Многосеточные итерационные алгоритмы в методе конечных элементов с учетом численного интегрирования*

Л. В. Гилева
Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия
e-mail:gileva@icm.krasn.ru

Рассматривается сеточная задача, полученная дискретизацией эллиптического уравнения второго порядка с помощью кусочно-линейных элементов на треугольниках с использованием численного интегрирования. Для ее решения на последовательности вложенных сеток используются полный многосеточный алгоритм на основе W-цикла и каскадный алгоритм, являющийся наиболее простой версией многосеточных методов. Дискретные задачи на более грубых сетках строятся таким образом, что матрицы систем уравнений на соседних сетках связаны через операторы интерполяции и проектирования. Доказано, что для обоих алгоритмов число арифметических операций, приходящихся на одно неизвестное, для определения приближенного решения с точностью, совпадающей по порядку с погрешностью дискретной задачи с учетом численного интегрирования, не зависит от числа неизвестных и количества сеток.

Ключевые слова: метод конечных элементов, многосеточный итерационный алгоритм, каскадный алгоритм, квадратурная формула, оценка числа операций.

Введение

Наиболее простая версия многосеточных методов — каскадный алгоритм. Он состоит в применении традиционных итерационных методов на последовательности вложенных сеток для достижения хорошего начального приближения на каждой сетке за счет интерполяции приближенного решения с предыдущей, более грубой, сетки. Эффективность такого подхода изучалась в работе В.П. Ильина и В.М. Свешникова [1], однако систематические исследования на эту тему начались только в 90-х годах. Свое название метод получил в статье П. Дойфльхарда [2], где продемонстрирована вычислительная эффективность алгоритма. Теоретическое обоснование дано в работах [3, 4], а затем повторено в [5].

Последующие вычислительные эксперименты и теоретические исследования продемонстрировали экономичность каскадного алгоритма для двумерных эллиптических краевых задач, в том числе квазилинейных [6], с криволинейной границей [7] и в областях с угловыми точками [8], где приходится сгущать сетку для компенсации потери

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00621а).

гладкости. В трехмерных краевых задачах алгоритм оказался даже более эффективным [9, 10].

В перечисленных работах сходимость каскадного алгоритма обосновывалась в предположении, что элементы матрицы и вектора правой части системы уравнений метода конечных элементов вычислялись точно. На практике, даже если коэффициенты и правая часть исходного уравнения имеют простые аналитические выражения, коэффициенты системы уравнений вычисляются с использованием квадратурных формул.

Для построения дискретных задач на последовательности сеток используется следующий подход. Вначале строится система уравнений метода Бубнова—Галерина с использованием кусочно-линейных элементов на треугольниках на самой мелкой сетке. При этом для вычисления элементов матрицы и вектора правой части применяется квадратурная формула, точная для многочленов степени ≤ 1. Далее элементы матрицы системы уравнений на более редкой сетке вычисляются как линейные комбинации элементов матрицы, соответствующей более мелкой сетке. Другими словами, матрицы систем уравнений на соседних сетках связаны с помощью операторов интерполяции и проектирования, как и в случае, когда элементы матриц вычисляются точно. Это свойство дает некоторые удобства при реализации метода на ЭВМ.

В данной работе рассматриваются каскадный алгоритм и полный многосеточный алгоритм на основе несимметричного W-цикла. Доказана оптимальная вычислительная сложность обоих алгоритмов, т. е. обоснована оценка $S \leq cN$, где S — число арифметических операций для достижения порядка точности, совпадающего с порядком точности решения дискретной задачи с учетом численного интегрирования, N — число неизвестных системы Бубнова—Галеркина, c — константа, не зависящая от N.

1. Формулировка дифференциальной задачи

В выпуклом открытом многоугольнике $\Omega \subset R^2$ с границей Γ рассмотрим задачу Дирихле

$$-\sum_{i,j=1}^{2} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + au = f \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma, \tag{2}$$

где коэффициенты и правая часть уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости и эллиптичности:

$$\begin{gathered}\partial_i a_{ij} \in L_q(\Omega), \quad q > 2, \quad i, j = 1, 2; \quad a_{12} = a_{21} \text{ на } \bar{\Omega};\\ \mu \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \nu \sum_{i=1}^{2} \xi_i^2 \text{ на } \bar{\Omega}\ \forall \xi_i \in R,\\ \nu \geq \mu > 0; \quad a, f \in L_2(\Omega); \quad a \geq 0 \text{ на } \bar{\Omega}.\end{gathered} \tag{3}$$

Тогда задача (1)–(2) имеет единственное решение в $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющее оценке [11]:

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq c_1 |f|_{0,\Omega}.$$

Перейдем к обобщенной формулировке для задачи (1)–(2): *найти* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *такую, что*

$$\mathcal{L}(u, v) = f(v)\ \forall\ v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{4}$$

где билинейная форма $\mathcal{L}$ и функционал f соответственно определяются соотношениями

$$\mathcal{L}(u,v) = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + auv \right) dx, \tag{5}$$

$$f(v) = \int\limits_{\Omega} fvdx. \tag{6}$$

При условиях (3) задача (4) имеет также единственное решение.

2. Формулировка дискретной задачи

Для построения схемы метода конечных элементов проведем разбиение области $\bar{\Omega}$. Вначале разобьем ее на небольшое количество треугольников так, чтобы получившаяся триангуляция $\mathcal{T}_0$ была согласованной, т. е. любые два треугольника должны иметь общую сторону либо общую вершину или не иметь общих точек. Обозначим через h_0 максимальную из длин сторон полученных треугольников. Для $i = 1, \ldots, l$ положим $N_i = 2^i$, $h_i = h_0/N_i$ и разобьем каждый треугольник на N_i^2 равных треугольников.

Обозначим множество всех вершин полученной триангуляции $\mathcal{T}_i$ через $\bar{\Omega}_i$ и введем $\Omega_i = \bar{\Omega}_i \bigcap \Omega$. Через n_i обозначим число точек множества Ω_i. Каждому узлу $y \in \Omega_i$ поставим в соответствие базисную функцию $\varphi_y^i \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, которая линейна на каждом треугольнике из $\mathcal{T}_i$, равна единице в узле y и нулю во всех остальных узлах из $\bar{\Omega}_i$. Обозначим через H^i линейную оболочку этих функций, т. е. $H^i = span\{\varphi_y^i\},\ y \in \Omega_i$.

