky Yu.M. A nonconforming finite element method for a three-dimensional problem of a elasticity theory // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2006. Vol. 21, N 4. P. 273–304.

[8] Коновалов А.Н. Метод скорейшего спуска с адаптивным попеременно-треугольным переобусловливателем // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 953–963.

[9] Kuznetsov Yu.A. Algebraic multigrid domain decomposition methods // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 1989. Vol. 4. P. 351–380.

[10] Самарский А.А., Николаев Е. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 20 февраля 2008 г.