

Неустойчивость двухслойной системы при наличии объемных источников тепла*

В. Б. БЕКЕЖАНОВА

*Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия
e-mail: bekezhanova@mail.ru*

An initial stage of the penetrative convection in a system of two immiscible liquids is investigated numerically. Densities of liquids are supposed to depend linearly on temperature and pressure. The heat source function is taken into account in the free convection equations. It is shown that the state of mechanical equilibrium is unstable. Neutral curves are plotted and the critical values of the Rayleigh number are found. The obtained solution is compared with the similar problem with a single liquid.

Введение

Исследования физико-химических и биологических характеристик “возрастного” состава вод в оз. Байкал [1, 2] свидетельствуют о наличии в озере механизма глубокого перемешивания, переносящего поверхностные воды в придонные области. Важными факторами, формирующими конвекцию в естественных водоемах, являются непрерывно идущие процессы обмена теплом между водной массой и окружающей средой. Для возникновения конвекции необходимы такие условия на поверхности водоема, чтобы поверхностные слои становились тяжелее нижележащих. Подобные условия создаются весной и летом, когда прогревание поверхностных вод приводит к увеличению их плотности, летом — во время ночного охлаждения, осенью — когда тепловой баланс поверхности становится отрицательным и поверхностные воды, имеющие температуру выше 4 °С, становятся тяжелее нижележащих [3].

Тепловой баланс и режим поверхности планеты формируется под действием такого мощного природного фактора, как солнечное излучение. Наиболее активные термодинамические процессы имеют место при резких сезонных изменениях потока инсоляции. Вода представляет собой светорассеивающую и светопоглощающую среду в достаточно широком диапазоне спектра солнечного излучения, поэтому необходим учет ее оптических свойств. В работе предпринята попытка оценить влияние процесса “переработки” потока излучения на гидродинамическую устойчивость байкальских вод.

Для описания движения жидкости используются уравнения Обербека—Буссинеска. В уравнение энергии добавлена общая энергетическая функция теплового источника F_w , описывающая поглощение солнечной радиации. Значение F_w определяется оптическими параметрами и моделью распространения излучения в неоднородной среде.

Другим важным фактором, определяющим интенсивность вертикального водообмена и связанных с этим процессов переноса примесей, является плотностная стратифи-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, (гранты № 08-01-00762, НШ 2260.2008.1) и комплексного интеграционного проекта 2.15 СО РАН.

© Институт вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, 2008.

кация вод озера. Если толщина слоя невелика, то отклонения плотности, вызванные изменениями давления, можно не учитывать. При изучении же процессов, происходящих в глубоководных водоемах, следует принять во внимание, что возникающие перепады давления могут существенно влиять на распределение плотности, а следовательно, и на конвективные процессы. В глубоких водоемах возникает эффект сжимаемости воды при высоких давлениях. Уравнение состояния жидкостей примем в виде

$$\rho_j = \rho_0(1 - \beta_j(\theta_j - \theta_{0j}) - \gamma_j(p_j - p_{0j})), \quad (1)$$

где индекс j нумерует жидкости, первая жидкость расположена внизу; ρ_0 — некоторое постоянное значение плотности (для воды характерное значение $\rho_0 = 999.972 \text{ кг/м}^3$); β_j — коэффициент теплового расширения жидкости; θ_j — температура; γ_j — барический коэффициент расширения; θ_{0j}, p_{0j} — постоянные средние значения температуры и давления. Такая зависимость плотностей от температуры и давления с малыми коэффициентами β_j и γ_j позволяет считать слои жидкостей слабо сжимаемыми средами [4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим гравитационную тепловую конвекцию в системе двух несмешивающихся жидкостей с общей границей раздела, ограниченных снизу твердой стенкой и сверху свободной поверхностью (рис. 1). Оси x и y находятся в плоскости верхней границы слоя, а ось z направлена вертикально вниз. Точка $z = 0$ соответствует свободной поверхности, $z = z_*$ — поверхности раздела, $z = l$ — нижней границе слоя (твердая стенка). Поверхности Γ_t^1 и Γ_t^2 определяются уравнениями $f_{1,2}(\mathbf{x}, t) = 0$, где $\mathbf{x} = (x, y, z)$; в частности, для рассматриваемого ниже покая $f_1 = z - z_*$, $f_2 = z - l$.

