Метод интерполяции для функции двух переменных с погранслойной составляющей*

А.И. Задорин
Омский филиал Института математики СО РАН, Россия
e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru

For a function of two variables, corresponding to a solution of the elliptic problem with a boundary layer, the interpolation function is constructed. It is shown, that interpolation error is small for any relations between a small parameter and mesh steps. It is proved, that in case of the Shishkin mesh polinomial interpolation the method is uniformly accurate with regard to a small parameter. Formulas for calculation of derivatives, that use mesh values of the solution with a uniformly small error are proposed.

Введение

Для эллиптических задач с пограничным слоем разностные схемы со свойством равномерной сходимости, как известно, могут быть построены либо на неравномерной сетке, сгущающейся в пограничном слое [1, 2], либо на равномерной — с подгонкой схемы к погранслойной составляющей решения [3]. Если решение в узлах сетки найдено, то актуален вопрос интерполяции сеточного решения. Как будет показано ниже, полиномиальная интерполяция может приводить к значительным погрешностям. В данной работе в случае произвольной прямоугольной сетки строится и обосновывается интерполяция, учитывающая погранслойную составляющую в решении. Показано, что в случае сгущающейся сетки [4] полиномиальная интерполяция дает равномерно малую погрешность. Рассмотрены и вопросы нахождения производных в произвольной точке области через значения функции в узлах сетки.

Итак, пусть функция $u(x, y)$, определенная в прямоугольной области

$$D = \{(x, y) : 0 \le x \le L_1,\ 0 \le y \le L_2\},$$

представима в виде

$$u(x, y) = \gamma(y) \exp(-a_0 \varepsilon^{-1} x) + P(x, y), \tag{1}$$

где $|\gamma^{(j)}(y)| \le C,\ 0 \le j \le 3,\ \varepsilon > 0,\ a_0 > 0,$

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} P(x, y) \right| \le C \left[\frac{1}{\varepsilon^{i-1}} \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} x) + 1 \right], \quad 0 \le i \le 3, \quad 0 \le j \le 1,$$

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial y^j} P(x, y) \right| \le C, \quad j \le 3.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы 1.3 ОМН РАН и Национального фонда Болгарии, проект HS-MI-106/2005.

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2008.

Под C и C_j подразумеваем положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов сетки. Предполагаем, что $\alpha > 0$. Функция вида (1), с экспоненциальной погранслойной составляющей, соответствует решению эллиптической задачи с регулярным пограничным слоем у границы $x = 0$ в двумерной прямоугольной области [2, 5]. В частности, $u(x, y)$ может быть решением краевой задачи:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} - b(x, y) u = f(x, y), \quad (x, y) \in D \setminus \Gamma,$$

$$u(x, y) = \phi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,$$

где $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x, y) \geq 0$, $a_0 = a(0)$, выполнены условия согласования краевых условий и функция $u(x, y)$ является достаточно гладкой, Γ — граница области D.

Предполагаем, что для функции $u(x, y)$ известны значения $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ во всех узлах некоторой прямоугольной сетки Ω области D:

$$\Omega = \{(x_i, y_j),\, 0 \leq i \leq N,\, 0 \leq j \leq M\},$$

и исследуем вопрос интерполяции сеточного решения в произвольную точку области D.

Сначала покажем, что в случае функции с погранслойной составляющей полиномиальная интерполяция может приводить к существенным погрешностям. Пусть $\Delta_{i,j}$ — произвольная ячейка сетки Ω:

$$\Delta_{i,j} = \{x_i \leq x \leq x_{i+1},\, y_j \leq y \leq y_{j+1}\}, \quad h_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \quad \tau_{j+1} = y_{j+1} - y_j.$$

Для ячейки $\Delta_{i,j}$ построим интерполирующую функцию в виде многочлена

$$u_L(x, y) = a\,x + b\,y + c\,xy + d.$$

Зададим функцию линейной интерполяции по x для узла y_j:

$$\tilde{u}(x, y_j) = \frac{1}{h_{i+1}} \left[(x_{i+1} - x) u_{i,j} + (x - x_i) u_{i+1,j} \right]. \tag{2}$$

