

Численный метод решения задач электромагнитного рассеяния на трехмерном магнитоэлектрическом теле при наличии вблизи него тонких проводников

А. Г. ДМИТРЕНКО, Ю. А. КЕЛЛЕР

Томский государственный университет, Россия
e-mail: dmitr@fmpk.tsu.ru, kua1102@sibmail.com

We suggest a variant of the auxiliary sources method for solution of the electromagnetic scattering problem by a three-dimensional magnetodielectric body when thin wires are located nearby. Capabilities of the developed computer code are briefly described. We present some results of numerical calculations aimed at analyzing the influence of thin wires on the scattering cross-section of a dielectric body and the influence of a dielectric body on the distribution of current along the wires. The influence of the deviations from the axisymmetric shape of a dielectric body on the back scattering cross-section is also considered.

Введение

Значительный интерес для исследователей представляет изучение рассеяния электромагнитных волн в резонансной частотной области трехмерным магнитоэлектрическим телом при наличии в его окрестности тонких проводников конечной длины. Этот интерес обусловлен необходимостью решения таких практически важных проблем, как проблемы электромагнитной совместимости, конструирования многоэлементных антенных систем, радиолокационной заметности и др.

Если расстояние между диэлектрическим телом и проводниками меньше длины волны или сравнимо с нею, то корректная постановка исследований подобного рода приводит к необходимости решения граничных задач теории рассеяния с учетом электромагнитного взаимодействия рассеивателей. Существующие численные методы [1], в принципе, позволяют решать подобные задачи. Применительно к задачам, рассматриваемым в данной статье, из наиболее популярных методов предпочтительным оказывается метод интегральных уравнений. Однако соответствующие вычислительные алгоритмы получаются чрезвычайно емкими по затратам компьютерной памяти и времени вычислений, особенно в случае рассеивателей, не обладающих симметрией вращения, что обусловлено необходимостью вычисления большого числа поверхностных или объемных интегралов.

В последние годы для решения задач электромагнитного рассеяния на системах взаимодействующих тел начали использовать метод вспомогательных источников [2–4]. В частности, в работах [3, 4] предложены варианты этого метода для численного

решения задач электромагнитного рассеяния на структурах, составленных из конечного числа трехмерных идеально проводящих тел, часть которых может быть тонкими проводниками.

Данная статья продолжает серию работ, посвященных применению метода вспомогательных источников к анализу рассеяния на системах тел. В ней предложен вариант метода вспомогательных источников для численного решения задач электромагнитного рассеяния на структурах, состоящих из объемного диэлектрического тела и расположенных вблизи него тонких проводников конечной длины. Даны математическая формулировка варианта и краткое описание возможностей реализованной на его основе программы для расчета компонент рассеянного поля. Приведены некоторые результаты численных расчетов, характеризующие влияние тонких проводников на сечения рассеяния диэлектрического тела и влияние диэлектрического тела на распределение тока вдоль проводников. Рассмотрено также влияние отклонений формы диэлектрического тела от осесимметричной на сечение обратного рассеяния.

1. Формулировка задачи и метод ее решения

Геометрия задачи показана на рис. 1. Будем рассматривать стационарную задачу дифракции электромагнитного поля $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ на структуре, состоящей из объемного диэлектрического тела D_i , ограниченного поверхностью S , с диэлектрической ε_i и маг-

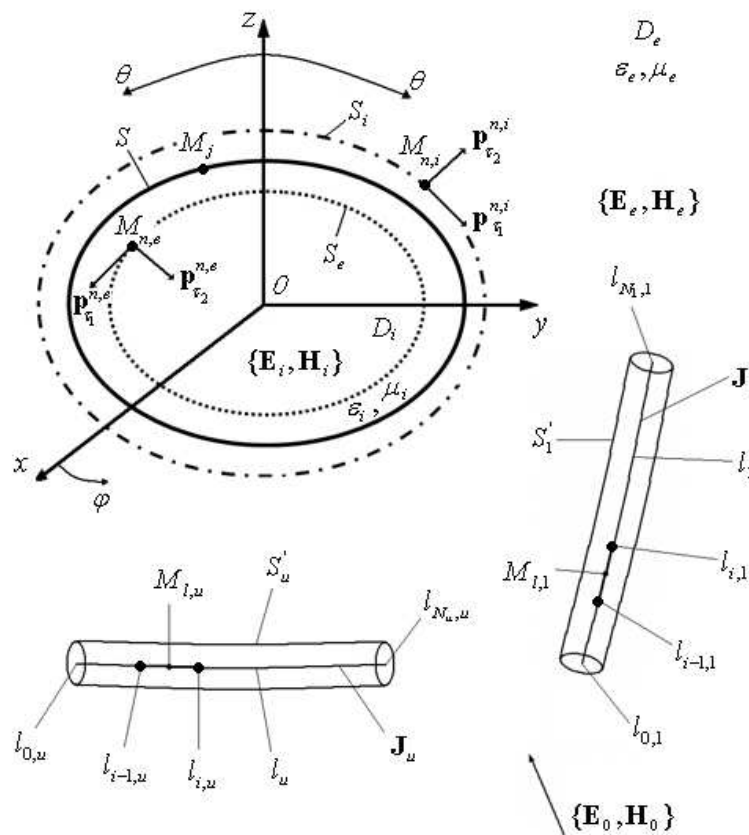


Рис. 1. Геометрия задачи

нитной μ_i проницаемостями и U тонких проводников, ограниченных поверхностями S'_u ($u = 1, 2, \dots, U$) и расположенных произвольным образом по отношению к телу D_i (зависимость от времени выбрана в виде $\exp\{-i\omega t\}$). Под объемным телом будем понимать тело, максимальный и минимальный поперечный размеры которого сравнимы между собой, а под тонким проводником — идеальный проводник круглого сечения, диаметр которого конечен, но мал по сравнению с длиной проводника и длиной волны. Эта структура размещена в однородной безграничной среде D_e с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_e, μ_e в декартовой системе координат с центром, выбранным внутри диэлектрического тела. Требуется найти рассеянное поле $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ в области D_e .

Математическая формулировка задачи имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_e &= i\omega\mu_e\mathbf{H}_e \\ \nabla \times \mathbf{H}_e &= -i\omega\varepsilon_e\mathbf{E}_e \end{aligned} \right|_{D_e}, \quad \left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_i &= i\omega\mu_i\mathbf{H}_i \\ \nabla \times \mathbf{H}_i &= -i\omega\varepsilon_i\mathbf{E}_i \end{aligned} \right|_{D_i}, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e) &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}_0 \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_e) &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}_0 \end{aligned} \right|_S, \quad \mathbf{n}_u \times \mathbf{E}_e = -\mathbf{n}_u \times \mathbf{E}_0 \text{ на } S'_u, \quad u = \overline{1, U}, \quad (2)$$

$$\{\sqrt{\varepsilon_e}\mathbf{E}_e; \sqrt{\mu_e}\mathbf{H}_e\} \times \mathbf{R}/R + \{\sqrt{\mu_e}\mathbf{H}_e; -\sqrt{\varepsilon_e}\mathbf{E}_e\} = O(R^{-1}), \quad R \longrightarrow \infty, \quad (3)$$

где $\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e$ и $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ — поля в областях D_e и D_i , \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности S , \mathbf{n}_u ($u = 1, 2, \dots, U$) — единичные векторы нормалей к поверхностям S'_u тонких проводников, $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ — векторное произведение.