В каждой области Ω_j справедлива система уравнений Обербека—Буссинеска

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_j &= 0, & \frac{\partial \theta_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \theta_j &= \chi_j \Delta \theta_j + F_{wj}(z, t), \\ \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \nabla \mathbf{v}_j \right) &= - \nabla p_j + \mu_j \Delta \mathbf{v}_j + \rho_j \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (2)$$

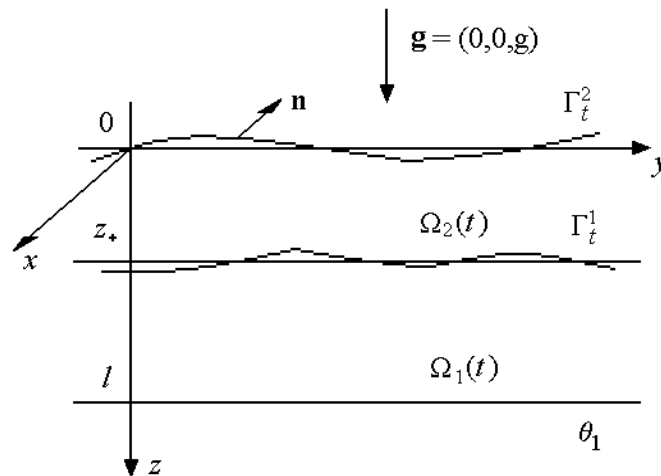


Рис. 1. Схема течения

где $\mathbf{v}_j = (u_j, v_j, w_j)$ — вектор скорости j -й жидкости, χ_j — коэффициент температуропроводности, $F_{wj}(z, t)$ — мощность внутренних сил. В случае объемного поглощения (проникновения радиации в среду) функция теплового источника описывает внутреннее тепловыделение и определяется по закону [5]

$$F_{w2}(z, t) = \sigma \varkappa_2 R \exp(-\varkappa_2 z), \quad F_{w1}(z, t) = F_{w2}(z_*, t) \exp(-\varkappa_1 z). \quad (3)$$

Здесь σ — числовой параметр, представляющий собой отношение интенсивности солнечной радиации к радиационному балансу на свободной поверхности, $0 < \sigma < 1$. Далее, \varkappa_j — показатель ослабления солнечной радиации в жидкости (показатель поглощения), R — радиационный баланс поверхности, μ_j — динамический коэффициент вязкости, $\mathbf{g} = (0, 0, g)$, g — ускорение свободного падения. Плотности ρ_j имеют вид (1).

На твердой стенке задаются температура и условие прилипания

$$\theta_1 = \Theta_1, \quad \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{при} \quad z = l. \quad (4)$$

На поверхности раздела Γ_t^1 при $z = z_*$:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \mathcal{P}_1 \mathbf{n} = \mathcal{P}_2 \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n} = V_n^1, \quad k_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial \mathbf{n}} = k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{n}}. \quad (5)$$

На свободной поверхности Γ_t^2 при $z = 0$:

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} = V_n^2, \quad \mathcal{P}_2 \cdot \mathbf{n} + p_{\text{gas}} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad k_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial \mathbf{n}} + b(\theta_2 - \theta_{\text{gas}}) = Q, \quad (6)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности Γ_t^j , V_n^j — скорость Γ_t^j в направлении нормали, $\mathcal{P}_j = -p_j + 2\mu_j D_j$ — тензор напряжений в жидкости, D_j — тензор скоростей деформации векторного поля \mathbf{v}_j , p_{gas} — давление газа, k_j — коэффициент теплопроводности жидкости, b — коэффициент межфазного теплообмена, θ_{gas} — температура газа, Q — заданный поток тепла через свободную поверхность. Учитывая, что на прогрев водяной толщи расходуется энергия, равная $R(1 - \sigma)$, получим $Q = R(1 - \sigma) - F_e - F_h$, F_e — потери тепла на испарение (конденсацию), F_h — потери на конвективный теплообмен.

2. Равновесное состояние

В состоянии механического равновесия $\mathbf{v}_j = 0$ и производные по времени $\theta_{jt} = p_{jt} = 0$.

Из уравнения энергии следует, что $\theta_j(z)$ имеют следующий вид:

$$\theta_1(z) = -A \exp(-\varkappa_1 z) + c_{11}z + c_{21}, \quad A = \frac{\sigma R \varkappa_2}{\varkappa_1^2 \chi_1} \exp(-\varkappa_2 z_*); \quad (7)$$

$$\theta_2(z) = -\frac{\sigma R}{\varkappa_2 \chi_2} \exp(-\varkappa_2 z) + c_{12}z + c_{22}. \quad (8)$$

Постоянные c_{1j} и c_{2j} ($j = 1, 2$) определяются из граничных условий:

$$c_{21} = \Theta_1 - c_{11}l + A \exp(-\varkappa_1 l), \quad c_{12} = \frac{D - c_{22}}{z_* + B},$$

$$c_{11} = \frac{k_2}{k_1} \left(\frac{\sigma R}{\chi_2} \exp(-\varkappa_2 z_*) + c_{12} \right) - A \varkappa_1 \exp(-\varkappa_1 z_*),$$

$$D = \Theta_1 + \frac{\sigma R}{\chi_2} \exp(-\varkappa_2 z_*) \left(\frac{1}{\varkappa_2} - B \right) + A \exp(-\varkappa_1 l) + A \exp(-\varkappa_1 z_*) (\varkappa_1 (l - z_*) - 1),$$

$$B = \frac{k_2}{k_1} l - \frac{k_2}{k_1} z_*,$$

$$c_{22} = \frac{B + z_*}{b(B + z_*) + k_2} \left[Q + k_2 \left(\frac{\sigma R}{\chi_2} + \frac{D}{B + z_*} \right) + \frac{\sigma R}{\varepsilon_2 \chi_2} b \right].$$