Теперь определим

$$u_L(x, y) = \frac{1}{\tau_{j+1}} \left[(y_{j+1} - y) \tilde{u}(x, y_j) + (y - y_j) \tilde{u}(x, y_{j+1}) \right]. \tag{3}$$

Покажем, что интерполяционная формула (3) может приводить к существенным погрешностям в случае функции вида (1). Пусть $u(x, y) = \exp(-\varepsilon^{-1} x)$. Тогда

$$u_L\left(\frac{h_1}{2}, y\right) - u\left(\frac{h_1}{2}, y\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{-h_1}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{-h_1}{2\varepsilon}\right).$$

Отсюда получаем, что при $\varepsilon = h_1$

$$\left| u_L\left(\frac{h_1}{2}, y\right) - u\left(\frac{h_1}{2}, y\right) \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-1) - \exp\left(\frac{-1}{2}\right) \approx 0.077.$$

Точность интерполяции не повышается при уменьшении шага сетки h_1, если $\varepsilon = h_1$. Таким образом, в случае функции, содержащей погранслойную составляющую, возникает необходимость в разработке специальной интерполяционной формулы, имеющей малую погрешность независимо от соотношения параметра ε и шагов сетки.

1. Экспоненциальная интерполяция

Перейдем к построению интерполяционной формулы, учитывающей погранслойную составляющую функции $u(x, y)$. Исходя из представления (1), для заданных i, j получим

$$\gamma_j \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_i) + P(x_i, y_j) = u_{i,j},$$

$$\gamma_j \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{i+1}) + P(x_{i+1}, y_j) = u_{i+1,j},$$

где $\gamma_j = \gamma(y_j)$. Из условия ограниченности $P'_x(x, y)$ следует

$$P(x_{i+1}, y_j) - P(x_i, y_j) = \rho_1 h_{i+1}, \quad |\rho_1| \le C_1.$$

Из системы получим

$$\gamma_j = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j} - \rho_1 h_{i+1}}{\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{i+1}) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_i)}.$$

Учитывая соотношения

$$P(x, y_j) = P(x_i, y_j) + \rho_2(x - x_i), \quad |\rho_2| \le C_1,$$

$$P(x_i, y_j) = u_{i,j} - \gamma_j \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_i),$$

получим выражение для $u(x, y_j)$ на интервале $[x_i, x_{i+1}]$:

$$u(x, y_j) = \gamma_j \left[\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_i)\right] + u_{i,j} + \rho_2(x - x_i). \tag{4}$$

Пренебрегая в (4) членами порядка $O(h_{i+1})$, получим интерполяционную по x формулу для интервала $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\bar{u}(x, y_j) = [u_{i+1,j} - u_{i,j}]\frac{\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_i)}{\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{i+1}) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_i)} + u_{i,j}. \tag{5}$$

Вычитая из (5) равенство (4), получим

$$|\bar{u}(x, y_j) - u(x, y_j)| \le C_2 h_{i+1}. \tag{6}$$

Итак, для каждого узла y_j точность построенной интерполяционной формулы (5) порядка $\mathrm{O}(h_{i+1})$ для интервала $[x_i, x_{i+1}]$ равномерна по ε. Теперь построим интерполяционную формулу для ячейки $\Delta_{i,j}$:

$$u_h(x, y) = Int_y(\bar{u}) = \frac{1}{\tau_{j+1}}\left[(y_{j+1} - y)\bar{u}(x, y_j) + (y - y_j)\bar{u}(x, y_{j+1})\right]. \tag{7}$$

Лемма 1. *При всех* $(x, y) \in \Delta_{i,j}$

$$|u_h(x, y) - u(x, y)| \le C(h_{i+1} + \tau_{j+1}^2). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $(x, y) \in \Delta_{i,j}$. Тогда

$$|u(x, y) - u_h(x, y)| \le |u(x, y) - Int_y(u(x, y))| + |Int_y(u - \bar{u})| \le \frac{1}{4}\max_{\Delta_{i,j}}|u''_{yy}|\tau_{j+1}^2 + C_2 h_{i+1}.$$

