Вычислительные технологии **Том 13, Специальный выпуск 5, 2008**

Об устойчивости пограничного слоя в трансзвуковом потоке*

К. В. Гузаева, В. И. Жук, И. Г. Проценко, А. В. Чернышев
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия
e-mail: procent@mipt.ru, zhuk@ccas.ru

A role of asymptotic approaches for studies of viscous-inviscid free interaction mechanism is discussed for the case of transonic velocities of external flow. Asymptotic theory provides opportunities to reveal an internal structure of the fluctuation fields, to interpret processes responsible for development of instability and to investigate the behavior of linear and nonlinear pulsations, as well as to indicate the properties of the spectrum of oscillations.

Распространение концепции самоиндуцированного давления [1–5] на случай трансзвуковых скоростей вносит в асимптотическую трехпалубную теорию свободного взаимодействия новые элементы. Оставляя в стороне возможность изменения самой структуры вязкого течения в трансзвуковом диапазоне (например, увеличения числа палуб (подслоев) в пограничном слое), нельзя не отметить неединственность возможных подходов к построению адекватной асимптотической теории. Данное обстоятельство находит свое отражение в сравнительном анализе способов получения асимптотических оценок и способов разложения в асимптотические ряды основных функций течения в различных работах, посвященных феномену вязко-невязкого взаимодействия при трансзвуковых скоростях внешнего потока.

Перенос основополагающих представлений теории пограничного слоя с самоиндуцированным давлением на околозвуковые режимы может приводить к различным оценкам масштабов возмущений в зависимости от роли нестационарных эффектов. Задача о взаимодействии в трансзвуковом диапазоне, впервые рассмотренная в [6], допускает введение времени во внешней потенциальной области потока [7] без изменения соответствующих стационарному режиму оценок. Последние, как показано в [8], устанавливаются, например, из законов подобия, имеющих место в теории [1–5], а именно: в формулах, вводящих специальную систему единиц для зависимых и независимых переменных, достаточно совершить предельный переход при числе Маха, стремящемся к единице.

Производные по времени имеют разные порядки во внешней потенциальной области и в пристеночной области пограничного слоя. Поле потока в пограничном слое квазистационарно, и, отбрасывая в уравнениях для нижней палубы временнóй член с малым параметром в качестве коэффициента, приходим к одной из формулировок [7] асимптотической теории нестационарных трансзвуковых течений вязкого газа, причем

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 04-01-00807 и № 04-01-00773).

асимптотические оценки, как отмечено выше, совпадают с ранее полученными для стационарной задачи [6].

Иной механизм распространения волн предложен в [9], где введенные масштабы переменных требуют сохранения нестационарных членов как во внешней, так и в пристеночной областях. Тем самым в подходе [9] демонстрируется возможность построения асимптотической теории нестационарных трансзвуковых течений, существенно отличной от теории [7] и в которой малый параметр перед производными по времени отсутствует.

Еще один из вариантов асимптотического упрощения точных уравнений трансзвуковых движений [10], при котором сохраняются свойства нелинейности и смешанности типа, осуществляет редукцию системы уравнений пограничного слоя с самоиндуцированным давлением к интегродифференциальному уравнению (обобщению уравнения Бенджамина — Оно). Отмеченный выриант [10] поддается интерпретации в терминах нелинейного критического слоя. Интересным обстоятельством является возможность описания потери устойчивости [11, 12] вязких течений.

Асимптотическая конструкция, включающая механизм свободного взаимодействия нелинейных возмущений в пограничном слое с внешним трансзвуковым потоком, приводит к следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}+K_\infty\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0; \tag{1а}$$

$$\frac{\partial\varphi(t,x,0)}{\partial x}=-p(t,x), \quad \frac{\partial\varphi(t,x,0)}{\partial y}=-\frac{\partial A(t,x)}{\partial x}; \tag{1б}$$

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial t}+u_\ell\frac{\partial u_\ell}{\partial x}+v_\ell\frac{\partial u_\ell}{\partial y_\ell}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial^2 u_\ell}{\partial y_\ell^2}; \tag{1в}$$