Рассматривалась зависимость распределения температуры при близких значениях показателей поглощения ε_1 и ε_2 от положения поверхности раздела. Вообще говоря, показатель поглощения ε не является постоянной величиной, а зависит от природы, состояния вещества, от длины волны проходящего излучения и практически не зависит от мощности светового пучка. Поскольку задача рассматривается применительно к естественным глубоким водоемам, то учитываем коротковолновую радиацию и пренебрегаем длинноволновой, основная часть которой поглощается атмосферой. В таких условиях можно считать ε_j постоянными и $\varepsilon_j \sim 0.2 - 0.4$. На рис. 2 даны графики функции температуры при $l = 730$ м (средняя глубина Байкала). За счет светопоглощающих свойств верхней жидкости влияние солнечного излучения на температурный режим нижнего слоя тем слабее, чем больше толщина верхнего слоя.

Полученные распределения температуры можно сравнить с результатами экспериментальных наблюдений, проводимых на протяжении многих лет на оз. Байкал. По приведенным в [3, 6] значениям $\theta_1, R, Q, \theta(z)$ для отдельных месяцев и зон Байкала восстанавливаются значения ε_j, z_* и σ , при которых можно получить истинный профиль температуры.

Из уравнения импульса находятся функции давления p_j :

$$p_1(z) = \left(\frac{\rho_0 g - a_2(c_{21} - \theta_0 + c_{11}z)}{a_1} + p_0 + \frac{a_2 c_{11}}{a_1^2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{A a_2}{a_1 - \varepsilon_1} \exp((a_1 - \varepsilon_1)z) + d_1 \right) \exp(-a_1 z),$$

$$p_2(z) = \left(\frac{\rho_0 g - a_4(c_{22} - \theta_0 + c_{12}z)}{a_3} + p_0 + \frac{a_4 c_{12}}{a_3^2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{a_4 \sigma R}{\chi_2 \varepsilon_2 (a_3 - \varepsilon_2)} \exp((a_3 - \varepsilon_2)z) + d_2 \right) \exp(-a_3 z).$$

Здесь $a_1 = \rho_0 \gamma_1 g$, $a_2 = \rho_0 \beta_1 g$, $a_3 = \rho_0 \gamma_2 g$, $a_4 = \rho_0 \beta_2 g$.

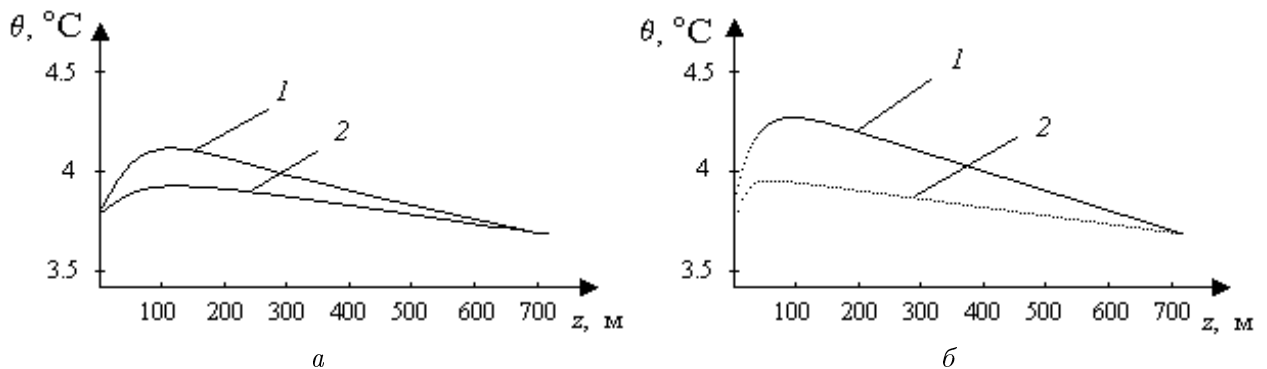


Рис. 2. Графики функций температуры: $a - z_* = 200$ м, $b - z_* = 50$ м; кривая 1 — $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, кривая 2 — $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$

Постоянные d_1 , d_2 находятся из граничных условий и равны

$$d_1 = \left[\exp(a_3 z_*) \left(\frac{\rho_0 g - a_4(c_{22} - \theta_0 + c_{12} z_*)}{a_3} + p_0 + \frac{a_4 c_{12}}{a_3^2} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{a_4 \sigma R}{\chi_2 \varkappa_2 (a_3 - \varkappa_2)} \exp((a_3 - \varkappa_2) z_*) + d_2 \right) \right] \exp((a_1 - a_3) z_*) - e_1, \\ d_2 = p_{\text{gas}} - e_2,$$