Рассматривая (4) на подпространстве $H^i \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, получим дискретную задачу: *найти* $\tilde{v}_i \in H^i$ *такую, что*

$$\mathcal{L}(\tilde{v}_i, v) = f(v)\ \forall\ v \in H^i. \tag{7}$$

Обозначим через M_i пространство размерности n_i, состоящее из векторов $\mathbf{w}$ с компонентами $w(x)$, $x \in \Omega_i$. Тогда задача (7) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений

$$L_i \mathbf{v}_i = \mathbf{f}_i, \tag{8}$$

где $\mathbf{v}_i \in M_i$ — вектор неизвестных с компонентами $v_i(y)$, $y \in \Omega_i$; $\mathbf{f}_i \in M_i$ — вектор правой части с компонентами $f_i(x) = f(\varphi_x^i)$, $x \in \Omega_i$; L_i — матрица размером $n_i \times n_i$ с элементами $L_i(x,y) = \mathcal{L}(\varphi_x^i, \varphi_y^i),\ x, y \in \Omega_i$.

Произвольному вектору $\mathbf{v} \in M_i$ поставим в соответствие восполнение в H^i:

$$\tilde{v}(x) = \sum_{y \in \Omega_i} v(y)\varphi_y^i(x), \quad x \in \Omega. \tag{9}$$

Из определения базисных функций следует, что

$$v(y) = \tilde{v}(y), \quad y \in \Omega_i. \tag{10}$$

Таким образом, мы определили изоморфизм между векторами $\mathbf{v} \in M_i$ и функциями $\tilde{v} \in H^i$.

Введем энергетическую норму для функций

$$|\!|\!| v |\!|\!|_{\Omega} = \mathcal{L}(v,v)^{1/2}, \quad v \in W_2^1(\Omega).$$

Для функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ она эквивалентна норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ [12]:

$$c_2\|v\|_{1,\Omega} \le \|\!|v|\!\|_\Omega \le c_3\|v\|_{1,\Omega}, \quad v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{11}$$

Введем также скалярное произведение и нормы для векторов:

$$(\mathbf{v},\mathbf{w})_i = \sum_{x\in\Omega_i} v(x)w(x), \quad \|\mathbf{v}\|_i = (\mathbf{v},\mathbf{v})_i^{1/2}, \quad \|\!|\mathbf{v}|\!\|_i = (\mathbf{v},L_i\mathbf{v})_i^{1/2}, \quad \mathbf{v},\mathbf{w}\in M_i.$$

На основании (9) и (10) для изоморфной пары $\mathbf{v}\in M_i$, $\tilde{v}\in H^i$ имеем

$$\|\!|\mathbf{v}|\!\|_i = \|\!|\tilde{v}|\!\|_\Omega. \tag{12}$$

Норма $|\tilde{v}|_{0,\Omega}$ эквивалентна норме $\|\mathbf{v}\|_i$ с множителем h_i [13]:

$$c_4h_i\|\mathbf{v}\|_i \le |\tilde{v}|_{0,\Omega} \le c_5h_i\|\mathbf{v}\|_i. \tag{13}$$

Подпространства H^i обладают свойством вложенности $H^{i-1}\subset H^i$, т. е. любая базисная функция $\varphi_x^{i-1}\in H^{i-1}$ является линейной комбинацией базисных функций $\varphi_y^i\in H^i$:

$$\varphi_x^{i-1} = \sum_{y\in\Omega_i}\beta_{xy}\varphi_y^i, \quad x\in\Omega_{i-1}. \tag{14}$$

Введем оператор интерполяции $I_{i-1}: M_{i-1}\to M_i$. Пусть $\mathbf{v}$ — произвольный вектор из M_{i-1}. Тогда компоненты вектора $\mathbf{w}=I_{i-1}\mathbf{v}\in M_i$ определяются по формуле

$$w(y) = \sum_{x\in\Omega_{i-1}} v(x)\beta_{xy}, \quad y\in\Omega_i, \tag{15}$$

с коэффициентами β_{xy} из (14). Отметим, что восполнения векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ совпадают, т. е. $\tilde{v}=\tilde{w}$. Таким образом, оператор I_{i-1} соответствует тождественному оператору на подпространстве H^{i-1}.

Введем также оператор проектирования $R_i : M_i \to M_{i-1}$. Для вектора $\mathbf{w}\in M_i$ компоненты вектора $\mathbf{v}=R_i\mathbf{w}\in M_{i-1}$ вычисляются по формуле

$$v(x) = \sum_{y\in\Omega_i}\beta_{xy}w(y), \quad x\in\Omega_{i-1}. \tag{16}$$

Из (15) и (16) следует, что $(R_i\mathbf{w},\mathbf{v})_{i-1} = (\mathbf{w},I_{i-1}\mathbf{v})_i$, $\mathbf{v}\in M_{i-1}$, $\mathbf{w}\in M_i$, т. е. $R_i = I_{i-1}^*$.

При условиях (3) задача (7) имеет единственное решение, которое удовлетворяет оценкам [12, 13]

$$\|\!|u-\tilde{v}_i|\!\|_\Omega \le c_6h_i|f|_{0,\Omega}, \tag{17}$$
$$|u-\tilde{v}_i|_{0,\Omega} \le c_7h_i^2|f|_{0,\Omega}. \tag{18}$$

3. Использование численного интегрирования

На практике, даже если функции a_{ij}, a и f имеют простые аналитические выражения, элементы матрицы L_i и вектора $\mathbf{f}_i$ в (8) редко вычисляются точно. Вместо этого они аппроксимируются с помощью численного интегрирования.

Мы начнем с построения дискретной задачи с учетом численного интегрирования на самой мелкой сетке. Используя (5) и (6), можем записать

$$L_l(x,y) = \mathcal{L}(\varphi_x^l, \varphi_y^l) = \sum_{\omega\in\mathcal{T}_l} \int_\omega \left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\partial_j\varphi_x^l \partial_i\varphi_y^l + a\varphi_x^l\varphi_y^l \right) dx, \tag{19}$$

$$f_l(x) = f(\varphi_x^l) = \sum_{\omega\in\mathcal{T}_l} \int_\omega f\varphi_x^l dx, \quad x,y\in\Omega_l. \tag{20}$$

Пусть ω — произвольный треугольник из $\mathcal{T}_l$. Квадратурная схема состоит в замене интеграла $\int_\omega g(x)dx$ конечной суммой вида $\sum_{m=1}^{M} \alpha_{m,\omega}\ g(b_{m,\omega})$, где $\alpha_{m,\omega}$ — веса, а точки $b_{m,\omega}$ — узлы квадратурной формулы. Будем использовать следующую квадратурную формулу:

$$\int_\omega g(x)dx \approx \frac{meas(\omega)}{3} \sum_{m=1}^{3} g(b_{m,\omega}), \tag{21}$$

где $meas(\omega)$ — площадь треугольника ω, а $b_{m,\omega},\ m = 1,2,3,$ — вершины ω. Формула (21) точна для многочленов степени ≤ 1.

