

# Расчет оболочки вращения при произвольном нагружении с использованием МКЭ на основе функционала Рейснера

Н. А. Гуреева, Ю. В. Клочков, А. П. Николаев

*Волгоградская государственная сельскохозяйственная академия, Россия*

e-mail: natalya-gureeva@yandex.ru

An eight nodal volumetric finite element with nodal displacement and stress as unknown parameters is developed for calculation of an arbitrary loaded shell of rotation. Approximations for stress and displacement were constructed using three linear relations. The modified stiffness matrix is obtained with the help of a variational principle based on the Reysner functional. We present an example, which shows that the proposed finite element method has a good potential for calculations of plates and shells of any thickness.

## Введение

Для расчета произвольно нагруженной оболочки вращения с использованием криволинейной системы координат разработан объемный шестигранный конечный элемент в смешанной формулировке, узловыми неизвестными которого являются компоненты вектора перемещений и тензора напряжений. Каждая компонента внутренней точки конечного элемента аппроксимировалась через узловые значения трилинейными соотношениями. При получении матрицы деформирования конечного элемента использовался вариационный принцип на основе функционала Рейснера.

## 1. Геометрия оболочки вращения.

Радиус-вектор произвольной точки срединной поверхности (рис. 1) определяется выражением

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + r \cos \theta \mathbf{k}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты декартовой системы координат;  $x$  — осевая координата;  $r$  — радиус вращения точки срединной поверхности;  $\theta$  — угловая координата.

Базисные векторы в точке срединной поверхности, касательные к ней, определяются дифференцированием (1.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{R}_{,s} = x_{,s} \mathbf{i} + r_{,s} \sin \theta \mathbf{j} + r_{,s} \cos \theta \mathbf{k}; \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{R}_{,\theta} = r \cos \theta \mathbf{j} - r \sin \theta \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

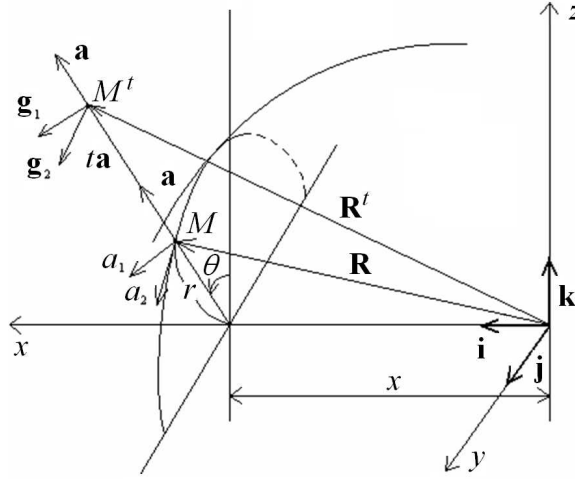


Рис. 1

Нормаль к срединной поверхности определяется векторным произведением

$$\mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = -r_{,s} \mathbf{i} + x_{,s} \sin \theta \mathbf{j} + x_{,s} \cos \theta \mathbf{k}. \quad (1.3)$$

Соотношения (1.2) и (1.3) можно представить в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \end{Bmatrix}_{3 \times 1} = [M] \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \end{Bmatrix}_{3 \times 3 \times 1}, \quad (1.4)$$

где  $\{\mathbf{a}\}^T = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  — вектор-строка базисных векторов;  $\{\mathbf{i}\}^T = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  — вектор-строка единичных векторов.

Производные базисных векторов произвольной точки срединной поверхности через орты декартовой системы координат имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{1,s} &= x_{,ss} \mathbf{i} + r_{,ss} \sin \theta \mathbf{j} + r_{,ss} \cos \theta \mathbf{k}; \\ \mathbf{a}_{2,s} &= r_{,s} \cos \theta \mathbf{j} - r_{,s} \sin \theta \mathbf{k}; \\ \mathbf{a}_{3,s} &= -r_{,ss} \mathbf{i} + x_{,ss} \sin \theta \mathbf{j} + x_{,ss} \cos \theta \mathbf{k}; \\ \mathbf{a}_{1,\theta} &= r_{,s} \cos \theta \mathbf{j} - r_{,s} \sin \theta \mathbf{k}; \\ \mathbf{a}_{2,\theta} &= -r \sin \theta \mathbf{j} - r \cos \theta \mathbf{k}; \\ \mathbf{a}_{3,\theta} &= x_{,s} \cos \theta \mathbf{j} - x_{,s} \sin \theta \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