где

$$e_1 = \exp(a_1 z_*) \left(\frac{\rho_0 g - a_2(c_{21} - \theta_0 + c_{11} z_*)}{a_1} + p_0 + \frac{a_2 c_{11}}{a_1^2} \right) + \frac{A a_2}{a_1 - \varkappa_1} \exp((a_1 - \varkappa_1) z_*), \\ e_2 = \frac{\rho_0 g - a_4(c_{22} - \theta_0)}{a_3} + p_0 + \frac{a_4 c_{12}}{a_3^2} + \frac{a_4 \sigma R}{\chi_2 \varkappa_2 (a_3 - \varkappa_2)}.$$

Функции p_j выпуклы вниз и близки к линейным.

Итак, получено стационарное решение p_j , θ_j краевой задачи (2)–(6), соответствующее состоянию механического равновесия $\mathbf{v}_j = 0$.

3. Задача о малых возмущениях равновесия

Сформулируем задачу об устойчивости механического равновесия относительно малых возмущений. Для этого введем определяющие безразмерные параметры. В качестве характерного масштаба длины выберем толщину $l_* = z_*$ верхнего слоя, в качестве масштаба температуры — разность $\Theta = \theta_0 - \theta_1$. За масштаб скорости примем скорость конвективного всплытия нагретой частицы жидкости $v_* = \sqrt{g l_* \beta \Theta}$. Для плотности и давления используем масштабы ρ_0 и $\rho_0 v_*^2$ соответственно. Температуру будем отсчитывать от температуры нижней границы Θ_1 , а давление — от гидростатического. Кроме того, определим модифицированную функцию теплового источника $F_{j*} = v_* l_* F_{wj} / k_j$.

Введем безразмерные переменные $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$, τ такие, что

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = \boldsymbol{\xi} l_*, \quad t = \frac{l_*}{v_*} \tau, \quad p_j = \rho_0 v_*^2 p'_j, \quad \mathbf{v}_j = v_* \mathbf{v}'_j, \quad \theta_j = \Theta \theta'_j.$$

Здесь p'_j , v'_j , θ'_j — безразмерные функции давления, скорости и температуры соответственно.

Примем в качестве единиц измерения коэффициентов ν , χ , β , γ , \varkappa , k их средние арифметические значения

$$\nu_* = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \quad \chi_* = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}, \quad \beta_* = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}, \quad \gamma_* = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}, \quad \varkappa_* = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \quad k_* = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Тогда безразмерные параметры ν'_j , χ'_j , β'_j , γ'_j , \varkappa'_j , k'_j вычисляются по формулам

$$\nu'_j = \frac{\nu_j}{\nu_*}, \quad \chi'_j = \frac{\chi_j}{\chi_*}, \quad \beta'_j = \frac{\beta_j}{\beta_*}, \quad \gamma'_j = \frac{\gamma_j}{\gamma_*}, \quad \varkappa'_j = \frac{\varkappa_j}{\varkappa_*}, \quad k'_j = \frac{k_j}{k_*}.$$

Задача (2)–(6) характеризуется безразмерными параметрами: $\varepsilon_\theta = \beta_* \Theta$, $\varepsilon_p = \gamma_* \rho_0 v_*^2$, $\varphi_\theta = \theta_0 / \Theta$, $\varphi_p = p_0 / (\rho_0 v_*^2)$, $\delta_* = \chi_* / (l_* v_*)$ — число Фурье, $f_* = l_*^2 \sigma R \varkappa_* / (\Theta k_*)$ — параметр

тепловыделения, $\mu_* = \nu_*/(l_*v_*)$ — параметр кинематической вязкости (обратное к числу Рейнольдса), $\text{Ra} = 1/(\mu_*\delta_*)$ — число Рэлея.

Пусть $\mathbf{v}_{dj}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \mathbf{v}_j(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \delta_* \mathbf{V}_j(\boldsymbol{\xi}, \tau)$, $p_{dj}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = p_j(\boldsymbol{\xi}, \tau) + \mu_* \delta_* P_j(\boldsymbol{\xi}, \tau)$, $\theta_{dj}(\boldsymbol{\xi}, \tau) = \theta_j(\boldsymbol{\xi}, \tau) + T_j(\boldsymbol{\xi}, \tau)$, где $\mathbf{V}_j = (U_j, V_j, W_j)$, P_j, T_j — возмущения, а $\mathbf{v}_j, p_j, \theta_j$ — основное решение. Вид функций $\mathbf{v}_d, p_d, \theta_d$, описывающих возмущенное движение, выбран для удобства последующих преобразований. Линеаризуя полную задачу, получим для возмущений скорости, температуры и давления в каждой из жидкостей следующую краевую задачу (“штрихи” опущены):

$$\begin{aligned} U_{j\xi} + V_{j\eta} + W_{j\zeta} &= 0, & T_{j\tau} + \delta_* h_j W_j &= \delta_* \Delta T_j, \\ \frac{U_{j\tau}}{\mu_*} &= -P_{j\xi} + \Delta U_j, & \frac{V_{j\tau}}{\mu_*} &= -P_{j\eta} + \Delta V_j, \\ \frac{W_{j\tau}}{\mu_*} &= -P_{j\zeta} + \Delta W_j - \text{Ra} T_j - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_\theta} P_j, \end{aligned} \quad (9)$$