Введем аппроксимирующую билинейную форму

$$\hat{\mathcal{L}}(u,v) = \sum_{\omega\in\mathcal{T}_l} \frac{meas(\omega)}{3} \sum_{m=1}^{3}\sum_{i,j=1}^{2} (a_{ij}\partial_j u\partial_i v + auv)(b_{m,\omega}) \tag{22}$$

и аппроксимирующий функционал

$$\hat{f}(v) = \sum_{\omega\in\mathcal{T}_l} \frac{meas(\omega)}{3} \sum_{m=1}^{3} (fv)(b_{m,\omega}). \tag{23}$$

Подставляя (21) в (19) и (20), получим вместо матрицы L_l матрицу $\hat{L}_l$ с элементами $\hat{L}_l(x,y) = \hat{\mathcal{L}}(\varphi_x^l, \varphi_y^l),\ x,y\in\Omega_l$, а вместо вектора правой части $\mathbf{f}_l$ вектор $\hat{\mathbf{f}}_l$ с компонентами $\hat{f}_l(x) = \hat{f}(\varphi_x^l),\ x\in\Omega_l$. В итоге мы получаем систему уравнений $\hat{L}_l\mathbf{w}_l = \hat{\mathbf{f}}_l$, которая эквивалентна следующей задаче: *найти $\tilde{w}_l \in H^l$ такую, что*

$$\hat{\mathcal{L}}(\tilde{w}_l, v) = \hat{f}(v)\ \forall\ v\in H^l,$$

где билинейная форма $\hat{\mathcal{L}}$ и функционал $\hat{f}$ соответственно заданы равенствами (22) и (23).

Перейдем к построению систем уравнений на более крупных сетках. Матрицы систем уравнений Бубнова—Галеркина на соседних сетках связаны соотношением [13] $L_{i-1} = R_iL_iI_{i-1}$, что позволяет по матрице L_l, соответствующей самой мелкой сетке, строить матрицы L_i, $i<l$, с помощью простых операций суммирования строк и столбцов. Мы потребуем, чтобы аналогичное свойство выполнялось для матриц $\hat{L}_i$. Предположим, что на сетке Ω_i мы имеем систему уравнений

$$\hat{L}_i\mathbf{w}_i = \hat{\mathbf{f}}_i, \tag{24}$$

где $\hat{L}_i$ — матрица размером $n_i \times n_i$ с элементами $\hat{L}_i(x,y) = \hat{\mathcal{L}}(\varphi_x^i, \varphi_y^i)$, $x, y \in \Omega_i$, а $\hat{\mathbf{f}}_i \in M_i$ — вектор с компонентами $\hat{f}_i(x) = \hat{f}(\varphi_x^i)$, $x \in \Omega_i$. Положим

$$\hat{L}_{i-1} = R_i \hat{L}_i I_{i-1}, \tag{25}$$

$$\hat{\mathbf{f}}_{i-1} = R_i \hat{\mathbf{f}}_i. \tag{26}$$

Систему уравнений на сетке Ω_{i-1} определим следующим образом:

$$\hat{L}_{i-1}\mathbf{w}_{i-1} = \hat{\mathbf{f}}_{i-1}. \tag{27}$$

Используя равенство (26), определение оператора проектирования (16), линейность $\hat{f}$ и соотношение (14), для компонент вектора правой части (27) получим

$$\hat{f}_{i-1}(x) = \hat{f}(\varphi_x^{i-1}), \quad x \in \Omega_{i-1}. \tag{28}$$

Используя (14), (22), определения операторов интерполяции и проектирования, равенство (25) и учитывая вид элементов матрицы $\hat{L}_i$, получим, что элементы матрицы $\hat{L}_{i-1}$ определяются соотношением

$$\hat{L}_{i-1}(x,y) = \hat{\mathcal{L}}(\varphi_x^{i-1}, \varphi_y^{i-1}), \quad x, y \in \Omega_{i-1}. \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует, что для любого $i = 0, \ldots, l$ система уравнений (24) эквивалентна следующей задаче: *найти $\tilde{w}_i$ такую, что*

$$\hat{\mathcal{L}}(\tilde{w}_i, v) = \hat{f}(v) \ \forall \ v \in H^i, \tag{30}$$

где билинейная форма $\hat{\mathcal{L}}$ и функционал $\tilde{f}$ соответственно заданы соотношениями (22) и (23).

Отметим, что задача (30) может быть получена из (7) с использованием составной квадратурной формулы:

$$\int\limits_{\omega_i} g(x)dx \approx \sum_{\substack{\omega_l \in \mathcal{T}_l \\ \omega_l \subset \omega_i}} \frac{meas(\omega_l)}{3} \sum_{m=1}^{3} g(b_{m,\omega_l}), \tag{31}$$

где ω_i — произвольный треугольник триангуляции $\mathcal{T}_i$. Очевидно, что квадратурная схема (31) точна для многочленов степени ≤ 1.

Так как квадратурные формулы (21) и (31) точны для многочленов степени 0, то решение задачи (30) удовлетворяет оценке [12]

$$\|u - \tilde{w}_i\|_{1,\Omega} \leq c_8 h_i. \tag{32}$$

Кроме того, поскольку квадратурные формулы (21) и (31) точны и для многочленов степени 1, имеет место оценка в норме L_2 [12]

$$|u - \tilde{w}_i|_{0,\Omega} \leq c_9 h_i^2. \tag{33}$$

В квадратурной формуле (21) все веса строго положительны, и она точна для многочленов степени 0. Поэтому существуют константы c_{10} и c_{11}, не зависящие от h_l, такие, что [14]

$$\hat{\mathcal{L}}(v,v) \geq c_{10}\|v\|_{1,\Omega}^2, \tag{34}$$

$$\hat{\mathcal{L}}(v,w) \leq c_{11}\|v\|_{1,\Omega}\ \|w\|_{1,\Omega}, \quad v, w \in H^l. \tag{35}$$

В силу вложенности подпространств H^i оценки (34) и (35) справедливы для любых $v, w \in H^i$.

Введем норму для функций из H^i:

$$[\![v]\!]_\Omega = \hat{\mathcal{L}}(v,v)^{1/2}, \quad v \in H^i.$$

На основании (34) и (35) она эквивалентна норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$:

$$c_{12}\|v\|_{1,\Omega} \le [\![v]\!]_\Omega \le c_{13}\|v\|_{1,\Omega}, \quad v \in H^i. \tag{36}$$

Отсюда с учетом (11) следует, что

$$c_{14}|\!|\!|v|\!|\!|_\Omega \le [\![v]\!]_\Omega \le c_{15}|\!|\!|v|\!|\!|_\Omega, \quad v \in H^i, \tag{37}$$

т. е. для функций из H^i нормы $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_\Omega$ и $[\![\cdot]\!]_\Omega$ эквивалентны.