которые можно представить в матричном виде

$$\{\mathbf{a}_{,s}\} = [N_1] \{\mathbf{i}\}; \quad \{\mathbf{a}_{,\theta}\} = [N_2] \{\mathbf{i}\}, \quad (1.6)$$

где  $\{\mathbf{a}_{,s}\}^T = \{\mathbf{a}_{1,s}, \mathbf{a}_{2,s}, \mathbf{a}_{3,s}\}$  — вектор-строка производных базисных векторов по длине дуги;  $\{\mathbf{a}_{,\theta}\}^T = \{\mathbf{a}_{1,\theta}, \mathbf{a}_{2,\theta}, \mathbf{a}_{3,\theta}\}$  — вектор-строка производных базисных векторов по угловой координате.

Введем матричное соотношение, обратное (1.4),

$$\{\mathbf{i}\} = [M]^{-1} \{\mathbf{a}\}. \quad (1.7)$$

Выражения производных базисных векторов через векторы этого же базиса запишутся в виде

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_{,s}\} &= [N_1][M]^{-1} \{\mathbf{a}\} = [m] \{\mathbf{a}\}; \\ \{\mathbf{a}_{,\theta}\} &= [N_2][M]^{-1} \{\mathbf{a}\} = [n] \{\mathbf{a}\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

## 2. Перемещения и деформации

Вектор перемещения произвольной точки оболочки выражается через компоненты локального базиса в виде

$$\mathbf{V} = \nu^1 \mathbf{a}_1 + \nu^2 \mathbf{a}_2 + \nu^3 \mathbf{a}_3, \quad (2.1)$$

где  $\nu^1, \nu^2, \nu^3$  — проекции вектора перемещения на векторы локального базиса.

Производные вектора перемещения по координатам  $S, \theta, t$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{,s} &= f_1^1 \mathbf{a}_1 + f_1^2 \mathbf{a}_2 + f_1^3 \mathbf{a}_3; \\ \mathbf{V}_{,\theta} &= f_2^1 \mathbf{a}_1 + f_2^2 \mathbf{a}_2 + f_2^3 \mathbf{a}_3; \\ \mathbf{V}_{,t} &= \nu_t^1 \mathbf{a}_1 + \nu_t^2 \mathbf{a}_2 + \nu_t^3 \mathbf{a}_3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $f_1^i, f_2^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — коэффициенты, содержащие компоненты вектора перемещения и их производные.

Радиус-вектор точки, отстоящей на расстояние  $t$  от срединной поверхности (рис. 1), определяется выражением

$$\mathbf{R}^t = \mathbf{R} + t\mathbf{a}, \quad (2.3)$$

а радиус-вектор этой точки в деформированном состоянии записывается суммой векторов

$$\mathbf{R}^{*t} = \mathbf{R}^t + \mathbf{V}. \quad (2.4)$$

Векторы, касательные к произвольной поверхности в исходном и деформированном состояниях, определяются дифференцированием (2.3) и (2.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i &= \mathbf{R}_{,i}^t = \mathbf{a}_i + t\mathbf{a}_{3,i}; \\ \mathbf{g}_i^* &= \mathbf{R}_{,i}^{*t} = \mathbf{g}_i + \mathbf{V}_{,i}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Компоненты тензора деформаций, определяемые разностью компонент метрических тензоров  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(g_{ij}^* - g_{ij})$  [1], запишутся соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{V}_{,s}; \quad \varepsilon_{22} = \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{V}_{,\theta}; \quad \varepsilon_{33} = \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{V}_{,t}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{V}_{,\theta} + \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{V}_{,s}) = \varepsilon_{21}; \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{V}_{,t} + \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{V}_{,s}) = \varepsilon_{31}; \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2}(\mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{V}_{,t} + \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{V}_{,\theta}) = \varepsilon_{32}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

С использованием (1.8) векторы  $\mathbf{g}_i$  (2.5) можно представить выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= z_{11} \mathbf{a}_1 + z_{12} \mathbf{a}_2 + z_{13} \mathbf{a}_3; \\ \mathbf{g}_2 &= z_{21} \mathbf{a}_1 + z_{22} \mathbf{a}_2 + z_{23} \mathbf{a}_3; \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Учитывая (2.7), выразим (2.6) через компоненты вектора перемещения