где $h_j = h_j(\zeta) = \partial\theta_j/\partial\zeta$;

— на твердой стенке

$$\zeta = l/l_* : \quad U_1 = V_1 = W_1 = 0, \quad T_1 = 0; \quad (10)$$

— на поверхности раздела

$$\begin{aligned} \zeta = 1 : \quad U_1 &= U_2, \quad V_1 = V_2, \quad W_1 = W_2, \quad R_{1\tau} = \delta_* W_1, \\ \rho_1 \nu_1 (U_{1\zeta} + W_{1\xi}) &= \rho_2 \nu_2 (U_{2\zeta} + W_{2\xi}), \quad \rho_1 \nu_1 (V_{1\zeta} + W_{1\eta}) = \rho_2 \nu_2 (V_{2\zeta} + W_{2\eta}), \\ T_1 - \frac{\partial\theta_1}{\partial\zeta} R_1 &= T_2 - \frac{\partial\theta_2}{\partial\zeta} R_1, \end{aligned} \quad (11)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} + \left(k_2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \zeta^2} - k_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \zeta^2} \right) R_1 = 0,$$

$$P_1 - P_2 + 2(\rho_2 \nu_2 W_{2\zeta} - \rho_1 \nu_1 W_{1\zeta}) = \text{Ra} \left(p_{1\zeta} - p_{2\zeta} - \frac{1}{\varepsilon_\theta} (\rho_2 - \rho_1) \right) R_1,$$

где $R_1 = R_1(\xi, \eta, \tau)$ — локальное отклонение поверхности раздела от ее невозмущенного состояния по нормали;

— на свободной границе

$$\begin{aligned} \zeta = 0 : \quad U_{2\zeta} + W_{2\xi} &= 0, \quad V_{2\zeta} + W_{2\eta} = 0, \quad R_{2\tau} = \delta_* W_2, \\ P_2 - 2W_{2\zeta} &= \text{Ra} \left(\frac{\partial p_2}{\partial \zeta} + \frac{\rho_2}{\varepsilon_\theta} \right) R_2, \\ -\frac{\partial T_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \zeta^2} R_2 &+ \text{Bi}(T_2 - h_2 R_2) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $R_2 = R_2(\xi, \eta, \tau)$ — возмущение свободной границы, $\text{Bi} = bl_*/k_2$ — число Био.

Рассмотрим нормальные возмущения, пропорциональные $\exp[i(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta - C\tau)]$, где α_1, α_2 — волновые числа вдоль осей x и y соответственно, $C = C_r + iC_i$ — комплексный декремент. Для амплитуд нормальных возмущений получим спектральную краевую задачу, к которой применимо преобразование Сквайра: $Z_j = i\alpha_1 U_j + i\alpha_2 V_j$. После преобразований система (9) примет вид

$$Z_j + W'_j = 0, \quad -iCT_j + \delta_* h_j W_j = \delta_* (T''_j - \alpha^2 T_j),$$

$$\frac{-iC}{\mu_*} Z_j = \alpha^2 P_j + Z_j'' - \alpha^2 Z_j, \quad (13)$$

$$\frac{-iC}{\mu_*} W_j = -P_j' + W_j'' - \alpha^2 W_j - \text{Ra} T_j - \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_\theta} P_j,$$

где $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ — квадрат модифицированного волнового числа, а “штрих” обозначает дифференцирование по переменной ζ .

Граничные условия (10)–(12) перейдут в следующие:

$$\zeta = l/l_* : \quad Z_1 = 0, \quad W_1 = 0, \quad T_1 = 0; \quad (14)$$

$$\zeta = 1 : \quad Z_1 = Z_2, \quad W_1 = W_2, \quad \rho_2 \nu_2 (Z_2' - \alpha^2 W_2) = \rho_1 \nu_1 (Z_1' - \alpha^2 W_1),$$

$$P_1 - P_2 + 2(\rho_2 \nu_2 W_2' - \rho_1 \nu_1 W_1') = \text{Ra} \left(p_1' - p_2' - \frac{1}{\varepsilon_\theta} (\rho_2 - \rho_1) \right) R_1,$$