Суть предлагаемого метода заключается в следующем. Аналогично тому, как это сделано в работе [5], введем (рис. 1) две вспомогательные поверхности S_i и S_e , подобные поверхности диэлектрического тела S в смысле гомотетии (подобия) с центром в точке O , расположенной внутри тела и являющейся началом системы координат. Если поверхность S является центральной, то центр гомотетии выбираем так, чтобы он совпадал с центром поверхности. Поверхность $S_e = K_e S$ расположена внутри диэлектрического тела и характеризуется коэффициентом гомотетии K_e , меньшим единицы; поверхность $S_i = K_i S$ расположена вне тела и характеризуется коэффициентом подобия K_i , большим единицы. Если $K_e = K_i = 1$, вспомогательные поверхности S_e и S_i совпадают с S .

Выберем на вспомогательной поверхности S_e конечную совокупность точек $\{M_{n,e}\}_{n=1}^{N_e}$, в каждой из которых разместим пару независимых элементарных электрических диполей с моментами $\mathbf{p}_{\tau_1}^{n,e} = p_{\tau_1}^{n,e} \mathbf{e}_{\tau_1}^{n,e}$ и $\mathbf{p}_{\tau_2}^{n,e} = p_{\tau_2}^{n,e} \mathbf{e}_{\tau_2}^{n,e}$, а на вспомогательной поверхности S_i — конечную совокупность точек $\{M_{n,i}\}_{n=1}^{N_i}$, в каждой из которых разместим пару независимых вспомогательных электрических диполей с моментами $\mathbf{p}_{\tau_1}^{n,i} = p_{\tau_1}^{n,i} \mathbf{e}_{\tau_1}^{n,i}$ и $\mathbf{p}_{\tau_2}^{n,i} = p_{\tau_2}^{n,i} \mathbf{e}_{\tau_2}^{n,i}$. Единичные векторы $\mathbf{e}_{\tau_1}^{n,e}, \mathbf{e}_{\tau_2}^{n,e}$ выбраны в плоскости, касательной к S_e в точке $M_{n,e}$, а единичные векторы $\mathbf{e}_{\tau_1}^{n,i}, \mathbf{e}_{\tau_2}^{n,i}$ — в плоскости, касательной к S_i в точке $M_{n,i}$. Предполагается, что диполи, размещенные на S_e , излучают в однородную среду с параметрами ε_e, μ_e , а диполи, размещенные на S_i , — в однородную среду с параметрами ε_i, μ_i .

Внутри каждого из тонких проводников на оси разместим непрерывно распределенный вспомогательный ток \mathbf{J}_u , аналогично тому, как это сделано в работе [4].

Представим неизвестное рассеянное поле $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ в D_e в виде суммы полей вспомогательных диполей, расположенных на вспомогательной поверхности S_e , и вспомогательных токов:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_e(M) &= \frac{i\omega}{k_e^2} \left\{ \sum_{n=1}^{N_e} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Pi}_{n,e}) + \sum_{u=1}^U \nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Pi}_u) \right\}, \\ \mathbf{H}_e(M) &= \frac{1}{\mu_e} \left\{ \sum_{n=1}^{N_e} \nabla \times \mathbf{\Pi}_{n,e} + \sum_{u=1}^U \nabla \times \mathbf{\Pi}_u \right\}, \\ \mathbf{\Pi}_{n,e} &= \Psi_e(M, M_{n,e}) \mathbf{p}_\tau^{n,e}, \quad \mathbf{p}_\tau^{n,e} = p_{\tau_1}^{n,e} \mathbf{e}_{\tau_1}^{n,e} + p_{\tau_2}^{n,e} \mathbf{e}_{\tau_2}^{n,e}, \\ \mathbf{\Pi}_u &= \int_{l_u} \Psi_e(M, M_{l,u}) \mathbf{J}_u dl, \quad M \in D_e,\end{aligned}\tag{4}$$

а поле $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$ в D_i — в виде суммы полей вспомогательных диполей, расположенных на вспомогательной поверхности S_i :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_i(M) &= \frac{i\omega}{k_i^2} \left\{ \sum_{n=1}^{N_i} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Pi}_{n,i}) \right\}, \\ \mathbf{H}_i(M) &= \frac{1}{\mu_i} \sum_{n=1}^{N_i} \nabla \times \mathbf{\Pi}_{n,i}, \\ \mathbf{\Pi}_{n,i} &= \Psi_i(M, M_{n,i}) \mathbf{p}_\tau^{n,i}, \\ \mathbf{p}_\tau^{n,i} &= p_{\tau_1}^{n,i} \mathbf{e}_{\tau_1}^{n,i} + p_{\tau_2}^{n,i} \mathbf{e}_{\tau_2}^{n,i}, \quad M \in D_i.\end{aligned}\tag{5}$$

В представлениях (4), (5)

$$\begin{aligned}\Psi_e(M, M_{n,e}) &= \exp(ik_e R_{MM_{n,e}}) / 4\pi R_{MM_{n,e}}; \\ \Psi_e(M, M_{l,u}) &= \exp(ik_e R_{MM_{l,u}}) / 4\pi R_{MM_{l,u}}; \\ \Psi_i(M, M_{n,i}) &= \exp(ik_i R_{MM_{n,i}}) / 4\pi R_{MM_{n,i}}; \\ k_{e,i} &= \omega \sqrt{\varepsilon_{e,i} \mu_{e,i}};\end{aligned}$$

$R_{MM_{n,e}}$ и $R_{MM_{l,u}}$ — расстояния от точки $M_{n,e}$ на вспомогательной поверхности S_e и точки $M_{l,u}$ на оси проводника с номером u до точки наблюдения M в D_e ; $R_{MM_{n,i}}$ — расстояние от точки $M_{n,i}$ на вспомогательной поверхности S_i до точки M в D_i ; $p_{\tau_1}^{n,e}$, $p_{\tau_2}^{n,e}$ ($n = 1, 2, \dots, N_e$) и $p_{\tau_1}^{n,i}$, $p_{\tau_2}^{n,i}$ ($n = 1, 2, \dots, N_i$) — неизвестные дипольные моменты; N_e и N_i — числа точек размещения диполей на вспомогательных поверхностях S_e и S_i ; \mathbf{J}_u ($u = 1, 2, \dots, U$) — неизвестные осевые вспомогательные токи; интегрирование в (4) проводится вдоль оси проводников l_u .