На основании (31) матрица $\hat{L}_i$ положительно определена, поэтому мы можем ввести норму для векторов

$$[\![\mathbf{v}]\!]_i = (\mathbf{v}, \hat{L}_i\mathbf{v})_i^{1/2}, \ \mathbf{v} \in M_i.$$

Используя (9) и (10), легко показать, что для изоморфной пары $\mathbf{v} \in M_i$, $\tilde{v} \in H^i$

$$[\![\mathbf{v}]\!]_i = [\![\tilde{v}]\!]_\Omega. \tag{38}$$

Из (37), (12) и (38) следует эквивалентность норм $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_i$ и $[\![\cdot]\!]_i$, т. е.

$$c_{14}|\!|\!|\mathbf{v}|\!|\!|_i \le [\![\mathbf{v}]\!]_i \le c_{15}|\!|\!|\mathbf{v}|\!|\!|_i, \quad \mathbf{v} \in M_i. \tag{39}$$

Нам потребуется оценка собственных чисел матрицы $\hat{L}_i$.

Лемма 1. *Собственные числа матрицы $\hat{L}_i$ удовлетворяют неравенству*

$$0 < \hat{\lambda}_i \le c_{16}, \quad i = 0, \ldots, l. \tag{40}$$

Доказательство. Для собственных чисел матрицы L_i мы имеем оценку [13]

$$0 < \lambda_i \le c_{17}, \quad i = 0, \ldots, l. \tag{41}$$

Обозначим через λ_i^* и $\hat{\lambda}_i^*$ максимальные собственные числа матриц L_i и $\hat{L}_i$ соответственно. На основании соотношения Рэлея и оценок (39) и (41) можем записать неравенства

$$\hat{\lambda}_i^* = \sup_{\substack{\mathbf{v}\in M_i,\\ \mathbf{v}\neq 0}} \frac{(\mathbf{v}, \hat{L}_i\mathbf{v})_i}{(\mathbf{v},\mathbf{v})_i} = \sup_{\substack{\mathbf{v}\in M_i,\\ \mathbf{v}\neq 0}} \frac{[\![\mathbf{v}]\!]_i^2}{(\mathbf{v},\mathbf{v})_i} \le$$

$$\le \sup_{\substack{\mathbf{v}\in M_i,\\ \mathbf{v}\neq 0}} \frac{c_{15}^2|\!|\!|\mathbf{v}|\!|\!|_i^2}{(\mathbf{v},\mathbf{v})_i} = c_{15}^2 \sup_{\substack{\mathbf{v}\in M_i,\\ \mathbf{v}\neq 0}} \frac{(\mathbf{v}, L_i\mathbf{v})_i}{(\mathbf{v},\mathbf{v})} = c_{15}^2\lambda_i^* \le c_{15}^2 c_{17},$$

т. е. верхняя оценка в (40) справедлива с константой $c_{16} = c_{15}^2 c_{17}$. Нижняя оценка следует из положительной определенности матрицы $\hat{L}_i$. □

Итак, на последовательности сеток Ω_i мы получили последовательность задач: *для заданного $\hat{\mathbf{f}}_i \in M_i$ найти вектор $\mathbf{w}_i \in M_i$ такой, что*

$$\hat{L}_i\mathbf{w}_i = \hat{\mathbf{f}}_i. \tag{42}$$

Наша цель состоит в решении задачи (42) при $i = l$. Для этого мы используем два варианта многосеточных методов (каскадный алгоритм и многосеточный алгоритм с использованием несимметричного W-цикла) и докажем их сходимость.

4. Формулировка каскадного алгоритма

Каскадный алгоритм состоит в последовательном решении задач (42). При $i = 0$ число уравнений в (42) невелико и задача решается прямым методом. На более мелких сетках приближенные решения получают итерационным методом. Сформулируем каскадный алгоритм с некоторым абстрактным итерационным процессом S_i (сглаживателем).

Каскадный алгоритм:

$$\begin{aligned}
&1)\quad \mathbf{u}_0 = \hat{L}_0^{-1}\hat{\mathbf{f}}_0;\\
&2)\quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, l \text{ цикл } \{\\
&\qquad 2.1.\ \mathbf{z}_i = I_{i-1}\mathbf{u}_{i-1};\\
&\qquad 2.2.\ \text{полагаем } \mathbf{u}_i = S_i(\hat{L}_i,\ \mathbf{z}_i,\ \hat{\mathbf{f}}_i); \}.
\end{aligned} \tag{43}$$

В качестве сглаживателя рассмотрим два итерационных процесса.

Метод сопряженных градиентов (m_i итераций); процедура $S_i(\hat{L}_i, \mathbf{z}_i, \hat{\mathbf{f}}_i)$:

$$\begin{aligned}
&3)\quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{z}_i;\ \mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0 = \hat{\mathbf{f}}_i - \hat{L}_i\mathbf{y}_0;\ \sigma_0 = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)_i;\\
&4)\quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, m_i \text{ цикл } \{\\
&\qquad \text{если } \sigma_{k-1} = 0, \text{ то } \mathbf{y}_{m_i} = \mathbf{y}_{k-1} \text{ и перейти на } 5;\\
&\qquad \alpha_{k-1} = \sigma_{k-1}/(\mathbf{p}_{k-1}, L_i\mathbf{p}_{k-1})_i;\\
&\qquad \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k-1} + \alpha_{k-1}\mathbf{p}_{k-1};\\
&\qquad \mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \alpha_{k-1}\hat{L}_i\mathbf{p}_{k-1};\\
&\qquad \sigma_k = (\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k)_i;\ \beta_k = \sigma_k/\sigma_{k-1};\\
&\qquad \mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k + \beta_k\mathbf{p}_{k-1}; \};\\
&5)\quad \text{полагаем } S_i = \mathbf{y}_m.
\end{aligned} \tag{44}$$

Метод простых итераций (m_i итераций); процедура $S_i(\hat{L}_i, \mathbf{z}_i, \hat{\mathbf{f}}_i)$:

$$\begin{aligned}
&3)\quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{z}_i;\\
&4)\quad \text{для } k = 1, 2, \ldots, m_i \text{ цикл } \{\\
&\qquad \tau_{k-1} = (\Lambda_i^*)^{-1}\ \cos^{-2}\frac{\pi(2k+1)}{2(2m_i+1)};\\
&\qquad \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k-1} - \tau_{k-1}(\hat{L}_i\mathbf{y}_{k-1} - \hat{\mathbf{f}}_i)_i\ \};\\
&5)\quad \text{полагаем } S_i = \mathbf{y}_{m_i}.
\end{aligned} \tag{45}$$

Здесь Λ_i^* — верхняя оценка собственных чисел $\hat{\lambda}$ оператора $\hat{L}_i$ в пространстве M_i, т. е. $\hat{L}_i\boldsymbol{\varphi} = \hat{\lambda}\boldsymbol{\varphi}$. В (45) она нужна в явной форме, поэтому она находится из леммы Гершгорина [15] и удовлетворяет неравенству

$$\hat{\lambda}_i^* = \max_{\hat{\lambda}\in S_p(\hat{L}_i)} \hat{\lambda} \le \Lambda_i^* \le c_{18} \max_{\hat{\lambda}\in S_p(\hat{L}_i)} \hat{\lambda} = c_{18}\hat{\lambda}_i^*. \tag{46}$$

В (44) в явном виде она не используется, поэтому в теоретических выкладках ее можно положить равной $\hat{\lambda}_i^*$, т. е. (46) тогда выполняется с константой $c_{18} = 1$.