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial x}+\frac{\partial v_\ell}{\partial y_\ell}=0, \quad \frac{\partial p}{\partial y_\ell}=0; \tag{1г}$$

$$y_\ell=0\,:\,u_\ell=v_\ell=0, \quad y_\ell\to\infty\,:\,u_\ell\to y_\ell+A(t,x). \tag{1д}$$

С целью линеаризации уравнений системы (1) рассмотрим ее точное решение

$$u_\ell=y_\ell, \quad v_\ell=0, \quad p=0, \quad A=0, \quad \varphi=0.$$

Будем искать возмущение малой амплитуды ε этого решения в виде

$$\begin{aligned}
u_\ell &= y_\ell-\varepsilon\frac{df(y_\ell)}{dy_\ell}e^{ik(x-ct)},\\
v_\ell &= i\varepsilon kf(y_\ell)e^{ik(x-ct)},\\
p &= \varepsilon e^{ik(x-ct)},\\
A &= \varepsilon\mathcal{Q}_\circ\, e^{ik(x-ct)},\\
\varphi &= \varepsilon F(y)\, e^{ik(x-ct)}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Уравнение для потенциала (1а) дает

$$\frac{d^2F}{dy^2}-k^2(c-K_\infty)F=0. \tag{3}$$

В представлении (2) считаем $k > 0$, а на комплексной плоскости $c = c_r + ic_i$ проведем разрез по лежащему на действительной оси лучу $(-\infty, K_\infty)$. Тогда требование $\arg(c - K_\infty) \in (-\pi, \pi)$ выделяет регулярную ветвь аналитической функции $\Pi(c) = (c - K_\infty)^{1/2}$, такую, что $\mathrm{Real}\Pi(c) > 0$.

Решение уравнения (3), удовлетворяющее условию затухания $F \to 0$ при $y \to +\infty$, с учетом выбора ветви функции $\Pi(c)$ выписывается с точностью до множителя $S_\circ$:

$$F = \mathcal{S}_\circ e^{-k\,\Pi(c)\,y}. \tag{4}$$

Два условия (1б) при $y = 0$ позволяют найти как множитель $\mathcal{S}_\circ$, так и постоянную $\mathcal{Q}_\circ$ из представления (2) для A:

$$\mathcal{S}_\circ = \frac{i}{k}, \quad \mathcal{Q}_\circ = \frac{(c - K_\infty)^{1/2}}{k}. \tag{5}$$

Выражения (2) тождественно удовлетворяют уравнениям (1г). Что касается нелинейного уравнения (1в), то после подстановки в него выражений (2) отбросим квадратичные по ε члены, считая $\varepsilon \to 0$. В результате линейное приближение для (1в) сводится к уравнению третьего порядка с вытекающими из (1д), а также к (2), (5) с краевыми условиями:

$$\frac{d^3 f}{dy_\ell^3} - ik(y_\ell - c)\frac{df}{dy_\ell} + ikf + ik = 0; \tag{6а}$$

$$y_\ell = 0 \, : \, f = \frac{df}{dy_\ell} = 0, \quad y_\ell \to \infty \, : \, \frac{df}{dy_\ell} \to -\frac{(c - K_\infty)^{1/2}}{k}. \tag{6б}$$

Введем комплексный параметр

$$\zeta = -i^{1/3} k^{1/3} c. \tag{7}$$

Дифференцированием по y_ℓ и переходом к новой комплексной переменной

$$\mathcal{Z} = (ik)^{1/3} y_\ell + \zeta \tag{8}$$

уравнение (6а) трансформируется в уравнение Эйри

$$\frac{d^4 f}{d\mathcal{Z}^4} = \mathcal{Z}\frac{d^2 f}{d\mathcal{Z}^2} \tag{9}$$

относительно второй производной $d^2 f/d\mathcal{Z}^2$.