$$R_1 = \frac{\delta_* i}{C} W_1, \quad T_1 - \frac{\partial \theta_1}{\partial \zeta} R_1 = T_2 - \frac{\partial \theta_2}{\partial \zeta} R_1, \quad (15)$$

$$k_2 T_2' - k_1 T_1' + (k_2 \theta_2'' - k_1 \theta_1'') R_1 = 0;$$

$$\zeta = 0 : \quad Z_2' - \alpha^2 W_2 = 0, \quad R_2 = \frac{\delta_* i}{C} W_2,$$

$$P_2 - 2W_2' = \text{Ra} (p_2' + \rho_2/\varepsilon_\theta) R_2, \quad (16)$$

$$T_2' + \theta_2'' R_2 + \text{Bi}(T_2 - h_2 R_2) = 0.$$

Краевая задача (13)–(16) является задачей на собственные значения относительно комплексного декремента C . Для устойчивости равновесного состояния p_j, θ_j по отношению к малым возмущениям вида необходимо и достаточно, чтобы у всех собственных значений C мнимая часть C_i была отрицательной.

4. Численное решение

Полученная спектральная задача (13)–(16) решается методом ортогонализации [7].

Исследовалась устойчивость системы горизонтальных слоев слабо сжимаемых жидкостей с общей поверхностью раздела при следующих значениях параметров: $\theta_{\text{gas}} = 12$ °С, $p_{\text{gas}} = 101300$ Па, $\nu_* = 1.57 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\chi_* = 1.323 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\beta_* = 8.57 \cdot 10^{-6}$ К, $k_* = 0.559$ Вт/(м·К), $\varkappa_* = 0.36$ м⁻¹, $\gamma_* = 1.40 \cdot 10^{-8}$ Па⁻¹. Приведенные данные соответствуют значениям параметров для воды в оз. Байкал. При указанных значениях физических параметров найдена зависимость $C_i = \text{Im} C$ от волнового числа α .

Расчеты проводились для средних глубин Южного ($l = 810$ м), Центрального ($l = 803$ м) и Северного Байкала ($l = 564$ м). При этом учитывались средние значения потоков тепла Q и радиационного баланса R , характерных для безледного периода указанных зон Байкала.

На рис. 3 изображены кривые $C_i(\alpha)$, полученные при различных значениях z_* . Укажем критические значения волновых чисел α_* , при которых наступает неустойчивость, и соответствующие им критические длины волн в размерных переменных λ_* , а также числа Bi :

а) $z_* = 50$ м

Северный Байкал — $\alpha_* = 1.01$, $\lambda_* = 311.6$ м, $\text{Bi} = 0.08$;