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \nu_{,s}^1 A_{11} + \nu_{,s}^2 A_{12} + \nu_{,s}^3 A_{13} + \nu^1 A_{14} + \nu^2 A_{15} + \nu^3 A_{16}; \\
\varepsilon_{22} &= \nu_{,\theta}^1 A_{21} + \nu_{,\theta}^2 A_{22} + \nu_{,\theta}^3 A_{23} + \nu^1 A_{24} + \nu^2 A_{25} + \nu^3 A_{26}; \\
\varepsilon_{33} &= \nu_{,t}^3 A_{31}; \\
\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} &= \nu_{,\theta}^1 B_{11} + \nu_{,\theta}^2 B_{12} + \nu_{,\theta}^3 B_{13} + \nu_{,s}^1 B_{14} + \nu_{,s}^2 B_{15} + \nu_{,s}^3 B_{16} + \\
&+ \nu^1 B_{17} + \nu^2 B_{18} + \nu^3 B_{19}; \\
\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} &= \frac{1}{2}(\nu_{,t}^1 B_{21} + \nu_{,t}^2 B_{22} + \nu_{,t}^3 B_{23} + \nu^1 B_{24} + \nu^1 B_{25} + \nu^2 B_{26} + \nu^3 B_{27} + \nu_{,s}^3); \\
\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} &= \frac{1}{2}(\nu_{,t}^1 B_{31} + \nu_{,t}^2 B_{32} + \nu_{,t}^3 B_{33} + \nu^1 B_{34} + \nu^2 B_{35} + \nu^3 B_{36} + \nu_{,\theta}^3),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где коэффициенты  $A_{11} \dots B_{36}$  — функции координаты  $t$  компонент метрического тензора и элементов матриц  $[m]$ ,  $[n]$ . Например,  $A_{11} = (1 + tm_{31})$ ,  $A_{12} = r^2 tm_{32}$ ,  $A_{13} = tm_{33}$ ,  $A_{14} = m_{11}(1 + tm_{31}) + tr^2 m_{12} m_{32} + tm_{13} m_{33}$  и т. д.

Или в матричном виде

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{6 \times 1} = [\mathbb{D}]_{6 \times 12} \left\{ \nu \right\}_{12 \times 1}, \tag{2.9}$$

где  $\left\{ \varepsilon \right\}_{1 \times 6}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} 2\varepsilon_{12} 2\varepsilon_{13} 2\varepsilon_{23}\}$  — вектор-строка деформаций точки, отстоящей на расстояние  $t$  от срединной поверхности;  $\left\{ \nu \right\}_{1 \times 12}^T = \{\nu^1 \nu^2 \nu^3\}$  — вектор-строка перемещений в вышеуказанной точке;  $[\mathbb{D}]_{6 \times 12}$  — матрица дифференциальных операций.

### 3. Соотношения между деформациями и напряжениями

Закон Гука для изотропной среды в главных осях тензора деформаций и тензора напряжений выражается соотношениями [1]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= -\frac{\nu}{E} g_{11} (\sigma^{11} g_{11} + \sigma^{22} g_{22} + \sigma^{33} g_{33}) + \left( \frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) g_{11} g_{11} \sigma^{11}; \\
\varepsilon_{22} &= -\frac{\nu}{E} g_{11} (\sigma^{11} g_{11} + \sigma^{22} g_{22} + \sigma^{33} g_{33}) + \left( \frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) g_{22} g_{22} \sigma^{22}; \\
\varepsilon_{33} &= -\frac{\nu}{E} g_{33} (\sigma^{11} g_{11} + \sigma^{22} g_{22} + \sigma^{33} g_{33}) + \left( \frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) g_{33} g_{33} \sigma^{33}; \\
\varepsilon_{12} &= \left( \frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) \sigma^{12} g_{11} g_{22}; \\
\varepsilon_{13} &= \left( \frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) \sigma^{13} g_{11} g_{33}; \\
\varepsilon_{23} &= \left( \frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) \sigma^{23} g_{22} g_{33}.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