Граничные условия, задаваемые на твердой поверхности $y_\ell = 0$, после перехода на комплексную плоскость $\mathcal{Z}$ ставятся при $\mathcal{Z} = \zeta$. Подчиняющееся трем условиям (6б) решение уравнения (9) находится однозначно:

$$f = \mathcal{N}_\circ \int\limits_\zeta^{\mathcal{Z}} d\mathcal{Z}' \int\limits_\zeta^{\mathcal{Z}'} \mathrm{Ai}(\mathcal{Z}'')\, d\mathcal{Z}'', \quad \mathcal{N}_\circ = -\frac{(c - K_\infty)^{1/2}}{i^{1/3} k^{4/3}} \left[\int\limits_\zeta^{\infty} \mathrm{Ai}(\mathcal{Z})\, d\mathcal{Z}\right]^{-1} \tag{10}$$

и выражается через функцию Эйри $\mathrm{Ai}(Z)$. Из пары двух линейно независимых решений уравнения Эйри [13] именно функция $\mathrm{Ai}(\mathcal{Z})$ экспоненциально затухает при $\mathcal{Z} \to \infty$ по направлению луча $\arg \mathcal{Z} = \pi/6$ и тем самым дает возможность обеспечить выполнение асимптотического предельного условия в (6б).

Однако повышение порядка уравнения (9) по сравнению с уравнением (6а) диктует необходимость присоединить к условиям (6б) еще условие

$$\frac{d^3 f(0)}{dy_\ell^3} = -ik, \tag{11}$$

представляющее собой следствие из уравнения (6а), рассмотренного в точке $y_\ell = 0$.

Наличие дополнительного условия (11) показывает, что задача (6а), (6б) является задачей на собственные значения. Ее решение существует не при всех значениях фазовой скорости c и волнового числа k возмущений (2). Подстановка решения (10) в условие (11) приводит к дисперсионному соотношению

$$\frac{d\mathrm{Ai}(\zeta)}{d\mathcal{Z}} \left[\int_{\zeta}^{\infty} \mathrm{Ai}(\mathcal{Z})\, d\mathcal{Z} \right]^{-1} = \frac{i^{1/3} k^{4/3}}{(c - K_\infty)^{1/2}}. \tag{12}$$

Таким образом, задача (6а), (6б) имеет решение, если параметры c и k связаны уравнением (12). Соответствующая собственная функция определяется посредством (10). Построенные по ней флуктуационные поля (2) представляют не что иное, как волны Толлмина — Шлихтинга с критическими слоями, прилегающими к обтекаемой трансзвуковым потоком поверхности.

Покажем, что среди решений дисперсионного уравнения существуют собственные числа, соответствующие неустойчивым собственным функциям. В самом деле, устремим комплексный параметр ζ из (7) в бесконечность и воспользуемся асимптотическим представлением [13] функции Эйри в секторе $\arg \mathcal{Z} \in (-\pi, \pi)$. В результате левая часть дисперсионного соотношения (12), которую обозначим $\Phi(\zeta)$, разлагается при $\zeta \to \infty$ в асимптотический ряд

$$\Phi(\zeta) = -\zeta - \zeta^{-1/2} + O(\zeta^{-2}), \quad \arg \zeta \in (-\pi, \pi). \tag{13}$$

Предположение $\zeta \to \infty$ устанавливает в силу (13) соотношение эквивалентности главных членов в (12):

$$\zeta \sim \frac{e^{-\frac{5}{6}\pi i} k^{\frac{4}{3}}}{(c - K_\infty)^{\frac{1}{2}}}. \tag{14}$$

Однозначная ветвь многозначной функции высшего порядка малости $\zeta^{-1/2}$ в (13) выделяется выбором сектора $\arg \zeta \in (-\pi, \pi)$ на комплексной плоскости ζ. Именно из этих соображений предписывается значение аргумента в выражении из правой части (14). Рассматривая это выражение как первое приближение и подставляя его в $\zeta^{-1/2}$ из (13), получим в двух приближениях с точностью ζ^{-2} асимптотическую форму дисперсионного уравнения (12):

$$\zeta = \frac{e^{-\frac{5}{6}\pi i} k^{\frac{4}{3}}}{(c - K_\infty)^{\frac{1}{2}}} + \frac{e^{\frac{5}{12}\pi i} (c - K_\infty)^{\frac{1}{4}}}{k^{\frac{2}{3}}}. \tag{15}$$