Зафиксируем целое $i \in [1, l]$ и определим линейный оператор $B_i : M_i \to M_i$, ставящий в соответствие погрешности начального приближения $\boldsymbol{\delta}_0 = \mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i$ для решения задачи (42) погрешность конечной аппроксимации $\boldsymbol{\delta}_1 = \mathbf{w}_i - \mathbf{u}_i$, полученной на i-м уровне каскадного алгоритма (43) с помощью метода сопряженных градиентов (44), т. е. $\boldsymbol{\delta}_1 = B_i\boldsymbol{\delta}_0$.

Введем норму для оператора $B : M_i \to M_i$:

$$[\![B]\!]_i = \sup_{\substack{\mathbf{v}\in M_i,\\ \mathbf{v}\neq 0}} \frac{[\![B\mathbf{v}]\!]_i}{[\![\mathbf{v}]\!]_i}.$$

Оператор B_i является матричным полиномом от $\hat{L}_i$, т. е.

$$B_i = I + \sum_{k=1}^{m_i} \gamma_k \hat{L}_i^k. \tag{47}$$

Он обладает следующим важным свойством [16]. При фиксированном начальном приближении $\mathbf{y}_0$ (и при фиксированной погрешности начального приближения $\boldsymbol{\delta}_0$) метод сопряженных градиентов минимизирует норму погрешности $[\![\boldsymbol{\delta}_1]\!]_i$ для конечного приближения $\mathbf{y}_{m_i}$ среди всех многочленов вида (47) с произвольными коэффициентами γ_k.

Аналогично определим оператор $Q_i : M_i \to M_i$ для метода простых итераций (45), т. е. $\boldsymbol{\delta}_1 = Q_i\boldsymbol{\delta}_0$. Оператор Q_i является матричным полиномом и имеет вид

$$Q_i = \prod_{k=0}^{m_i-1} (I - \tau_k \hat{L}_i). \tag{48}$$

Для него выполняются следующие оценки [3]:

$$[\![Q_i\mathbf{w}]\!]_i \le \frac{\sqrt{\hat{\lambda}_i^*}}{2m_i+1}\|\mathbf{w}\|_i, \tag{49}$$

$$[\![Q_i\mathbf{w}]\!]_i \le [\![\mathbf{w}]\!]_i \quad \forall\ \mathbf{w}\in M_i. \tag{50}$$

5. Сходимость каскадного алгоритма

Теорема 1. *Пусть оператор* $\hat{L}_i$ *задачи* (42) *является самосопряженным, положительно определенным и удовлетворяет условию* (25)*. Тогда для приближенного решения* $\mathbf{u}_i$*, полученного на* i*-м уровне каскадного алгоритма* (43) *с одним из итерационных процессов* (44) *или* (45)*, справедлива оценка*

$$[\![\mathbf{w}_i - \mathbf{u}_i]\!]_i \le c_{19}\sum_{j=1}^{i} \frac{h_{j-1}}{2m_j+1}. \tag{51}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{e}_i$ погрешность на i-м уровне каскадного алгоритма, т. е.

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{w}_i - \mathbf{u}_i, \quad i = 0, 1, \ldots, l.$$

Для метода сопряженных градиентов (44) имеем $\mathbf{e}_i = B_i(\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i)$, а для метода простых итераций (45) — $\mathbf{e}_i = Q_i(\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i)$. Оператор Q_i имеет вид (47), поэтому на основании приведенного выше свойства оператора B_i получаем

$$[\![\mathbf{e}_i]\!]_i \le [\![Q_i(\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i)]\!]_i.$$

На основании (43) можем записать

$$[\![\mathbf{e}_i]\!]_i \le [\![Q_i(\mathbf{w}_i - I_{i-1}\mathbf{w}_{i-1})]\!]_i + [\![Q_i I_{i-1}(\mathbf{w}_{i-1} - \mathbf{u}_{i-1})]\!]_i = \\ = [\![Q_i(\mathbf{w}_i - I_{i-1}\mathbf{w}_{i-1})]\!]_i + [\![Q_i I_{i-1}\mathbf{e}_{i-1}]\!]_i. \qquad (52)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (52). Для этого воспользуемся (49), (13), (40) и (33):

$$[\![Q_i(\mathbf{w}_i - I_{i-1}\mathbf{w}_{i-1})]\!]_i \le \frac{\sqrt{\hat\lambda_i^*}}{2m_i+1}\|\mathbf{w}_i - I_{i-1}\mathbf{w}_{i-1}\|_i \le c_4^{-1}\frac{\sqrt{\hat\lambda_i^*}}{2m_i+1}h_i^{-1}|\tilde w_i - \tilde w_{i-1}|_{0,\Omega} \le$$

$$\le c_4^{-1}\frac{\sqrt{\hat\lambda_i^*}}{2m_i+1}h_i^{-1}(|\tilde w_i - u|_{0,\Omega} + |u - \tilde w_{i-1}|_{0,\Omega}) \le \frac{c_4^{-1}c_9c_{14}^{1/2}}{2m_i+1}h_i^{-1}(h_i^2 + h_{i-1}^2).$$

Из построения сеток следует, что $h_i = h_{i-1}/2$. Поэтому

$$[\![Q_i(\mathbf{w}_i - I_{i-1}\mathbf{w}_{i-1})]\!]_i \le \frac{5}{2}\frac{c_4^{-1}c_9c_{14}^{1/2}}{2m_i+1}h_{i-1}. \qquad (53)$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (52) используем (50):

$$[\![Q_i I_{i-1}\mathbf{e}_{i-1}]\!]_i \le [\![I_{i-1}\mathbf{e}_{i-1}]\!]_i = (\hat L_i I_{i-1}\mathbf{e}_{i-1}, I_{i-1}\mathbf{e}_{i-1})_i^{1/2} = \\ = (R_i\hat L_i\bar L_{i-1}\mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i-1})_{i-1}^{1/2} = (\hat L_{i-1}\mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i-1})_{i-1}^{1/2} = [\![\mathbf{e}_{i-1}]\!]_{i-1}.$$

Объединим эту оценку с (52) и (53):

$$[\![\mathbf{e}_i]\!]_i \le \frac{5}{2}\frac{c_4^{-1}c_9c_{14}^{1/2}}{2m_i+1}h_{i-1} + [\![\mathbf{e}_{i-1}]\!]_{i-1}. \qquad (54)$$