Представления (4) и (5) удовлетворяют уравнениям Максвелла (1) и условиям излучения (3). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (2), необходимо соответствующим образом выбрать значения дипольных моментов $p_{\tau_1}^{n,e}$, $p_{\tau_2}^{n,e}$ ($n = 1, 2, \dots, N_e$) и $p_{\tau_1}^{n,i}$, $p_{\tau_2}^{n,i}$ ($n = 1, 2, \dots, N_i$) и распределения осевых токов \mathbf{J}_u ($u = 1, 2, \dots, U$).

Введем кусочно-постоянную аппроксимацию осевых токов. Разобьем линию тока l_u каждого тока \mathbf{J}_u на N_u малых участков, в пределах каждого из которых ток можно

считать постоянным. Тогда выражение для $\mathbf{\Pi}_u$ в (4) приближенно можно записать в виде

$$\mathbf{\Pi}_u = \sum_{i=1}^{N_u} J_{u,i} \mathbf{e}_{u,i} \int_{l_{i-1,u}}^{l_{i,u}} \Psi_e(M, M_{l,u}) dl, \quad (6)$$

где $J_{u,i}$ — величина тока на i -м участке проводника с номером u ; $\mathbf{e}_{u,i}$ — единичный вектор, направление которого совпадает с направлением касательной в средней точке рассматриваемого участка. При таком подходе нахождение неизвестных распределений осевых токов сводится к нахождению значений $\sum_{u=1}^U N_u$ элементов тока.

Для нахождения величин дипольных моментов и элементов тока используем граничные условия (2), удовлетворяя им в соответствии с методом коллокаций. Пусть M_j ($j = 1, 2, \dots, L$) — точки на поверхности диэлектрического тела S , а M'_j ($j = 1, 2, \dots, L_u$) — точки коллокации на поверхности проводников S'_u ; L — число точек коллокации на S , а L_u — число точек коллокации на S'_u . В силу предположения о малости диаметра проводника по сравнению с длиной проводника и длиной волны будем считать, что вкладом в рассеянное поле азимутальных составляющих токов на поверхностях проводников можно пренебречь. Тогда для нахождения неизвестных $p_{\tau_1}^{n,e}$, $p_{\tau_2}^{n,e}$ ($n = 1, 2, \dots, N_e$), $p_{\tau_1}^{n,i}$, $p_{\tau_2}^{n,i}$ ($n = 1, 2, \dots, N_i$) и $J_{u,i}$ ($u = 1, 2, \dots, U$, $i = 1, 2, \dots, N_u$) получим следующую систему линейных алгебраических уравнений с комплексной матрицей размерности $\left(4L + \sum_{u=1}^U L_u\right) \times \left(2N_e + 2N_i + \sum_{u=1}^U N_u\right)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^j \times (\mathbf{E}_i^j - \mathbf{E}_e^j) &= \mathbf{n}^j \times \mathbf{E}_0^j, \\ \mathbf{n}^j \times (\mathbf{H}_i^j - \mathbf{H}_e^j) &= \mathbf{n}^j \times \mathbf{H}_0^j, \\ j &= 1, 2, \dots, L, \\ E_{e,u,l}^j &= -E_{0,u,l}^j, \quad u = 1, 2, \dots, U, \quad j = 1, 2, \dots, L_u, \end{aligned} \quad (7)$$

где \mathbf{n}_j — значение единичного вектора нормали в точке M_j на поверхности диэлектрического тела; \mathbf{E}_e^j , \mathbf{H}_e^j и \mathbf{E}_i^j , \mathbf{H}_i^j — значение компонент внешнего и внутреннего полей в точке M_j ; \mathbf{E}_0^j , \mathbf{H}_0^j — значения компонент возбуждающего поля в этой же точке; $E_{e,u,l}$ и $E_{0,u,l}$ — значения составляющих рассеянного и возбуждающего полей вдоль оси проводника с номером u в точках коллокации на его поверхности.

Отметим, что, в отличие от обычно используемых систем линейных алгебраических уравнений метода дискретных источников [6], элементы матриц которых выражены в конечном виде, $\left(4L + \sum_{u=1}^U L_u\right) \times \sum_{u=1}^U N_u$ элементов матрицы системы (7) содержат интегралы, которые возникают при применении в соответствии с (4) необходимых дифференциальных операторов к функции $\mathbf{\Pi}_u$ (это элементы матрицы, стоящие перед $J_{u,i}$).

Для дальнейшего изложения удобно систему линейных алгебраических уравнений (7) записать в каноническом виде

$$A\mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (8)$$

где A — комплексная матрица, $\mathbf{p} = \{p_{\tau_1}^{n,e}, p_{\tau_2}^{n,e} (n = 1, 2, \dots, N_e); p_{\tau_1}^{n,i}, p_{\tau_2}^{n,i} (n = 1, 2, \dots, N_i); J_{u,i} (u = 1, 2, \dots, U, i = 1, 2, \dots, N_u)\}$ — подлежащий определению вектор, составленный

из неизвестных дипольных моментов и элементов тока, \mathbf{f} — известный вектор, содержащий компоненты возбуждающего поля.

Будем полагать, что $N_i = N_e$, число точек коллокации на поверхности диэлектрического тела $L > N_e$, а число точек коллокации на поверхности каждого из проводников $L_u > N_u$. Тогда число уравнений системы (8) будет превышать число неизвестных, т. е. система (8) будет переопределенной. Переопределение системы играет двойную роль: во-первых, позволяет более точно удовлетворить граничным условиям при том же числе неизвестных, во-вторых, является регуляризирующим фактором, поскольку система (8) в силу малого различия соседних строк и столбцов матрицы оказывается плохо обусловленной. Под решением переопределенной системы обычно подразумевается псевдорешение (см., например, [7]), т. е. такой вектор \mathbf{p} , который доставляет минимум функционалу

$$\Phi = \|\mathbf{A}\mathbf{p} - \mathbf{f}\|^2, \quad (9)$$

представляющему собой квадрат евклидовой нормы вектора невязки системы (8). Таким образом, задача нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений (8) эквивалентна задаче минимизации функционала (9), который в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_{j=1}^L \left\{ |\mathbf{n}^j \times (\mathbf{E}_i^j - \mathbf{E}_e^j) - \mathbf{n}^j \times \mathbf{E}_0^j|^2 + \frac{\mu_e}{\varepsilon_e} |\mathbf{n}^j \times (\mathbf{H}_i^j - \mathbf{H}_e^j) - \mathbf{n}^j \times \mathbf{H}_0^j|^2 \right\} + \\ + \sum_{u=1}^U \sum_{j=1}^{L_u} |E_{e,u,l}^j + E_{0,u,l}^j|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для решения системы (8) (минимизации функционала (9)) использован метод сопряженных градиентов, алгоритм которого приведен в работе [8]. Это — итеративный процесс, который начинается заданием некоторого начального приближения $\mathbf{p}^{(0)}$ и вычисления начальных значений вектора невязки

$$\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{A}\mathbf{p}^{(0)} - \mathbf{f} \quad (11)$$