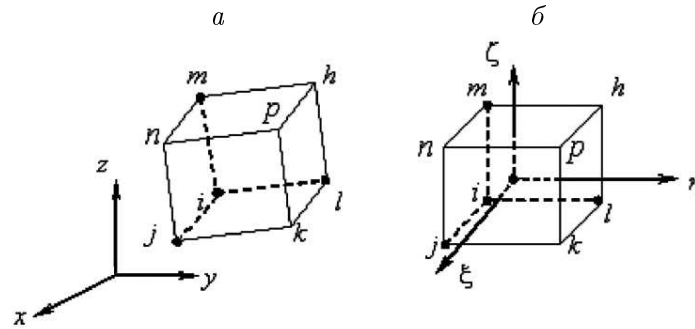


Рис. 2

Представим выражение (3.1) в матричном виде

$$\begin{matrix} \{\varepsilon\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [C] \\ 6 \times 6 \end{matrix} \begin{matrix} \{\sigma\} \\ 6 \times 1 \end{matrix}, \tag{3.2}$$

где  $\{\sigma\}^T = \{\sigma^{11} \sigma^{22} \sigma^{33} \sigma^{12} \sigma^{13} \sigma^{23}\}$  — вектор-строка напряжений в произвольной точке оболочки;  $[C]$  — матрица упругости материала.

Функционал Рейснера  $\Pi_R$  для оболочки вращения имеет вид [2]

$$\begin{aligned} \Pi_R = \int_V \left[ \{\sigma\}^T [D] \{u\} - \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \right] dV - \int \{q^*\} \{u\} ds - \\ - \int_{s_u} \{\sigma^*\}^T (\{u\} - \{u^*\}) ds, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где  $V$  — объем оболочки;  $\{q^*\}$ ,  $\{\sigma^*\}$  — заданные поверхностные и граничные силы;  $\{u^*\}$  — заданные перемещения;  $s_u$ ,  $s_\sigma$  — части поверхности оболочки с заданными силами и перемещениями.

#### 4. Матрица деформирования конечного элемента

Конечный элемент выбран в виде объемного шестигранника с узлами  $i, j, k, l, m, n, p, h$  (рис. 4, а). Для выполнения численного интегрирования глобальные координаты  $s, \theta, t$  аппроксимировались через локальные координаты куба  $\xi, \eta, \zeta$  (рис. 4, б) трилинейными соотношениями

$$\lambda = \begin{matrix} \{f(\xi, \eta, \zeta)\} \\ 1 \times 8 \end{matrix} \begin{matrix} \{\lambda_y\} \\ 8 \times 1 \end{matrix}, \tag{4.1}$$

где  $\{\lambda_y\}^T = \{\lambda^i \lambda^j \lambda^k \lambda^l \lambda^m \lambda^n \lambda^p \lambda^h\}$  — вектор-строка узловых значений величины  $\lambda$ . Под символом  $\lambda$  понимаются координаты  $s, \theta, t$ .

Дифференцированием (4.1) определяются производные глобальных координат в локальной системе  $S_{,\xi} S_{,\eta} S_{,\zeta} \theta_{,\xi} \theta_{,\eta} \theta_{,\zeta} t_{,\xi} t_{,\eta} t_{,\zeta}$  и локальных координат в локальной системе  $\xi_{,s} \xi_{,\theta} \xi_{,t} \eta_{,s} \eta_{,\theta} \eta_{,t} \zeta_{,s} \zeta_{,\theta} \zeta_{,t}$ .

Принимая в качестве узловых неизвестных перемещения и напряжения, представим векторы узловых неизвестных в виде

$$\begin{aligned} \{u_y\}_{1 \times 24}^T &= \left\{ \begin{matrix} \{\nu_y^1\}_{1 \times 8}^T & \{\nu_y^2\}_{1 \times 8}^T & \{\nu_y^3\}_{1 \times 8}^T \end{matrix} \right\} = \\ &= \{\nu^{1i} \nu^{1j} \nu^{1k} \nu^{1l} \nu^{1m} \nu^{1n} \nu^{1p} \nu^{1h} \dots \nu^{3n} \nu^{3p} \nu^{3h}\}; \\ \{\sigma_y\}_{1 \times 48}^T &= \{\{\sigma_y^{11}\}_{1 \times 8}^T \{\sigma_y^{22}\}_{1 \times 8}^T \{\sigma_y^{33}\}_{1 \times 8}^T \{\sigma_y^{12}\}_{1 \times 8}^T \{\sigma_y^{13}\}_{1 \times 8}^T \{\sigma_y^{23}\}_{1 \times 8}^T\} = \\ &= \{\sigma^{11i} \sigma^{11j} \sigma^{11k} \sigma^{11l} \sigma^{11m} \sigma^{11n} \sigma^{11p} \sigma^{11h} \dots \sigma^{23n} \sigma^{23p} \sigma^{23h}\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где использованы матричные обозначения