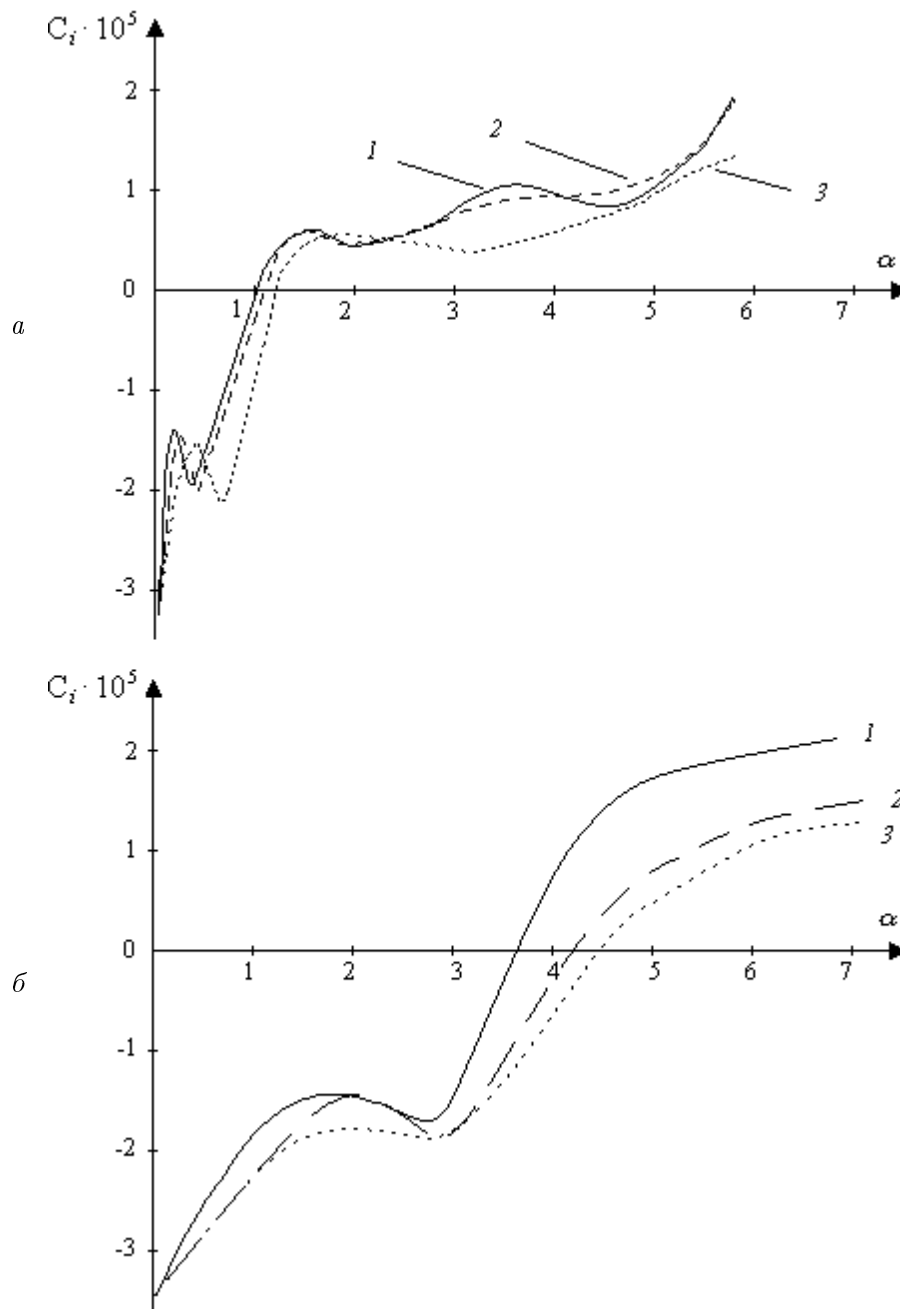


Рис. 3. Инкременты нарастания возмущений $C_i(\alpha)$: *a* — при $z_* = 50$ м, *б* — при $z_* = 200$ м; кривая 1 — Северный Байкал, 2 — Южный Байкал, 3 — Центральный Байкал

Южный Байкал — $\alpha_* = 1.10$, $\lambda_* = 284.2$ м, $Vi = 0.10$;

Центральный Байкал — $\alpha_* = 1.19$, $\lambda_* = 261.7$ м, $Vi = 0.11$;

б) — $z_* = 200$ м

Северный Байкал — $\alpha_* = 3.71$, $\lambda_* = 338.4$ м, $Vi = 0.31$;

Южный Байкал — $\alpha_* = 4.19$, $\lambda_* = 300.0$ м, $Vi = 0.40$;

Центральный Байкал — $\alpha_* = 4.47$, $\lambda_* = 281.1$ м, $Vi = 0.42$.

Из полученных результатов видно стабилизирующее влияние теплообмена на устойчивость равновесия. Однако, чем меньше толщина верхнего слоя, тем активнее термодинамические процессы, протекающие в нем, и это оказывает дестабилизирующее влияние на устойчивость.

Граница устойчивости определяется из соотношения $C_i(\text{Ra}) = 0$. Случаю $C_i = 0$ соответствуют нейтральные возмущения. Полагая в задаче (13)–(16) $C = 0$, получим нейтральные кривые устойчивости. При расчетах изменялось значение чисел Био, характеризующее интенсивность теплообмена с окружающей средой, положение поверхности раздела z_* , а значение l полагалось равным 730 м (средняя глубина Байкала) во всех случаях.

На рис. 4 представлены зависимости чисел Рэлея от волнового числа (нейтральные кривые). Для различных значений чисел Био приведем критические числа Рэлея Ra_* , которые являются минимальными значениями на соответствующих нейтральных кривых, и критические волновые числа α_* , при которых достигаются значения Ra_* :

а) $z_* = 50$ м

$\text{Bi} = 0.2$, $\text{Ra}_* = 2819.16$, $\alpha_* = 0.74$;

$\text{Bi} = 1$, $\text{Ra}_* = 3474.20$, $\alpha_* = 0.97$;

$\text{Bi} = 2$, $\text{Ra}_* = 3921.71$, $\alpha_* = 1.18$;

б) $z_* = 200$ м

$\text{Bi} = 0.2$, $\text{Ra}_* = 3004.27$, $\alpha_* = 1.06$;

$\text{Bi} = 1$, $\text{Ra}_* = 3561.67$, $\alpha_* = 1.45$;

$\text{Bi} = 2$, $\text{Ra}_* = 3994.19$, $\alpha_* = 1.70$.

Видно, что при уменьшении числа Био критические числа Рэлея убывают, а область неустойчивости смещается в область меньших по значению волновых чисел. Полученные результаты позволяют говорить о стабилизирующем влиянии теплообмена на свободной границе. Кроме того, с ростом толщины верхнего слоя также увеличивается зона устойчивости. На рис. 5 показана зависимость критического волнового числа α_* от координаты поверхности раздела z_* .