и вектора направления

$$\mathbf{S}^{(0)} = -\mathbf{A}^* \mathbf{R}^{(0)}. \quad (12)$$

Далее выполняется следующая последовательность итераций:

$$\begin{aligned} t^{(k)} &= \frac{\|\mathbf{A}^* \mathbf{R}^{(k)}\|^2}{\|\mathbf{A}\mathbf{S}^{(k)}\|^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{p}^{(k+1)} &= \mathbf{p}^{(k)} + t^{(k)} \mathbf{S}^{(k)}, \\ \mathbf{R}^{(k+1)} &= \mathbf{R}^{(k)} + t^{(k)} \mathbf{A}\mathbf{S}^{(k)}, \\ q^{(k)} &= \frac{\|\mathbf{A}^* \mathbf{R}^{(k+1)}\|^2}{\|\mathbf{A}^* \mathbf{R}^{(k)}\|^2}, \\ \mathbf{S}^{(k+1)} &= -\mathbf{A}^* \mathbf{R}^{(k+1)} + q^{(k)} \mathbf{A}\mathbf{S}^{(k)}. \end{aligned} \quad (13)$$

В выражениях (12) и (13) \mathbf{A}^* — матрица, транспонированная комплексно сопряженная матрице \mathbf{A} .

Известны (см., например, [8]) теоретические оценки скорости сходимости итерационного процесса (11)–(13), наилучшей из которых является следующая:

$$\frac{\|\mathbf{p}^{(k)} - \mathbf{p}_{\text{exact}}\|}{\|\mathbf{p}^{(0)} - \mathbf{p}_{\text{exact}}\|} \leq \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{B} + \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\right)^k + \left(\frac{\sqrt{B} - \sqrt{b}}{\sqrt{B} + \sqrt{b}}\right)^k}, \quad (14)$$

где $\mathbf{p}^{(k)}$ — значение искомого вектора \mathbf{p} в результате выполнения k -й итерации, $\mathbf{p}^{(0)}$ — его начальное значение, $\mathbf{p}_{\text{exact}}$ — его точное значение, B и b — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A^*A . Если учесть, что отношение B/b определяет число обусловленности матрицы A^*A , то оценка (14) может быть переписана

$$\frac{\|\mathbf{p}^{(k)} - \mathbf{p}_{\text{exact}}\|}{\|\mathbf{p}^{(0)} - \mathbf{p}_{\text{exact}}\|} \leq \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{\text{cond}(A^*A)} + 1}{\sqrt{\text{cond}(A^*A)} - 1}\right)^k + \left(\frac{\sqrt{\text{cond}(A^*A)} - 1}{\sqrt{\text{cond}(A^*A)} + 1}\right)^k}. \quad (15)$$

Из оценки (15) следует, что итерационный процесс (11)–(13) является сходящимся, однако скорость сходимости существенно определяется значением числа обусловленности матрицы A решаемой системы. Чем хуже обусловленность матрицы A (следовательно, и матрицы A^*A , так как $\text{cond}(A^*A) = (\text{cond}A)^2$), тем меньше скорость сходимости итерационного процесса метода сопряженных градиентов, а при очень больших числах обусловленности, когда $\sqrt{\text{cond}(A^*A)} \geq 1$, она должна быть очень низкой. Например, если $\sqrt{\text{cond}(A^*A)} = 10^3$, что типично для систем типа (7), то после выполнения 100-й итерации в соответствии с оценкой (15) имеем $\|\mathbf{p}^{(k)} - \mathbf{p}_{\text{exact}}\|/\|\mathbf{p}^{(0)} - \mathbf{p}_{\text{exact}}\| \leq 0.980$, а после выполнения 500-й итерации имеем $\|\mathbf{p}^{(k)} - \mathbf{p}_{\text{exact}}\|/\|\mathbf{p}^{(0)} - \mathbf{p}_{\text{exact}}\| \leq 0.649$, т. е. полученное решение все еще может существенно отличаться от точного. К счастью, наши многочисленные вычислительные эксперименты, касающиеся применения итерационного процесса (11)–(13) к системе (7), показали, что для системы (7) процесс (11)–(13) сходится гораздо быстрее, чем это показывает оценка (15). Результаты одного из таких экспериментов приведены на рис. 3 в следующем разделе.

После определения в результате решения системы (7) неизвестных дипольных моментов $p_{\tau_1}^{n,e}$, $p_{\tau_2}^{n,e}$ ($n = 1, 2, \dots, N_e$) и $p_{\tau_1}^{n,i}$, $p_{\tau_2}^{n,i}$ ($n = 1, 2, \dots, N_i$) и элементов тока $J_{u,i}$ ($u = 1, 2, \dots, U$, $i = 1, 2, \dots, N_u$) необходимые характеристики рассеянного поля находятся из (4).

Контроль точности решения осуществляется путем вычисления относительного значения функционала (10) на сетке точек, промежуточных по отношению к точкам коллокации, выбираемых как на поверхности диэлектрического тела S , так и на поверхностях S'_u всех проводников, входящих в структуру:

$$\Delta = (\Phi'/\Phi_0)^{1/2}, \quad \Phi_0 = \sum_{j=1}^{L'} \left\{ |\mathbf{n}^j \times \mathbf{E}_0^j|^2 + \frac{\mu_e}{\varepsilon_e} |\mathbf{n}^j \times \mathbf{H}_0^j|^2 \right\} + \sum_{u=1}^U \sum_{j=1}^{L'_u} |E_{0,u,l}^j|^2, \quad (16)$$

где Φ' — значение функционала (10) на указанной выше совокупности точек; Φ_0 — значение соответствующей нормы падающего поля на этой же совокупности точек; L' — число промежуточных точек на поверхности диэлектрического тела; L'_u — число промежуточных точек на поверхности проводника с номером u .

2. Численные результаты

На основании изложенного выше метода создана программа для расчета компонент рассеянного поля и контроля точности получаемого решения. Диэлектрическое тело может быть либо трехосным эллипсоидом, либо конечным цилиндром с эллиптическим поперечным сечением. Торцы цилиндра предполагаются скругленными половинками трехосных эллипсоидов. Максимальное число тонких проводников в структуре, предусмотренное программой, равно трем. Предполагается, что все проводники прямолинейные. Положение проводников относительно диэлектрического тела, а также длина проводников определяются заданием координат начальной и конечной точек проводника.

Помимо типа геометрии диэлектрического тела и положения проводников, входными величинами программы являются значения геометрических параметров диэлектрического тела (в длинах волн), значения относительных диэлектрической $\varepsilon_i/\varepsilon_e$ и магнитной μ_i/μ_e проницаемостей, возбуждающее поле $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$, параметры подобия K_e и K_i , числа точек размещения диполей N_e и N_i , числа участков разбиения N_u осевых токов, а также числа точек коллокации L и L_u на поверхностях диэлектрического тела и тонких проводников. Отметим, что на поверхности тонкого проводника точки коллокации размещаются только на его цилиндрической части; на торцах проводника точки коллокации не размещаются. Это означает, что мы пренебрегаем влиянием торцов на рассеянное поле. Сравнение результатов расчета бистатических сечений рассеяния, полученных при дополнительном размещении точек коллокации на торцах, с результатами, полученными при размещении точек коллокации только на цилиндрической части проводника, показали, что влиянием торцов на эту характеристику рассеянного поля действительно можно пренебречь, если длина проводника в 10 раз и более превышает его диаметр.