$$\begin{aligned} \{\nu_y^1\}_{1 \times 8}^T &= \{\nu^{1i} \nu^{1j} \nu^{1k} \nu^{1l} \nu^{1m} \nu^{1n} \nu^{1p} \nu^{1h}\}; \\ \{\nu_y^2\}_{1 \times 8}^T &= \{\nu^{2i} \nu^{2j} \nu^{2k} \nu^{2l} \nu^{2m} \nu^{2n} \nu^{2p} \nu^{2h}\}; \\ \{\nu_y^3\}_{1 \times 8}^T &= \{\nu^{3i} \nu^{3j} \nu^{3k} \nu^{3l} \nu^{3m} \nu^{3n} \nu^{3p} \nu^{3h}\}; \\ \{\sigma_y^{11}\}_{1 \times 8}^T &= \{\sigma^{11i} \sigma^{11j} \sigma^{11k} \sigma^{11l} \sigma^{11m} \sigma^{11n} \sigma^{11p} \sigma^{11h}\}; \\ \{\sigma_y^{22}\}_{1 \times 8}^T &= \{\sigma^{22i} \sigma^{22j} \sigma^{22k} \sigma^{22l} \sigma^{22m} \sigma^{22n} \sigma^{22p} \sigma^{22h}\}; \\ \{\sigma_y^{33}\}_{1 \times 8}^T &= \{\sigma^{33i} \sigma^{33j} \sigma^{33k} \sigma^{33l} \sigma^{33m} \sigma^{33n} \sigma^{33p} \sigma^{33h}\}; \\ \{\sigma_y^{12}\}_{1 \times 8}^T &= \{\sigma^{12i} \sigma^{12j} \sigma^{12k} \sigma^{12l} \sigma^{12m} \sigma^{12n} \sigma^{12p} \sigma^{12h}\}; \\ \{\sigma_y^{13}\}_{1 \times 8}^T &= \{\sigma^{13i} \sigma^{13j} \sigma^{13k} \sigma^{13l} \sigma^{13m} \sigma^{13n} \sigma^{13p} \sigma^{13h}\}; \\ \{\sigma_y^{23}\}_{1 \times 8}^T &= \{\sigma^{23i} \sigma^{23j} \sigma^{23k} \sigma^{23l} \sigma^{23m} \sigma^{23n} \sigma^{23p} \sigma^{23h}\}. \end{aligned}$$

Используя для аппроксимации перемещений и напряжений внутренней точки конечного элемента трилинейные соотношения (4.1), сформируем матричные соотношения

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_{6 \times 1} &= [G]_{6 \times 48} \{\sigma_y\}_{48 \times 1}; \quad \{u\}_{3 \times 1} = [A]_{3 \times 24} \{u_y\}_{24 \times 1}, \\ \{\varepsilon\}_{6 \times 3} &= [D]_{6 \times 3} \{u\}_{3 \times 1} = [D]_{6 \times 3} [A]_{3 \times 24} \{u_y\}_{24 \times 1} = [B]_{6 \times 24} \{u_y\}_{24 \times 1}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} [G]_{6 \times 48} &= \begin{bmatrix} \{t\}^T & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \{t\}^T & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \{t\}^T & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \{t\}^T & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \{t\}^T & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \{t\}^T \end{bmatrix}, \\ & \quad (1 \times 8) \quad (1 \times 8) \quad (1 \times 8) \quad (1 \times 8) \quad (1 \times 8) \quad (1 \times 8) \\ [A]_{3 \times 24} &= \begin{bmatrix} \{t\}^T & \dots & \dots \\ \dots & \{t\}^T & \dots \\ \dots & \dots & \{t\}^T \end{bmatrix}. \\ & \quad (1 \times 8) \quad (1 \times 8) \quad (1 \times 8) \end{aligned}$$

Здесь  $\{t\}_{1 \times 8}^T = \{f(\xi, \eta, \zeta)\}_{1 \times 8}^T$ .