Далее для доказательства используем индукцию по i. При $i=0$ имеем $[\![\mathbf{e}_0]\!]_1 = 0$. Из (54) при $i=1$ следует, что

$$[\![\mathbf{e}_1]\!]_i \le \frac{5}{2}\frac{c_4^{-1}c_9c_{14}^{1/2}}{2m_1+1}h_0,$$

т. е. (51) справедливо при $i=1$ с константой $c_{19} = \dfrac{5}{2}c_4^{-1}c_9c_{14}^{1/2}$. Предположим, что (51) справедливо на уровне $i-1$:

$$[\![\mathbf{e}_{i-1}]\!]_{i-1} \le c_{19}\sum_{j=1}^{i-1}\frac{h_{j-1}}{2m_j-1}.$$

Объединяя это неравенство с (54), получаем, что оценка (51) выполняется с константой

$$c_{19} = \frac{5}{2}c_4^{-1}c_9c_{14}^{1/2}.$$

□

Путем простого анализа последовательности вычислений с учетом разреженности матриц $\hat L_i$ устанавливается верхняя оценка числа арифметических операций в каскадном алгоритме:

$$S_l \le c_{20}\sum_{j=1}^{l}(m_j + c_{21})n_j \qquad (55)$$

с константами c_{20}, c_{21}, не зависящими от n_j и m_j, но разными для итерационных процессов (44) и (45). Ясно, что для последнего процесса эти константы существенно меньше.

Число итераций $m_1, \ldots, m_{l-1}$ выберем так, чтобы минимизировать S_l как функцию от $m_1, \ldots, m_{l-1}$ при фиксированной величине правой части (51) при $i = l$ [3]. В результате m_i выбирается как наименьшее целое, удовлетворяющее неравенству

$$2m_i + 1 \geq (2m_l + 1) \left(\frac{n_l h_{i-1}}{n_i h_{l-1}} \right)^{1/2}. \tag{56}$$

Теорема 2. *Погрешность каскадного алгоритма* (43) *с* m_i *итерациями метода сопряженных градиентов* (44) *или метода простых итераций* (45), *где* m_i *выбирается из условия* (56) *при фиксированном* m_l, *оценивается как*

$$|\!|\!| \mathbf{u}_l - \mathbf{w}_l |\!|\!|_l \leq c_{22} \frac{h_l}{2m_l + 1}. \tag{57}$$

Для восполнения $\tilde{u}_l \in H^l$ *вектора* $\mathbf{u}_l$ *справедлива оценка*

$$\|\tilde{u}_l - u\|_\Omega \leq \left(c_3 c_8 + \frac{c_{22}}{2m_l + 1} \right) h_l. \tag{58}$$

Число арифметических операций оценивается сверху величиной

$$S_l \leq (c_{23} m_l + c_{24}) n_l. \tag{59}$$

Доказательство. Для задачи Дирихле имеем оценку

$$n_i \leq 4^{i-l} n_l. \tag{60}$$

Из построения сеток следует равенство

$$h_i = 2^{l-i} h_l. \tag{61}$$

С учетом этим соотношений можно переписать (56) в виде

$$2m_i + 1 \geq (2m_l + 1) 2^{3(l-i)/2}. \tag{62}$$

Используя это неравенство вместе с (61) в (51) при $i = l$ и оценивая сумму геометрической прогрессии, получим

$$[\![\mathbf{w}_l - \mathbf{u}_l]\!]_l \leq c_{19} \sum_{j=1}^{l} \frac{h_{j-1}}{2m_l + 1} 2^{3(j-l)/2} = 2c_{19} \frac{h_l}{2m_l + 1} \sum_{j=1}^{l} 2^{(j-l)/2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} c_{19} \frac{h_l}{2m_l + 1}.$$

Привлекая эквивалентность норм (39), мы приходим к оценке (57) с константой

$$c_{22} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} c_{14}^{-1} c_{19}.$$

На основании неравенства треугольника, эквивалентности норм (12) и (11) и оценки (32) мы получаем цепочку неравенств

$$\|\tilde{u}_l - u\|_\Omega \leq \|\tilde{u}_l - \tilde{w}_l\|_\Omega + \|\tilde{w}_l - u\|_\Omega \leq |\!|\!| \mathbf{u}_l - \mathbf{w}_l |\!|\!|_l + c_3 \|\tilde{w}_l - u\|_{1,\Omega} \leq |\!|\!| \mathbf{u}_l - \mathbf{w}_l |\!|\!|_l + c_3 c_8 h_l.$$

Вместе с уже доказанной оценкой (57) это приводит к (58).

Для оценки числа арифметических операций напомним, что m_i выбирается как наименьшее целое, удовлетворяющее (62). Поэтому

$$m_i \le \frac{1}{2}(2m_l+1)2^{3(l-i)/2} + \frac{1}{2}.$$

Используя это неравенство и соотношение (60) и оценивая сумму геометрической прогрессии, из (55) получим

$$S_l \le c_{20} \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{1}{2}(2m_l+1)2^{3(l-j)/2} + \frac{1}{2} + c_{21} \right) 4^{j-l} n_l =$$
$$= c_{20} \left(\frac{1}{2}(2m_l+1) \right) \sum_{j=1}^{l} 2^{(j-l)/2} + \left(\frac{1}{2} + c_{21} \right) \sum_{j=1}^{l} 4^{j-l} \Big) n_l \le$$
$$\le \left(c_{20} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} m_l + c_{20} \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{4}{3}\left(c_{21} + \frac{1}{2} \right) \right) n_l,$$

т. е. справедлива оценка (59) с константами

$$c_{23} = c_{20} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \text{ и } c_{24} = c_{20} \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{4}{3}\left(c_{21} + \frac{1}{2} \right).$$

□

Из оценки (58) вытекает, что число итераций на самом верхнем уровне следует выбирать из условия $c_3 c_8 \approx c_{22}/(2m_l+1)$. Тогда погрешность итерационного процесса приобретает такой же порядок малости, как и погрешность дискретной задачи с учетом численного интегрирования. Хотя константы c_3, c_8 и c_{22} неизвестны, видна независимость m_l от числа уровней и количества неизвестных.

6. Формулировка многосеточного алгоритма с использованием несимметричного W-цикла

Начнем с формулировки алгоритма несимметричного W-цикла для решения задачи (42) (MG_i-алгоритма). Предположим, что мы имеем некоторое начальное приближение $\mathbf{z}_i^0 \in M_i$ решения задачи (42). В результате получим приближенное решение $\mathbf{z}_i^1 = MG_i(\mathbf{z}_i^0, \hat{\mathbf{f}}_i)$.

Алгоритм MG_i

Если $i = 0$, то полагаем

$$\mathbf{z}_0^1 = MG_0(\mathbf{z}_i^0, \hat{\mathbf{f}}_0) = \hat{L}_0^{-1} \hat{\mathbf{f}}_0$$

и алгоритм MG_i завершен.

Если $i > 0$, то алгоритм состоит из нескольких шагов.