При реализации итерационного процесса (11)–(13) в качестве начального приближения выбрано нулевое значение вектора \mathbf{p} ($\mathbf{p}^{(0)} = 0$); итерационный процесс останавливается при условии, если относительное изменение функционала (10) на каждой из десяти последних итераций не превышает 10^{-4} . При помощи данной программы выполнена серия вычислительных экспериментов, направленных на исследование влияния тонких проводников на сечения рассеяния диэлектрических тел, на исследование влияния диэлектрических тел на распределение тока вдоль проводников, а также на исследование влияния отклонения формы диэлектрического тела от осесимметричной на сечение обратного рассеяния. Некоторые результаты приведены ниже.

Рисунки 3–6 относятся к показанной на рис. 2 структуре, состоящей из эллипсоида и трех проводников. Полуоси эллипсоида $k_e a$, $k_e b$, $k_e c$ ориентированы вдоль осей x , y , z соответственно и имеют следующие значения: $k_e a = k_e b = 3$, $k_e c = 4$. Относительные диэлектрическая $\varepsilon_i/\varepsilon_e$ и магнитная μ_i/μ_e проницаемости эллипсоида соответственно равны 8 и 1. Все проводники ориентированы вдоль оси x , имеют одинаковую длину l , равную 0.9λ ($k_e l = 5.65$), и одинаковый радиус r , равный 0.02λ ($k_e r = 0.125$). Проводники 1 и 3 (рис. 2) расположены на оси x симметрично относительно эллипсоида; Δx — расстояние между ближайшей к эллипсоиду концевой точкой проводника и поверхностью эллипсоида. Проводник 2 расположен со стороны падения возбуждающей волны на расстоянии Δz от эллипсоида также симметрично его поверхности. Структура возбуждается плоской волной, падающей таким образом, что векторы \mathbf{k}_e и \mathbf{E}_0 находятся в плоскости xz ; угол ψ — это угол между положительным направлением оси z и направлением падения волны (угол падения).

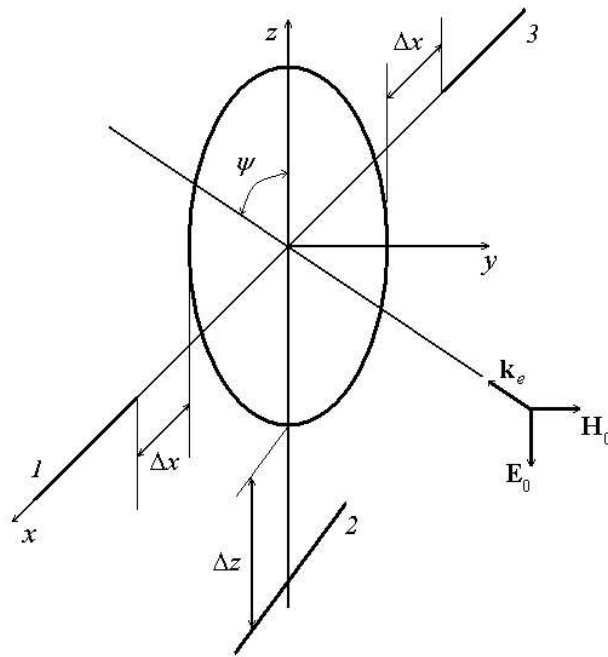


Рис. 2. Структура, состоящая из эллипсоида и трех проводников

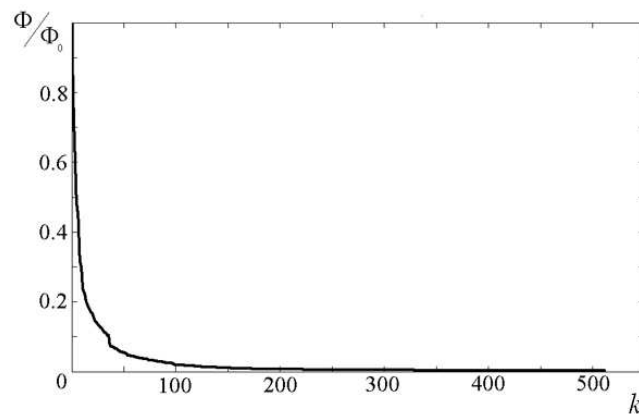


Рис. 3. Зависимость относительного значения функционала невязки граничных условий от номера итерации

При получении результатов, представленных на рис. 3–6, использованы следующие параметры метода. Положения вспомогательных поверхностей характеризуются значениями параметров подобия $K_e = 0.6$ и $K_i = 4$. Число точек размещения диполей на внутренней и внешней вспомогательных поверхностях выбрано одинаковым: $N_e = N_i = 576$; распределены эти точки следующим образом. В каждом из 24 полусечений $\varphi = \text{const}$, отстоящих одно от другого на угловое расстояние $\Delta\varphi = 15^\circ$, равномерно по углу θ выбраны 24 точки размещения диполей. Число точек коллокации L на поверхности эллипсоида выбрано равным 1152; алгоритм их размещения по углу θ — такой же, как для точек размещения диполей, но располагаются эти точки как в полусечениях $\varphi = \text{const}$ точек размещения диполей, так и в полусечениях, проведенных посередине между ними. Линия тока внутри u -го проводника разбита на 35 участков: $N_u = 35$. Число поперечных сечений $x = \text{const}$, в которых размещены точки коллокации

на поверхности проводника, выбрано также равным 35; в каждом сечении расположены четыре точки коллокации равномерно по азимутальному углу; $L_u = 140$.

На рис. 3 характеризуется скорость сходимости итерационного процесса (11)–(13) для рассматриваемой структуры из эллипсоида и трех проводников. По оси абсцисс отложен номер выполненной итерации, по оси ординат — относительное значение функционала (10); Φ_0 — начальное значение функционала, имеющее место при $\mathbf{p} = 0$. Как видно из рис. 3, скорость сходимости является наиболее высокой на первых шагах итерационного процесса и замедляется с ростом номера итерации. Вследствие этого для решения системы (7) на самом деле достаточно гораздо меньшее число итераций, чем это предсказывает оценка (15). В данном случае достаточно выполнить 200–250 итераций.