Учитывая ограниченность производных по y, получим утверждение леммы. □

Интерполяционная формула (7) устойчива к возмущению $u_{i,j}$. Если $\tilde{u}_h(x,y)$ соответствует вычислениям по формуле (7) в случае возмущенных значений $\tilde{u}_{i,j}$, когда для каждого узла (x_i, y_j) $|u_{i,j} - \tilde{u}_{i,j}| \leq r$, то при всех $(x,y) \in D$

$$|u_h(x,y) - \tilde{u}_h(x,y)| \leq 3\,r.$$

Таким образом, если интерпретировать, что $u(x,y)$ — решение краевой задачи с регулярным пограничным слоем, r — максимальная по узлам сетки погрешность разностной схемы, то

$$|u(x,y) - \tilde{u}_h(x,y)| \leq C \max_{i,j}(h_i + \tau_j^2) + 3r.$$

Вычисление производной по y. Рассмотрим, как можно приближенно найти значение производной $u'_y(x,y)$ в произвольной точке области D на основе значений функции $u(x,y)$ в узлах сетки. Для этого сначала найдем значения производной во всех узлах сетки, а затем осуществим интерполяцию на основе построенной формулы (7). Пусть $v_{i,j}$ — найденное приближенное значение производной $u'_y(x_i, y_j)$. В силу ограниченности производных функции $u(x,y)$ по переменной y в узлах сетки на основе формул численного дифференцирования [6] можно получить приближение производной с некоторой заданной точностью. Например, в случае постоянного шага τ по y для всех внутренних узлов можно определить $v_{i,j} = (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})/(2\tau)$ с точностью $O(\tau^2)$. Рассмотрим вопрос интерполяции вычисленной производной в рассматриваемой двумерной области D. Воспользуемся тем, что функция $v(x,y) = u'_y(x,y)$ представима в виде, аналогичном (1):

$$v(x,y) = \gamma'(y)\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) + P'_y(x,y),$$

и поэтому можно применить формулу (7) для интерполяции значений $\{v_{i,j}\}$. Пусть $v_h(x,y)$ — вычисленное в соответствии с (7) значение производной в точке $(x,y) \in D$. Тогда с учетом леммы 1

$$|v_h(x,y) - u'_y(x,y)| \leq C \max_{i,j}(h_i + \tau_j^2) + 3r,$$

где $r = \max_{i,j} |v_{i,j} - u'_y(x_i, y_j)|$.

Вычисление производной по x. Покажем, что формулы численного дифференцирования, построенные на приближении функций многочленами, в случае функций с погранслойной составляющей могут приводить к значительным погрешностям. Для этого рассмотрим функцию одной переменной $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1}x)$. Несложно убедиться, что при $\varepsilon = h_1$

$$\varepsilon \left| \frac{u(h_1) - u(0)}{h_1} - u'(0) \right| = e^{-1}.$$

Следовательно, относительная погрешность приведенной формулы численного дифференцирования не уменьшается с уменьшением шага сетки h_1. Оценивается относительная погрешность, так как производная $u'(0)$ не ограничена при малых значениях ε. Построим равномерно точную формулу для нахождения производной.

Дифференцируя построенный интерполянт (7) по x, получим приближенную формулу:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_h(x,y) = -\frac{a_0}{\varepsilon} \left[\frac{y_{j+1} - y}{\tau_{j+1}}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \frac{y - y_j}{\tau_{j+1}}(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}) \right] \times$$

$$\times \frac{\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)}{\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{i+1}) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_i)}. \tag{9}$$

Лемма 2. *При всех* $(x,y) \in D$

$$\varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial x} u_h(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) \right| \le C \max_{i,j} (h_i + \tau_j^2).$$

Доказательство. В соответствии с (1) функция $u(x,y)$ представима в виде

$$u(x,y) = V(x,y) + P(x,y), \quad V(x,y) = \gamma(y) \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x).$$

Пусть $u_h(x,y) = F(u,x,y)$. Тогда $u_h(x,y) = F(V,x,y) + F(P,x,y)$,

$$\varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial x} u_h(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) \right| \le$$

$$\le \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial x} F(V,x,y) - \frac{\partial}{\partial x} V(x,y) \right| + \varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial x} F(P,x,y) - \frac{\partial}{\partial x} P(x,y) \right|. \tag{10}$$