1. Положим $\mathbf{u}_0^* = \mathbf{z}_i^0$ и вычислим

$$\mathbf{u}_k^* = \mathbf{u}_{k-1}^* - \tau_{k-1}(\hat{L}_i \mathbf{u}_{k-1}^* - \hat{\mathbf{f}}_i), \quad k = 1, \dots, m,$$

где

$$\tau_{k-1} = \frac{1+\cos\alpha}{\Lambda_i^*(\cos\alpha - \cos(2k+1)\alpha)}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2m+2}. \tag{63}$$

2. Положим $\mathbf{g}_{i-1} = R_i(\hat{L}_i \mathbf{u}_m^* - \hat{\mathbf{f}}_i)$, где $R_i : M_i \to M_{i-1}$ — оператор проектирования.
3. Возьмем $\mathbf{z}_0^* = 0 \in M_{i-1}$ и повторим алгоритм MG_{i-1} 2 раза:

$$\mathbf{z}_S^* = MG_{i-1}(\mathbf{z}_{s-1}^*, \mathbf{g}_{i-1}), \quad s = 1, 2.$$

4. Положим

$$\mathbf{z}_i^1 = MG_i(\mathbf{z}_i^0, \hat{\mathbf{f}}_i) = \mathbf{u}_m^* - I_{i-1}\mathbf{z}_2^*.$$

Теперь сформулируем полный многосеточный алгоритм для решения последовательности задач (42).

Алгоритм *FMG*

1) $\mathbf{u}_0 = \hat{L}_0^{-1}\hat{\mathbf{f}}_0$;
2) для $i = 1, 2, \ldots, l$ цикл {
   2.1. $\mathbf{u}_i = I_{i-1}\mathbf{u}_{i-1}$;
   2.2. повторить алгоритм MG_i t раз :
   $\mathbf{u}_i := MG_i(\mathbf{u}_i, \hat{\mathbf{f}}_i)$.

В результате мы получим $\mathbf{u}_l$ — приближенное решение задачи (42) при $i = l$.

Рассмотрим матричный полином (48), где параметры τ_k заданы соотношениями (63). Для него выполняется оценка [13]

$$\|\hat{L}_i Q_i\|_i \le \hat{\lambda}_i^* \frac{\operatorname{tg}\alpha/2}{m+1}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2m+2}. \tag{64}$$

7. Сходимость алгоритма *FMG*

Лемма 2. *Существует константа* c_{25} *такая, что имеет место оценка*

$$\|\hat{L}_i^{-1} - I_{i-1}\hat{L}_{i-1}^{-1}R_i\|_i \le \frac{c_{25}}{\hat{\lambda}_i^*}. \tag{65}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{g}_i \in M_i$ — произвольный вектор. Рассмотрим систему уравнений

$$L_i \mathbf{v}_i = \mathbf{g}_i. \tag{66}$$

Любому вектору $\mathbf{g}_i \in M_i$ соответствует функция $g \in H^i$ такая, что (66) является системой Бубнова—Галеркина для задачи [13]:

$$\mathcal{L}(v, w) = (g, w)_\Omega \ \forall\ w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

т. е. система (66) эквивалентна задаче

$$\mathcal{L}(\tilde{v}_i, w) = (g, w)_\Omega \ \forall\ w \in H^i.$$

При этом выполняется оценка (18), т. е.

$$|v - \tilde{v}_i|_{0,\Omega} \le c_7 h_i^2 |g|_{0,\Omega}. \tag{67}$$

Рассмотрим также систему уравнений

$$\hat{L}_i \mathbf{w}_i^* = \mathbf{g}_i,$$

которая эквивалентна задаче

$$\hat{\mathcal{L}}(\tilde{w}_i^*, w) = (g, w)_\Omega \ \forall\ w \in H^i.$$

Очевидно, что для $\tilde{w}_i^*$ справедлива оценка вида (33), т. е.

$$|v - \tilde{w}_i^*|_{0,\Omega} \le c_9 h_i^2. \tag{68}$$

С помощью неравенства треугольника и оценок (67) и (68) получаем, что

$$|\tilde{v}_i - \tilde{w}_i^*|_{0,\Omega} \le |\tilde{v}_i - v|_{0,\Omega} + |v - \tilde{w}_i^*|_{0,\Omega} \le (c_7|g|_{0,\Omega} + c_9)h_i^2 \le c_{26}h_i^2.$$

С учетом эквивалентности норм (13) для изоморфных векторов получим оценку

$$\|\mathbf{v}_i - \mathbf{w}_i^*\|_i \le c_4^{-1} c_{26} h_i. \tag{69}$$

Используя неравенство треугольника, можем записать неравенство

$$\begin{aligned} \|\hat{L}_i^{-1} - I_{i-1}\hat{L}_{i-1}^{-1}R_i\|_i \le \|\hat{L}_i^{-1} - L_i^{-1}\|_i + \\ + \|L_i^{-1} - I_{i-1}L_{i-1}^{-1}R_i\|_i + \|I_{i-1}(L_{i-1}^{-1} - \hat{L}_{i-1}^{-1})R_i\|_i. \end{aligned} \tag{70}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (70). На основании определения матричной нормы имеем

$$\|\hat{L}_i^{-1} - L_i^{-1}\|_i = \sup_{\substack{\mathbf{g}_i \in M_i,\\ \mathbf{g}_i \ne 0}} = \frac{\|(\hat{L}_i^{-1} - L_i^{-1})\mathbf{g}_i\|_i}{\|\mathbf{g}_i\|_i}.$$

Пусть $\bar{\mathbf{g}}_i \in M_i$ — вектор, на котором достигается супремум в правой части последнего равенства. Ему соответствуют векторы $\bar{\mathbf{v}}_i$ и $\bar{\mathbf{w}}_i^*$, являющиеся решениями систем уравнений $L_i\bar{\mathbf{v}}_i = \bar{\mathbf{g}}_i$ и $\hat{L}_i\bar{\mathbf{w}}_i^* = \bar{\mathbf{g}}_i$ соответственно. Тогда, используя оценку (69), получим неравенства

$$\|\hat{L}_i^{-1} - L_i^{-1}\|_i = \frac{\|(\hat{L}_i^{-1} - L_i^{-1})\bar{\mathbf{g}}_i\|_i}{\|\bar{\mathbf{g}}_i\|_i} = \frac{\|\bar{\mathbf{v}}_i - \bar{\mathbf{w}}_i^*\|_i}{\|\bar{\mathbf{g}}_i\|_i} \le \frac{c_4^{-1}c_{26}h_i}{\|\bar{\mathbf{g}}_i\|_i}.$$

Отсюда следует, что при фиксированном $\bar{\mathbf{g}}_i$ существует константа c_{27} такая, что

$$\|\hat{L}_i^{-1} - L_i^{-1}\|_i \le c_{27}. \tag{71}$$

Наконец, с помощью (40) получим, что

$$\|\hat{L}_i^{-1} - L_i^{-1}\|_i \le \frac{c_{16}c_{27}}{\hat{\lambda}_i^*}. \tag{72}$$