На рис. 4 характеризуется влияние близко расположенных проводников на бистатистическое сечение рассеяния эллипсоида для случая падения плоской волны вдоль оси z ($\psi = 0^\circ$). Кривая 1 на рис. 4 — это бистатистическое сечение рассеяния одиночного эллипсоида; кривая 2 — бистатистическое сечение рассеяния эллипсоида и проводников, если последние расположены на расстояниях $\Delta x = \Delta z = 0.01\lambda$; кривая 3 — та же характеристика, если проводники расположены на расстояниях $\Delta x = \Delta z = 0.1\lambda$. Бистатистические сечения рассеяния приведены в E -плоскости (плоскость векторов \mathbf{k}_e и \mathbf{E}_0); диаграмма рассеяния в E -плоскости симметрична относительно оси z , поэтому приведено сечение рассеяния только в полуплоскости $\varphi = 0$. По оси абсцисс отложены значения угла θ , по оси ординат — нормированные на квадрат длины волны значения сечения рассеяния в децибелах. На рис. 5 и 6 показаны распределения тока вдоль проводников для тех же расстояний между проводниками и эллипсоидом, а также распределение тока вдоль одиночного проводника (эллипсоид отсутствует). По оси абсцисс отложено расстояние $k_e l$ от середины проводников; отрицательные значения координаты $k_e l$ относятся к левым частям проводников, положительные значения — к правым частям проводников. По оси ординат отложена величина тока. Кривая 1 характеризует распределение тока вдоль первого проводника, кривые 2 и 3 — вдоль второго и третьего проводников, кривая 4 — вдоль одиночного проводника.

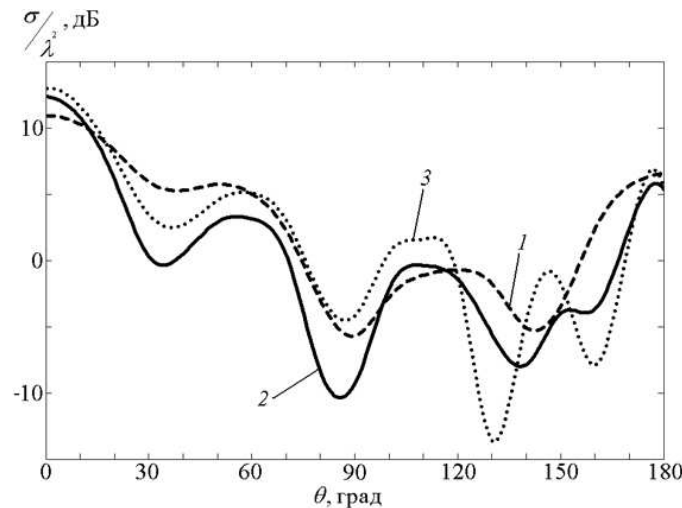


Рис. 4. Бистатистические сечения рассеяния эллипсоида с параметрами $k_e a = k_e b = 3$, $k_e c = 4$, $\epsilon_i/\epsilon_e = 8$, $\mu_i/\mu_e = 1$ и такого же эллипсоида с расположенными вблизи него тремя проводниками длиной $k_e l = 5.65$: кривая 1 — одиночный эллипсоид; кривая 2 — эллипсоид с проводниками, $\Delta x = \Delta z = 0.01\lambda$; кривая 3 — эллипсоид с проводниками, $\Delta x = \Delta z = 0.1\lambda$

Результаты, представленные на рис. 4–6, позволяют сделать следующие выводы. Бистатистические сечения рассеяния диэлектрического тела при наличии вблизи него тонких проводников существенно отличаются от бистатистических сечений рассеяния такого же одиночного тела. Например, при угле наблюдения $\theta = 130^\circ$ сечение рассеяния эллипсоида с проводниками, расположенными на расстоянии $\Delta x = \Delta z = 0.1\lambda$, меньше, чем сечение рассеяния одиночного эллипсоида, более чем на 10 дБ. Наличие проводников может приводить как к увеличению сечения рассеяния диэлектрического тела, так и к его уменьшению. Величина сечения рассеяния существенно зависит от расстояния между диэлектрическим телом и проводниками. Например, при том же угле наблюдения $\theta = 130^\circ$ при увеличении расстояния между эллипсоидом и проводниками

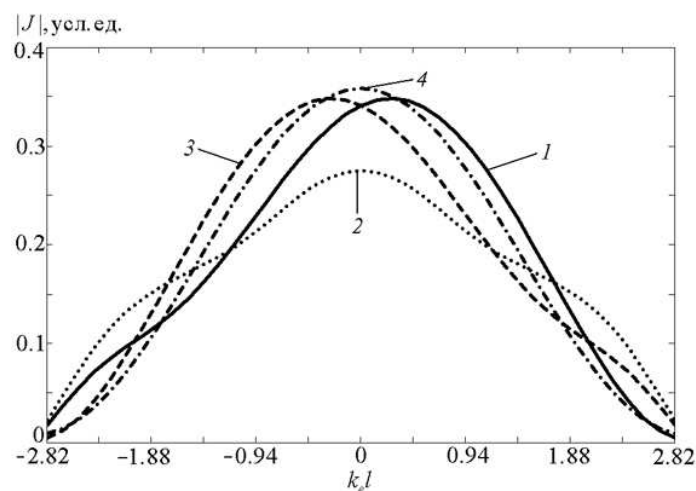


Рис. 5. Распределения тока вдоль одиночного проводника длиной $k_e l = 5.65$ и таких же проводников, расположенных на расстоянии $\Delta x = \Delta z = 0.01\lambda$ от эллипсоида с параметрами $k_e a = k_e b = 3$, $k_e c = 4$, $\varepsilon_i/\varepsilon_e = 8$, $\mu_i/\mu_e = 1$: кривая 1 — распределение тока вдоль первого проводника; кривая 2 — распределение тока вдоль второго проводника; кривая 3 — распределение тока вдоль третьего проводника; кривая 4 — распределение тока вдоль одиночного проводника

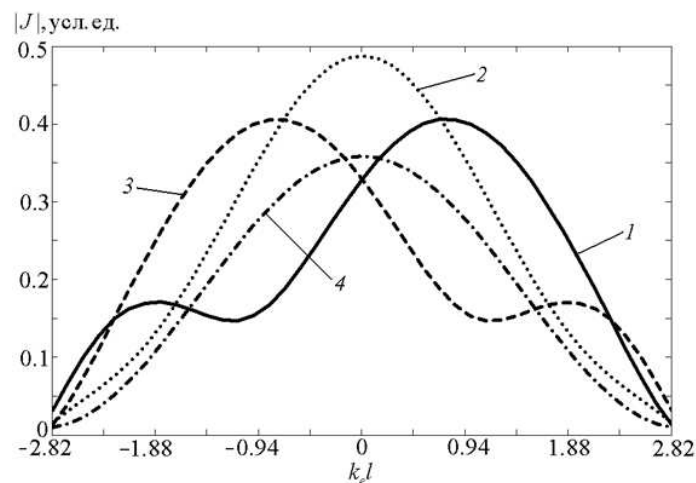


Рис. 6. То же, что на рис. 4, для случая, когда проводники расположены на расстоянии $\Delta x = \Delta z = 0.1\lambda$ от эллипсоида

от 0.01λ до 0.1λ сечение рассеяния уменьшается на 7.7 дБ. Как показывает сравнение кривых, приведенных на рис. 5 и 6, распределения токов вдоль проводников при наличии диэлектрического тела существенно отличаются от распределения тока вдоль одиночного проводника и различны для различных проводников. Распределения токов на первом и третьем проводниках симметричны относительно начала системы координат, что связано с симметрией рассматриваемой задачи относительно плоскости xz . Как и сечения рассеяния, распределения токов зависят от расстояния между диэлектрическим телом и проводниками.