Пусть $(x,y) \in \Delta_{i,j}$. Оценим первое слагаемое в (10):

$$\varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial x} F(V,x,y) - \frac{\partial}{\partial x} V(x,y) \right| = a_0 \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x) \left| Int_y(\gamma) - \gamma(y) \right| \le$$

$$\le \frac{a_0}{4} \max_y |\gamma''(y)| \tau_{j+1}^2. \tag{11}$$

Осталось оценить второе слагаемое в (10). Сначала докажем, что

$$\varepsilon \left| Int_y \left(\frac{P(x_{i+1},y) - P(x_i,y)}{h_{i+1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} P(x,y) \right| \le C[\tau_{j+1}^2 + h_{i+1}]. \tag{12}$$

Имеем

$$\varepsilon \left| Int_y \left(\frac{P(x_{i+1},y) - P(x_i,y)}{h_{i+1}} \right) - \frac{\partial}{\partial x} P(x,y) \right| \le$$

$$\le \varepsilon \left| Int_y \left(\frac{P(x_{i+1},y) - P(x_i,y)}{h_{i+1}} - \frac{\partial}{\partial x} P(x,y) \right) \right| +$$

$$+ \varepsilon \left| Int_y \left(\frac{\partial}{\partial x} P(x,y) \right) - \frac{\partial}{\partial x} P(x,y) \right| \le C[h_{i+1} + \tau_{j+1}^2],$$

что доказывает (12). Несложно убедиться, что

$$\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} F(P,x,y) - Int_y \left(\frac{P(x_{i+1},y) - P(x_i,y)}{h_{i+1}} \right) \right] = Int_y \left(P(x_{i+1},y) - P(x_i,y) \right) \Phi_i(x),$$

где

$$\Phi_i(x) = \frac{a_0 \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x)}{\exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_i) - \exp(-a_0\varepsilon^{-1}x_{i+1})} - \frac{\varepsilon}{h_{i+1}}.$$

Докажем ограниченность $\Phi_i(x)$. Пусть $x = x_{i+1}$. Тогда

$$|\Phi_i(x_{i+1})| = \frac{\varepsilon}{h_{i+1}} \left| 1 - \frac{\tau}{\exp(\tau) - 1} \right|, \quad \tau = a_0\varepsilon^{-1}h_{i+1}.$$

Пусть $\tau \geq 1$. Тогда

$$0 < 1 - \frac{\tau}{\exp(\tau) - 1} < 1,$$

из этого следует, что $|\Phi_i(x_{i+1})| \leq a_0$.

Пусть $\tau < 1$. В этом случае используем разложения по τ и получим $|\Phi_i(x_{i+1})| \leq a_0/2$.

Пусть $x = x_i$. В этом случае

$$|\Phi_i(x_i)| = \frac{\varepsilon}{h_{i+1}} \left| \frac{\tau}{1 - \exp(-\tau)} - 1 \right|.$$

По аналогии с предыдущим случаем можно убедиться в ограниченности $|\Phi_i(x_i)|$. Итак, функция $\Phi_i(x)$ убывает и по модулю ограничена на концах интервала $[x_i, x_{i+1}]$. Из этого следует ее ограниченность на всем интервале, равномерная по ε и h_{i+1}.

Из ограниченности $P'_x(x, y)$ следует $|P(x_{i+1}, y) - P(x_i, y)| \leq Ch_{i+1}$, следовательно,

$$\varepsilon \left| \frac{\partial}{\partial x} F(P, x, y) - Int_y \left(\frac{P(x_{i+1}, y) - P(x_i, y)}{h_{i+1}} \right) \right| \leq C_1 h_{i+1}. \tag{13}$$

Из неравенств (12), (13) следует оценка второго слагаемого в (10), соответствующая утверждению леммы. □

2. Случай сгущающейся сетки

Как известно, классические разностные схемы, например, монотонная схема Самарского [6] и направленных разностей, обладают свойством равномерной сходимости при решении задач с пограничным слоем, если использовать сетки, специальным образом сгущающиеся в пограничном слое. Подход, основанный на использовании сгущающейся сетки для задачи с пограничными слоями, был предложен Н.С. Бахваловым [1], позднее строились и другие сетки (см., например, [5]). Остановимся на случае сетки, предложенной Г.И. Шишкиным [4]. Известно, что ряд разностных схем на такой сетке обладает свойством равномерной сходимости в случае эллиптической задачи с регулярным пограничным или параболическим пограничным слоем. Исследуем возможности полиномиальной интерполяции для вычисления функции и производных в случае такой сетки.