Для формирования матрицы [B] используем производные компонент вектора перемещений

$$\nu_{,\lambda}^g = [\{f_{,\xi}\}^T \xi_{,\lambda} + \{f_{,\eta}\}^T \eta_{,\lambda} + \{f_{,\zeta}\}^T \zeta_{,\lambda}] \{\nu_y^g\} \quad (g = 1, 2, 3),$$

где под символом  $\lambda$  понимаются координаты  $s, \theta, t$ .

С учетом матричных соотношений (4.3) функционал (3) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Pi_R = \{ \sigma_y \}_{1 \times 48}^T \int_V [G]_{48 \times 6}^T [B]_{6 \times 24} d\nu [u_y]_{48 \times 1} - \frac{1}{2} \{ \sigma_y \}_{1 \times 48}^T [C]_{6 \times 66 \times 48} [G]_{48 \times 1} d\nu \{ \sigma_y \}_{48 \times 1} - \\ - \{ u_y \}_{1 \times 24}^T \int_{s\sigma} [A]_{24 \times 3}^T \{ q^* \}_{3 \times 1} ds. \end{aligned} \quad (4.4)$$

В (4.4) заданные перемещения приняты равными нулю.

Дифференцируя равенство (4.4) по узловым неизвестным  $\{\sigma_y\}^T$  и  $\{u_y\}^T$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_R}{\partial \{ \sigma_y \}^T} &\equiv [H]_{48 \times 48} \{ \sigma_y \}_{48 \times 1} + [Q]_{48 \times 24} \{ u_y \}_{24 \times 1} = 0; \\ \frac{\partial \Pi_R}{\partial \{ u_y \}^T} &\equiv [Q]^T_{24 \times 48} \{ \sigma_y \}_{48 \times 1} - \{ f \}_{24 \times 1} = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} [Q]_{24 \times 48} &= \int_V [G]_{48 \times 6}^T [B]_{6 \times 24} d\nu; \quad [H]_{48 \times 48} = \int_V [G]_{48 \times 6}^T [C]_{6 \times 6 \times 48} [G]_{48 \times 1} d\nu; \\ \{ f \}_{24 \times 1} &= \int_{s\sigma} [A]_{24 \times 3}^T q^*_{3 \times 1} ds. \end{aligned}$$

Запишем систему (4.5) в традиционной для МКЭ форме

$$[k]_{72 \times 72} [Z_y]_{72 \times 1} = [F]_{72 \times 1},$$

где

$$\begin{aligned} [k]_{72 \times 72} &= \begin{bmatrix} -[H]_{48 \times 48} & [Q]_{48 \times 24} \\ [Q]^T_{48 \times 24} & [O]_{24 \times 24} \end{bmatrix} \text{ — матрица деформирования конечного элемента;} \\ \{ Z_y \}_{1 \times 72}^T &= \left\{ \begin{matrix} \{ \sigma_y \}_{1 \times 48}^T \\ \{ u_y \}_{1 \times 24}^T \end{matrix} \right\} \text{ — вектор узловых неизвестных конечного элемента;} \\ \{ F \}_{1 \times 72}^T &= \left\{ \begin{matrix} \{ 0 \}_{1 \times 48}^T \\ \{ f \}_{1 \times 24}^T \end{matrix} \right\} \text{ — вектор узловых усилий элемента.} \end{aligned}$$

При формировании матрицы деформирования всей конструкции используется традиционная процедура МКЭ [3].