Далее представлены результаты более тщательного исследования влияния месторасположения проводников на величину сечения рассеяния в одном из направлений наблюдения — в направлении $\theta = 180^\circ$, т. е. на величину сечения обратного рассеяния. Эти результаты относятся к показанной на рис. 7 структуре, состоящей из диэлектрического эллипсоида и двух параллельных проводников. Параметры эллипсоида выбраны такими же, как для рассмотренной выше структуры из эллипсоида и трех проводников, т. е. $k_e a = k_e b = 3$, $k_e c = 4$, $\varepsilon_i / \varepsilon_e = 8$, $\mu_i / \mu_e = 1$. Длины и радиусы проводников выбраны также одинаковыми и равными, как и в предыдущем случае, 0.9λ и 0.02λ соответственно. Расстояние между проводником 1 и ближайшей точкой поверхности эллипсоида равно Δz , расстояние между проводниками равно Δz_1 . Как и в предыдущем случае, проводники ориентированы вдоль оси x и симметрично расположены относительно поверхности эллипсоида. Структура возбуждается плоской волной, падающей вдоль оси z , с вектором \mathbf{E}_0 , ориентированным вдоль оси x . Параметры метода $K_e, K_i, L, L_u, N_e, N_i, N_u$ выбраны такими же, как при получении результатов, представленных на рис. 4–6.

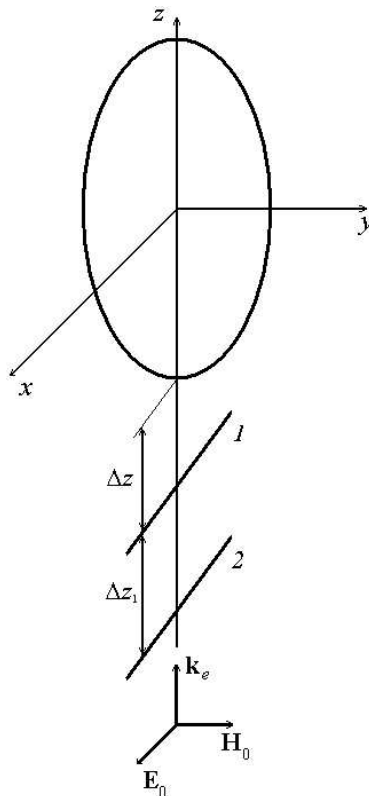


Рис. 7. Структура, состоящая из эллипсоида и двух параллельных проводников

На рис. 8 показана зависимость сечения обратного рассеяния от расстояния Δz между эллипсоидом и ближайшим к нему проводником. При получении этой зависимости расстояние Δz_1 между проводниками сохранялось постоянным и равным 0.1λ . На этом же рисунке для сравнения сплошной прямой линией показано сечение обратного рассеяния одиночного эллипсоида (эллипсоида без проводников). Как показывает сравнение сечений обратного рассеяния эллипсоида с проводниками с сечением обратного рассеяния одиночного эллипсоида, с помощью двух параллельных проводников, располагая их на соответствующем расстоянии, можно существенно (на 10 дБ и более) уменьшить сечение обратного рассеяния диэлектрического тела. Кривая зависимости сечения обратного рассеяния от расстояния между диэлектрическим телом и проводниками носит осциллирующий характер. Положение первого минимума кривой (в данном случае он имеет место при $\Delta z = 0.13\lambda$) зависит от параметров диэлектрического тела и длины проводников и может быть найдено только в результате решения рассматриваемой за-

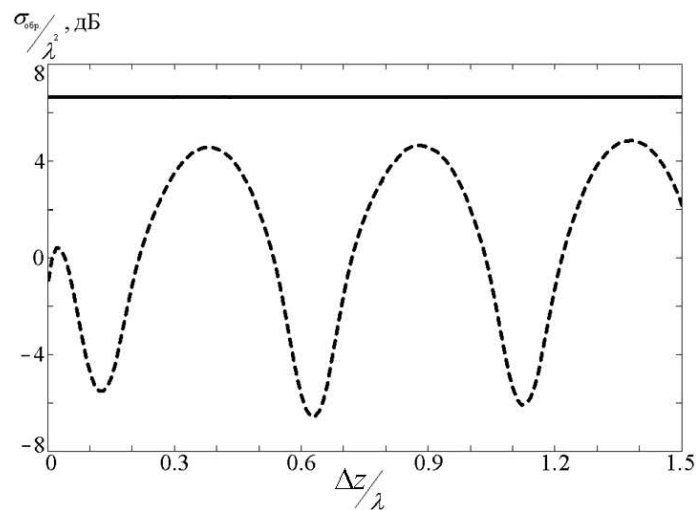


Рис. 8. Зависимость сечения обратного рассеяния от расстояния между эллипсоидом и ближайшим к нему проводником для структуры, содержащей два проводника

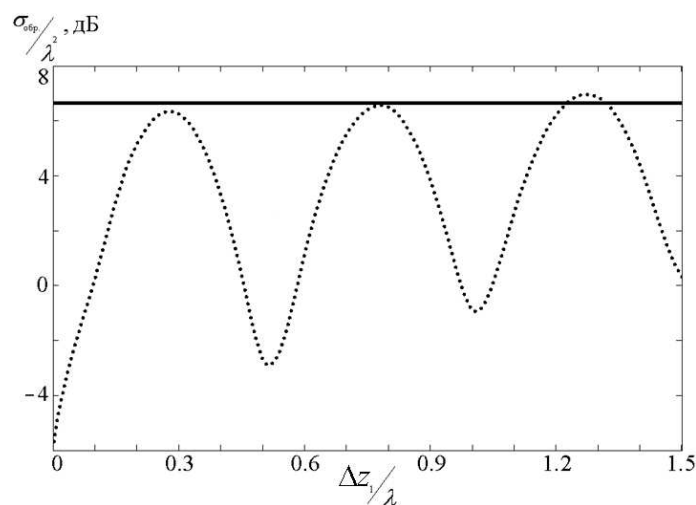


Рис. 9. Зависимость сечения обратного рассеяния от расстояния между проводниками для структуры, состоящей из эллипсоида и двух проводников

дачи. Положение остальных минимумов легко предсказывается: каждый последующий минимум находится на расстоянии, равном 0.5λ от предыдущего.