Пусть для функции $u(x, y)$ справедлива оценка производных:

$$\left| \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u(x, y) \right| \leq C \left[\frac{1}{\varepsilon^i} \exp(-\alpha \varepsilon^{-1} x) + 1 \right], \quad 0 \leq i \leq 3, \quad 0 \leq j \leq 1,$$

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial y^j} u \right| \leq C, \quad j \leq 3. \tag{14}$$

Оценка (14) имеет место, если $u(x, y)$ — решение эллиптической задачи с регулярным или параболическим пограничным слоем [2] у границы $x = 0$. В частности, функция вида (1) соответствует регулярному пограничному слою и удовлетворяет условиям (14).

Пусть Ω_x — кусочно-равномерная сетка из [4]:

$$\Omega_x = \left\{ x_i : \; x_i = ih, \, 0 \leq i \leq \frac{N}{2}, \, x_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{2} \right) H, \, \frac{N}{2} \leq i \leq N \right\},$$

$$\sigma = \min\left\{\frac{L_1}{2}, \frac{\varepsilon}{\alpha}\ln(N)\right\}, \quad h = \frac{2\sigma}{N}, \quad H = \frac{2(L_1-\sigma)}{N}, \quad N \geq 4. \tag{15}$$

Исследуем точность формулы полиномиальной интерполяции (3) в случае сетки (15).

Лемма 3. *При всех* $(x, y) \in D$

$$|u_L(x,y) - u(x,y)| \leq C\left[\max\left\{\frac{\ln^2 N}{N^2}, \frac{1}{N}\right\} + \max_j \tau_j^2\right]. \tag{16}$$

Доказательство. Сначала докажем, что при всех j и $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$|\tilde{u}(x,y_j) - u(x,y_j)| \leq C\max\left\{\frac{\ln^2 N}{N^2}, \frac{1}{N}\right\}, \tag{17}$$

где $\tilde{u}(x, y_j)$ соответствует формуле (2) линейной интерполяции по x при $y = y_j$. В соответствии с формулой для погрешности линейной интерполяции на интервале $[x_i, x_{i+1}]$:

$$|\tilde{u}(x,y_j) - u(x,y_j)| \leq \frac{M_{2,x}h_{i+1}^2}{4}, \tag{18}$$

где $M_{2,x}$ — верхняя оценка для второй производной:

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y_j)\right| \leq M_{2,x}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]. \tag{19}$$

Пусть $i < N/2$. В соответствии с (14) $M_{2,x} = C/\varepsilon^2$. Учитывая формулу для шага сетки по x, получим

$$|\tilde{u}(x,y_j) - u(x,y_j)| \leq \frac{C_1}{N^2}\ln^2 N, \tag{20}$$

что соответствует (17).

Пусть $i \geq N/2$. В этом случае

$$\tilde{u}(x,y_j) - u(x,y_j) = u_{i+1,j} - u(x,y_j) - \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}(u_{i+1,j} - u_{i,j}) =$$

$$= \int_x^{x_{i+1}} u'_x(s,y_j)\,ds - \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_x(s,y_j)\,ds.$$

Из этого соотношения следует

$$|\tilde{u}(x,y_j) - u(x,y_j)| \leq 2\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u'_x(s,y_j)|\,ds.$$

Учитывая оценки (14) и условие $x_i \geq \sigma$, получим

$$|\tilde{u}(x,y_j) - u(x,y_j)| \leq C_2\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x_i)\left[1 - \exp(-\alpha\varepsilon^{-1}H)\right] \leq \frac{C_3}{N}.$$

Остается рассмотреть случай равномерной по x сетки, когда

$$\frac{L_1}{2} \leq \frac{\varepsilon}{\alpha}\ln N.$$

Учитывая оценку (18), несложно показать, что в этом случае справедлива оценка (20). Оценка (17) доказана.