В качестве примера рассчитана находящаяся под действием равномерно распределенного давления интенсивности  $q$  оболочка вращения, меридиан которой описывается параболической зависимостью (рис. 4):

$$Z = \frac{D - A}{l^2} x^2 + A.$$

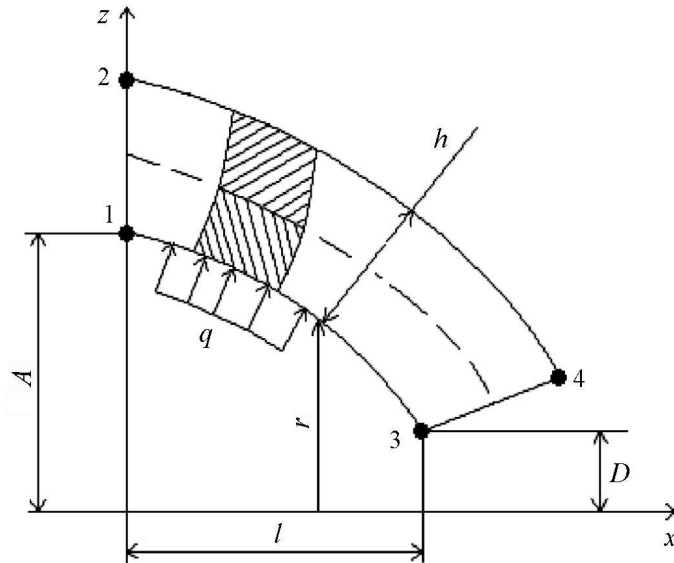


Рис. 3

Приняты следующие исходные данные:  $A = 0.25$  м;  $D = 0.02$  м;  $l = 0.5$  м;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0.3$ .

Расчет выполнен в двух вариантах. В первом варианте при  $q = 10 \frac{\partial aH}{\text{см}^2}$  толщина оболочки принималась равной  $h = 0.004$  м (оболочка считалась тонкой). Численные значения меридиональных  $\sigma_{ss}$  и кольцевых  $\sigma_{\theta\theta}$  напряжений в зависимости от количества элементов дискретизации  $n_{\text{э}}$  приведены в табл. 1 (в  $\frac{\partial aH}{\text{см}^2}$ ).

Анализ табличных результатов показывает хорошую сходимость вычислительного процесса. Численные значения меридиональных напряжений  $\sigma_{ss}$  в точках 3 и 4, близкие к нулю, соответствуют физическому смыслу задачи. Средние значения напряжений в точках 1 и 2, полученные из условия равновесия оболочки, равны

$$\sigma_{ss} = \frac{q(A^2 - D^2)}{2(A + h/2)h} = 308.07 \frac{\partial aH}{\text{см}^2},$$

что примерно на 1% отличается от табличного значения.

Во втором варианте расчета при  $q = 100 \frac{\partial aH}{\text{см}^2}$  толщина оболочки принималась равной  $h = 0.07$  м (оболочка не являлась тонкой).

Численные значения меридиональных напряжений в зависимости от числа элементов дискретизации приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 1

№ точки	$n_{\text{э}} = 56$		$n_{\text{э}} = 100$		$n_{\text{э}} = 212$	
	$\sigma_{ss}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$\sigma_{ss}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$\sigma_{ss}$	$\sigma_{\theta\theta}$
1	305.58	485.78	305.44	485.44	306.11	485.46
2	311.16	480.39	308.22	479.22	307.69	478.88
3	4.6	84.11	0.92	81.4	0.27	81.02
4	1.12	54.69	1.42	53.42	1.65	53.49



Т а б л и ц а 2

№ точки	$n_{\Omega} = 56$		$n_{\Omega} = 100$		$n_{\Omega} = 212$	
	$\sigma_{ss}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$\sigma_{ss}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$\sigma_{ss}$	$\sigma_{\theta\theta}$
1	138.44	315.72	136.11	315.13	136.14	315.21
2	159.53	248.06	159.08	248.07	158.06	247.95
3	32.44	276.84	2.16	277.76	3.13	278.27
4	5.77	-12.4	0.75	-14.07	0.37	-14.65

Анализ табличных результатов свидетельствует о хорошей сходимости вычислительного процесса.

В обоих вариантах число элементов по толщине оболочки принималось равным четырем. В данной задаче и при двух элементах по толщине оболочки получились практически одинаковые результаты.

Исходя из изложенного можно сделать вывод, что разработанный элемент вполне пригоден для расчета пластин и оболочек произвольной толщины.

## Список литературы

- [1] Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
- [2] ГАЛАГЕР Р. Метод конечных элементов. Основы: пер. с англ. М.: Мир, 1984. 428 с.
- [3] Постнов В.А., ХАРХУРИМ И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1974. 344 с.

*Поступила в редакцию 14 мая 2007 г.,  
в переработанном виде — 3 марта 2008 г.*