На рис. 9 приведена зависимость сечения обратного рассеяния $\sigma_{обр}$ от расстояния Δz_1 между проводниками при фиксированном расстоянии Δz между эллипсоидом и ближайшим проводником, равном 0.01λ . На этом же рисунке сплошной прямой линией показано сечение обратного рассеяния одиночного эллипсоида. Как видно из рисунка, изменяя расстояние между проводниками, можно также уменьшить сечение обратного рассеяния диэлектрического тела. Наименьшее значение $\sigma_{обр}$ имеет место в том случае, если расстояние между проводниками равно примерно 0.5λ .

На рис. 10 представлены результаты исследований влияния отклонений формы диэлектрического тела от осесимметричной на сечение обратного рассеяния. Основная идея исследований заключалась в наблюдении за изменением сечения обратного рассеяния при постепенном увеличении отклонения формы тела от осесимметричной. Отклонение от осевой симметрии достигалось изменением одной из полуосей эллипсоида. Интерес к подобного рода исследованиям обусловлен тем, что очень часто при решении задач рассеяния тела, имеющие сложную форму, заменяют подходящим осесимметричным рассеивателем. Такая замена существенно упрощает решение задачи, однако при этом возникает вопрос о том, в какой степени получаемые характеристики рассеяния соответствуют исходной задаче. Исследования были проведены для рассмотренной выше структуры, состоящей из диэлектрического эллипсоида и трех проводников (см. рис. 2). Относительная диэлектрическая проницаемость эллипсоида $\varepsilon_i/\varepsilon_e$, как и ранее, выбрана равной 8 ($\mu_i/\mu_e = 1$), длины и радиусы проводников выбраны одинаковыми и равными 0.9λ и 0.02λ соответственно. Проводники расположены на расстоянии $\Delta x = \Delta z = 0.01\lambda$ от эллипсоида. На рис. 10 по оси абсцисс отложен угол падения плоской волны ψ , по оси ординат — значение сечения обратного рассеяния, нормированное на квадрат длины волны, в децибелах. Кривая 1 относится к случаю, когда эллипсоид характеризуется геометрическими параметрами $k_e a = k_e b = 3$, $k_e c = 4$, т. е. является осесимметричным телом (полуоси $k_e a$, $k_e b$, $k_e c$ направлены вдоль осей x , y , z соответственно). Кривая 2

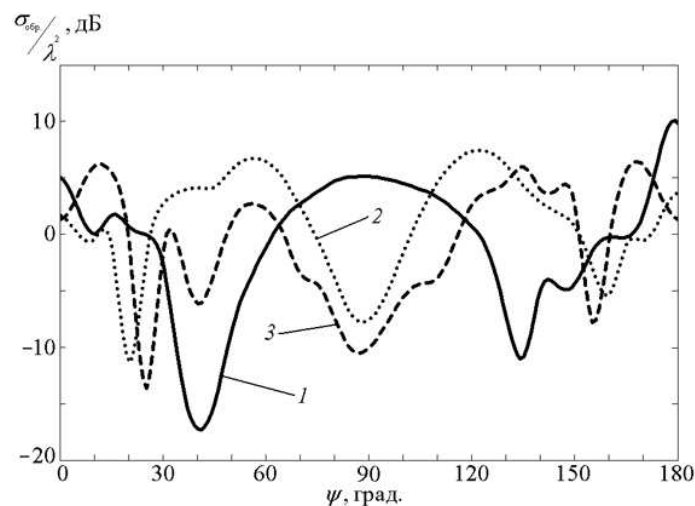


Рис. 10. Зависимость сечения обратного рассеяния от угла падения плоской волны для структуры, состоящей из диэлектрического эллипсоида с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_i/\varepsilon_e = 8$ и трех проводников длиной $k_e l = 5.65$: кривая 1 — $k_e a = k_e b = 3$, $k_e c = 4$ (сфероид); кривая 2 — $k_e a = 2.68$, $k_e b = 3$, $k_e c = 4$; кривая 3 — $k_e a = 2.37$, $k_e b = 3$, $k_e c = 4$

относится к случаю, когда полуось $k_e a$ уменьшена на 0.05λ , т. е. равна 2.68, а кривая 3 — к случаю, когда полуось $k_e a$ уменьшена на 0.1λ , т. е. равна 2.37, при этом значения полуосей $k_e b$ и $k_e c$ сохраняются неизменными. Таким образом, в последних двух случаях диэлектрическое тело теряет осевую симметрию.

Сравнение значений сечений обратного рассеяния для рассмотренных случаев, соответствующих одному и тому же значению угла падения ψ , показывает, что даже небольшое отклонение формы тела от осесимметричной оказывает очень существенное влияние на сечение обратного рассеяния. Например, при уменьшении полуоси $k_e a$ на 0.01λ при угле падения $\psi = 90^\circ$ нормированное сечение обратного рассеяния уменьшается на 15 дБ, а при угле падения $\psi = 40^\circ$ нормированное сечение обратного рассеяния, наоборот, возрастает на 11.1 дБ. Да и качественный характер зависимости $\sigma_{\text{обр}}/\lambda^2$ от угла падения ψ , положение минимумов и максимумов кривых существенно зависят от степени отклонения формы тела от осесимметричной. Это говорит о том, что при вычислении сечения обратного рассеяния некоторой структуры нельзя заменять сложные тела структуры ближайшими по форме осесимметричными телами.

Список литературы

- [1] КАННЕРТ F.M. Numerical methods in electromagnetic scattering theory // J. of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2003. Vol. 79–80. P. 775–824.
- [2] ЕРЕМИН Ю.А., ОРЛОВ Н.В. Анализ рассеяния волн на нескольких магнитодиэлектрических телах методом дискретных источников // Радиотехника и электроника. 1994. Т. 39, № 5. С. 740–748.
- [3] ДМИТРЕНКО А.Г., КОЛЧИН В.А. Численный метод анализа электромагнитного рассеяния структурами из конечного числа трехмерных идеально проводящих тел // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46, № 3. С. 277–282.
- [4] ДМИТРЕНКО А.Г., КОЛЧИН В.А. Численный метод исследования электромагнитного рассеяния структурами, содержащими тонкие проводники // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48, № 5. С. 545–551.
- [5] ДМИТРЕНКО А.Г., МУКОМЛОВ А.И. Численный метод решения задач электромагнитного рассеяния на трехмерном магнитодиэлектрическом теле // Радиотехника и электроника. 1995. Т. 40, № 6. С. 875–880.
- [6] ЕРЕМИН Ю.А., СВЕШНИКОВ А.Г. Метод дискретных источников в задачах электромагнитной дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1992.
- [7] ВОЕВОДИН В.В., КУЗНЕЦОВ Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
- [8] SARKAR T.K., SIARKIEWICS K.R., STRATTON R.F. Survey of numerical methods for solution of large systems of linear equations for electromagnetic field problems // IEEE Trans. Antennas and Propag. 1981. Vol. 29, № 6. P. 847–856.

*Поступила в редакцию 2 апреля 2007 г.,
в переработанном виде — 30 июля 2007 г.*