С учетом определения (7) параметра ζ из (15) находим неявную функцию, связывающую фазовую скорость c и волновое число k:

$$c = \frac{k}{(c - K_\infty)^{\frac{1}{2}}} + \frac{e^{\frac{1}{4}\pi i}}{k^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}}. \tag{16}$$

Заметим, что как (15), так и (16) подразумевают при своем выводе, что мнимая часть c_i фазовой скорости $c = c_r + i\,c_i$ мала по сравнению с ее действительной частью c_r.

Уравнение дисперсионной кривой в форме (16) справедливо при $k \to +\infty$ и позволяет сделать принципиальный вывод о неустойчивости соответствующей моды из спектра собственных функций. В самом деле, из представления (16) видно, что $c_i > 0$ и возмущения (2) экспоненциально нарастают по времени.

Воспользовавшись тем, что из (16) следует $c \to \infty$ при $k \to +\infty$, разрешим уравнение (16) относительно $c = c_r + i\,c_i$, а именно

$$c_r = k^{2/3} + \frac{K_\infty}{3} + O\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right), \quad c_i = \frac{2^{1/2}}{3k^{5/6}} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right). \tag{17}$$

В экспоненциальную зависимость (2) от времени фактически входит комплексная частота $\omega = \omega_r + i\,\omega_i = -kc$, причем величина $-\omega_i$ представляет собой инкремент нарастания возмущений. Для действительной и мнимой частей комплексной частоты из (17) находим

$$\omega_r = -k^{5/3} + \frac{K_\infty k}{3} + O\left(k^{1/3}\right), \quad \omega_i = -\frac{2^{1/2}k^{1/6}}{3} + O\left(\frac{1}{k^{1/2}}\right). \tag{18}$$

Итак, инкремент нарастания не только положителен, но и неограничен: из (18) видно, что $-\omega_i \to +\infty$ для $k \to +\infty$. По-видимому, данное обстоятельство впервые отмечено в [9]; физическое пояснение упомянутого феномена предложено в [14, 15].

Список литературы

[1] Нейланд В.Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 4. С. 53–57.

[2] Stewartson K., Williams P.G. Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1969. Vol. 312, N 1509. P. 181–206.

[3] Messiter A.F. Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM J. Appl. Math. 1970. Vol. 18, N 1. P. 241–257.

[4] Сычев В.В. О ламинарном отрыве // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 3. С. 47–59.

[5] Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев В.В., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений / Под ред. В.В. Сычева. М.: Наука, 1987. 255 с.

[6] Messiter A.F., Feo A., Melnik R.E. Shock-wave strength for separation of a laminar boundary layer at transonic speeds // AIAA J. 1971. Vol. 9, N 6. P. 1197–1198.

[7] Рыжов О.С. О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околозвуковых скоростях внешнего потока // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236, № 5. С. 1091–1094.

[8] Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies // Adv. Appl. Mech. 1974. Vol. 14. P. 145–239.

[9] Рыжов О.С., Савенков И.В. Об устойчивости пограничного слоя при трансзвуковых скоростях внешнего потока // ПМТФ. 1990. № 2. С. 65–71.

[10] Жук В.И. Нелинейные возмущения, индуцирующие собственный градиент давления в пограничном слое на пластине в трансзвуковом потоке // ПММ. 1993. Т. 57, вып. 5. С. 68–78.

[11] Smith F.T. On the nonparallel flow stability of the Blasius boundary layer // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1979. Vol. 366, N 1724. P. 91–109.

[12] Жук В.И., Рыжов О.С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253, № 6. С. 1326–1329.

[13] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.

[14] Жук В.И. Асимптотика верхней ветви нейтральной кривой при до- и трансзвуковых скоростях внешнего потока // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31, № 11. С. 1716–1730.

[15] Жук В.И. Волны Толлмина — Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.

Поступила в редакцию 28 марта 2008 г.