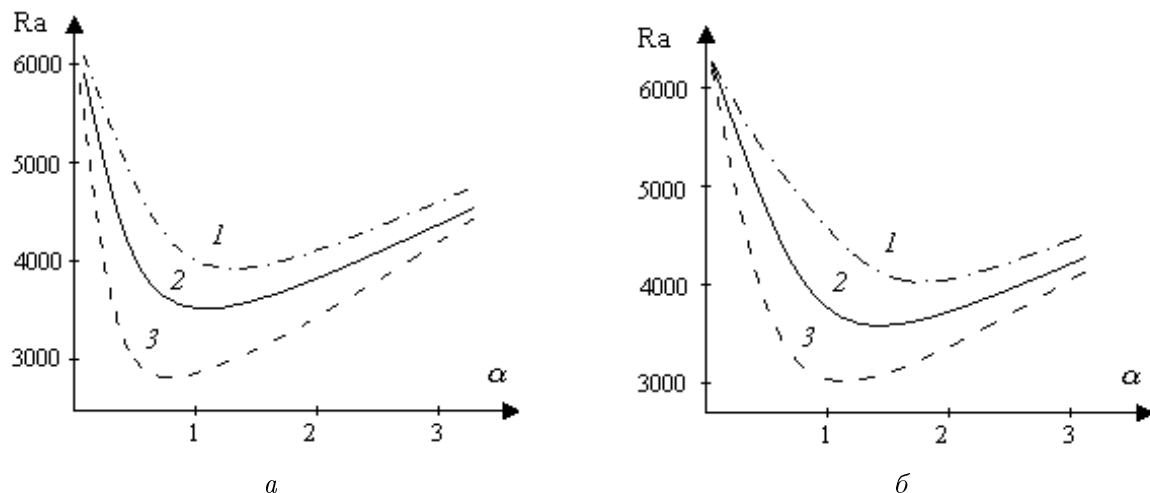


Рис. 4. Нейтральные кривые: а — при $z_* = 50$ м, б — при $z_* = 200$ м; кривая 1 — $\text{Bi} = 2$, 2 — $\text{Bi} = 1$, 3 — $\text{Bi} = 0.2$

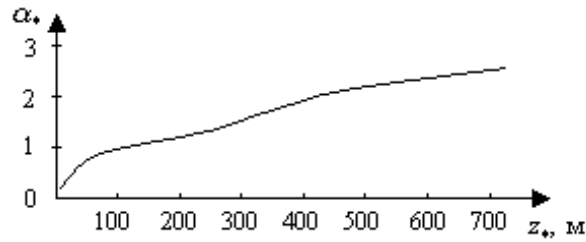


Рис. 5. Зависимость критического волнового числа α_* от положения поверхности раздела z_* при $Bi = 0.2$

Полученное решение сравнивалось с решением аналогичной задачи для слоя жидкости толщины l . В двухслойной системе неустойчивость наступает при меньших волновых числах. Укажем критические числа Рэлея при $l = 730$ м:

$$Bi = 0.2, Ra_* = 3106.18, \alpha_* = 1.24;$$

$$Bi = 1, Ra_* = 3634.87, \alpha_* = 1.71;$$

$$Bi = 2, Ra_* = 4004.73, \alpha_* = 1.97.$$

Заключение

Найдено решение, описывающее состояние покоя системы. На основе численных расчетов показано, что состояние механического равновесия двухслойной системы со свободной границей при наличии объемных источников тепла является неустойчивым. Увеличение толщины верхнего слоя и интенсивность теплообмена на свободной поверхности имеют стабилизирующее влияние. Построены нейтральные кривые и найдены критические числа Рэлея.

Автор выражает благодарность В.К. Андрееву за полезные замечания.

Список литературы

- [1] ГРАНИН Н.Г., ШИМАРАЕВ М.Н. К вопросу о стратификации и механизме конвекции в Байкале // Докл. РАН. 1991. Т. 321, № 2. С. 381–385.
- [2] ШИМАРАЕВ М.Н., ГРАЧЕВ М.А. и др. Международный гидрофизический эксперимент на Байкале: процессы обновления глубинных вод в весенний период // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 6. С. 824–827.
- [3] ВЕРВОЛОВ В.И., СОКОЛЬНИКОВ М.Н., ШИМАРАЕВ М.Н. Гидрометеорологический режим и тепловой балаес озера Байкал. М.; Л.: Наука, 1965. 373 с.
- [4] МОСЕЕНКОВ В.Б. Качественные методы исследования задач конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. 280 с.
- [5] КРАСС М.С., МЕРЗЛИКИН В.Г. Радиационная теплофизика снега и льда. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 261 с.
- [6] SHIMARAEV M.N., VERBOLOV V.I., GRANIN N.G., SHERSTYANKIN P.P. Physical limnology of Lake Baikal: a review. Irkutsk—Okayama. 1994. 80 p.
- [7] ГОДУНОВ С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3(99). С. 171–174.

Поступила в редакцию 13 июля 2007 г.