Учитывая оценку погрешности линейной интерполяции по y и оценку (17), получим

$$|u_L(x,y)-u(x,y)| \le |Int_y(\tilde{u}(x,y)-u(x,y))| + |Int_y(u(x,y))-u(x,y)| \le$$

$$\le C\left[\max\left\{\frac{\ln^2 N}{N^2}, \quad \frac{1}{N}\right\} + \tau_{j+1}^2\right].$$

Лемма доказана. □

Интерполяционная формула (3) устойчива к возмущениям $\{u_{i,j}\}$, поэтому погрешность разностной схемы, используемой на сетке из [4], не накапливается при интерполяции.

Вычисление производной по y По аналогии со случаем произвольной сетки, сначала производную $u'_y(x,y)$ с некоторой заданной точностью можно найти во всех узлах сетки Ω. Интерполяция производной в области D осуществляется по аналогии с интерполяцией решения на основе формулы (3). Оценка погрешности такой интерполяции получена в лемме 3.

Вычисление производной по x. Пусть $(x,y) \in \Delta_{i,j}$. Дифференцируя (3), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}u_L(x,y) = \frac{1}{\tau_{j+1}}\left[(y_{j+1}-y)\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}} + (y-y_j)\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i,j+1}}{h_{i+1}}\right]. \tag{21}$$

Лемма 4. *При всех* $(x,y) \in D$

$$\varepsilon\Big|\frac{\partial}{\partial x}u_L(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\Big| \le C\left[\frac{\ln N}{N} + \max_j \tau_j^2\right].$$

Доказательство. Остановимся на случае ячейки $\Delta_{i,j}$. Справедливы неравенства

$$\varepsilon\Big|\frac{\partial}{\partial x}u_L(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}u(x,y)\Big| \le \frac{\varepsilon}{\tau_{j+1}}\left[(y_{j+1}-y)\Big|\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}} - u'_x(x,y_j)\Big| + \right.$$

$$\left. +(y-y_j)\Big|\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i,j+1}}{h_{i+1}} - u'_x(x,y_{j+1})\Big|\right] + \varepsilon\Big|Int_y\Big(u'_x(x,y)\Big) - u'_x(x,y)\Big|.$$

Несложно показать, что

$$\varepsilon\Big|\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}} - u'_x(x,y_j)\Big| = \frac{\varepsilon}{h_{i+1}}\Big|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\int_x^s u''_{xx}(t,y_j)dt\,ds\Big| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{h_{i+1}}\left[\int_{x_i}^{x}\int_s^x |u''_{xx}(t,y_j)|dt\,ds + \int_x^{x_{i+1}}\int_x^s |u''_{xx}(t,y_j)|dt\,ds\right]. \tag{22}$$

В соответствии с условиями (14)

$$|u''_{xx}(t,y_j)| \le C\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}t) + 1\right]. \tag{23}$$

Пусть $x_{i+1} \le \sigma$. Учитывая соотношения (15) для шагов сетки Ω_x, неравенства (22) и (23), получим

$$\varepsilon\Big|\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}} - u'_x(x,y_j)\Big| \le \frac{C}{N}\ln N.$$

В случае $x_i \ge \sigma$ усилим неравенство (22) с учетом (23), интегрируем и получим

$$\varepsilon\Big|\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}} - u'_x(x,y_j)\Big| \le \frac{C}{h_{i+1}}\left[\int\limits_{x_i}^{x}\big[\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}s)-\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x)\big]\,ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x}^{x_{i+1}}\big[\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x)-\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}s)\big]\,ds\right]. \qquad (24)$$

Учитывая, что при $x_i \ge \sigma$

$$|\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}s)-\exp(-\alpha\varepsilon^{-1}x)| \le \frac{1}{N},$$

из (24) получим

$$\varepsilon\Big|\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_{i+1}} - u'_x(x,y_j)\Big| \le \frac{C}{N}.$$

Используя свойства линейной интерполяции по y, получим утверждение леммы. $\square$

Список литературы

[1] Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–890.

[2] Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Singapore: World Scientific, 1996. 163 p.

[3] Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. 1969. Т. 6, № 2. С. 237–248.

[4] Шишкин Г.И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. 232 с.

[5] Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. Адаптивно-инвариантный метод численного решения задач с пограничными и внутренними слоями. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989. 258 с.

[6] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

Поступила в редакцию 5 марта 2007 г.