Для второго слагаемого в правой части (70) имеем оценку [13]

$$\|L_i^{-1} - I_{i-1}L_{i-1}^{-1}R_i\|_i \le \frac{c_{28}}{\lambda_i^*}.$$

При доказательстве леммы 1 мы, в частности, получили оценку $\hat{\lambda}_i^* \le c_{15}^2 \lambda_i^*$. Используя ее, можем записать:

$$\|L_i^{-1} - I_{i-1} L_{i-1}^{-1} R_i\|_i \le \frac{c_{15}^2 c_{28}}{\hat{\lambda}_i^*}. \tag{73}$$

Нам осталось оценить третье слагаемое в правой части (70). Пусть $\mathbf{v} \in M_{i-1}$ — произвольный вектор. На основании эквивалентности норм (13) можем получить неравенство

$$\frac{\|I_{i-1}\mathbf{v}\|_i}{\|\mathbf{v}\|_{i-1}} \le 2c_4^{-1} c_5. \tag{74}$$

Норма оператора интерполяции определяется соотношением

$$\|I_{i-1}\|_{M_i \leftarrow M_{i-1}} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in M_{i-1}, \\ \mathbf{v} \ne 0}} \frac{\|I_{i-1}\mathbf{v}\|_i}{\|\mathbf{v}\|_{i-1}}.$$

С учетом (74) получаем оценку

$$\|I_{i-1}\|_{M_i \leftarrow M_{i-1}} \le 2c_4^{-1} c_5. \tag{75}$$

Из определения оператора проектирования следует равенство

$$(I_{i-1}\mathbf{v}, \mathbf{w})_i = (\mathbf{v}, R_i \mathbf{w})_{i-1} \forall\ \mathbf{v} \in M_{i-1}, \quad \mathbf{w} \in M_i. \tag{76}$$

Положим $\mathbf{v} = R_i \mathbf{w}$. Тогда с помощью неравенства Коши и оценки (75) для левой части (76) получим оценку

$$|(I_{i-1}\mathbf{v}, \mathbf{w})_i| \le \|I_{i-1}\mathbf{v}\|_i\ \|\mathbf{w}\|_i \le \|I_{i-1}\|_{M_i \leftarrow M_{i-1}} \|\mathbf{v}\|_{i-1} \|\mathbf{w}\|_i \le 2c_4^{-1} c_5 \|R_i \mathbf{w}\|_{i-1} \|\mathbf{w}\|_i. \tag{77}$$

В результате из (76), (77) имеем

$$\frac{\|R_i \mathbf{w}\|_{i-1}}{\|\mathbf{w}\|_i} \le 2c_4^{-1} c_5. \tag{78}$$

На основании определения нормы оператора проектирования

$$\|R_i\|_{M_{i-1} \leftarrow M_i} = \sup_{\substack{\mathbf{w} \in M_i, \\ \mathbf{w} \ne 0}} \frac{\|R_i \mathbf{w}\|_{i-1}}{\|\mathbf{w}\|_i}$$

из (78) в силу произвольности $\mathbf{w}$ следует оценка

$$\|R_i\|_{M_{i-1} \leftarrow M_i} \le 2c_4^{-1} c_5. \tag{79}$$

Используя оценку (71), которая справедлива для любого i, и оценку (40), получим

$$\|\hat{L}_{i-1}^{-1} - L_{i-1}^{-1}\|_{i-1} \le \frac{c_{16} c_{27}}{\hat{\lambda}_i^*}. \tag{80}$$

В результате с помощью (75), (79) и (80) получаем оценку

$$\|I_{i-1}(\hat{L}_{i-1}^{-1} - L_{i-1}^{-1}) R_i\|_i \le \|I_{i-1}\|_{M_i \leftarrow M_{i-1}} \|\hat{L}_{i-1}^{-1} - L_{i-1}^{-1}\|_{i-1} \|R_i\|_{M_{i-1} \leftarrow M_i} \le \frac{4c_4^{-2} c_5^2 c_{16} c_{27}}{\hat{\lambda}_i^*}. \tag{81}$$

Наконец, привлекая (72), (73) и (81) в (70), мы приходим к оценке (65) с константой

$$c_{25} = c_{16}c_{27} + c_{15}^2 c_{28} + 4c_4^{-2} c_5^2 c_{16} c_{27}.$$

□

Объединяя (64) и (65), получим, что выполняется критерий сходимости

$$\|\hat{L}_i^{-1} - I_{i-1}\hat{L}_{i-1}^{-1}R_i\|_i \|\hat{L}_i Q_i\|_i \leq \eta(m), \tag{82}$$

где

$$\eta(m) = \frac{c_{25}\operatorname{tg}\alpha/2}{m+1} \approx \frac{c_{25}\pi}{4(m+1)^2}. \tag{83}$$

Зафиксируем целое $i \in [1, l]$ и определим линейный оператор $B_i : M_i \to M_i$, ставящий в соответствие погрешности начального приближения $\boldsymbol{\delta}_0 = \mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i^0$ для решения задачи (42) погрешность конечной аппроксимации $\boldsymbol{\delta}_1 = \mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i^1$, полученной алгоритмом MG_i, т. е. $\boldsymbol{\delta}_1 = B_i\boldsymbol{\delta}_0$.

Теперь мы можем сформулировать результат, характеризующий сходимость алгоритма MG_i [13].

Теорема 3. *Пусть операторы $\hat{L}_i$ являются самосопряженными и положительно определенными. Пусть также выполняется критерий сходимости* (82), *где функция $\eta(m)$ не зависит от i и стремится к нулю при $m \to \infty$. Тогда для любого $\xi \in (0,1)$ существует m_0 такое, что для всех $m \geq m_0$:*

$$\|B_i\|_i \leq \xi, \quad i = 1, \ldots . l. \tag{84}$$

Из оценки (84) вытекает, что для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует m_0, не зависящее от h_i, такое, что для всех $m \geq m_0$ погрешность приближенного решения $\mathbf{z}_i^1$ задачи (42), полученного алгоритмом MG_i, уменьшается с множителем ε по сравнению с погрешностью начального приближения $\mathbf{z}_1^0$, т. е.

$$\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i^1\|_i \leq \varepsilon\|\mathbf{w}_i - \mathbf{z}_i^0\|_i. \tag{85}$$

Отметим, что на основании (83) множитель ε в (85) зависит от числа итераций m следующим образом [13]:

$$\varepsilon = O((m+1)^{-2}).$$

Рассмотрим реализацию алгоритма FMG. Выберем m так, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon < 1$ для ε из (85). Тогда мы можем выбрать целое t, такое что

$$\varepsilon^t < c_4 c_5^{-1}/4. \tag{86}$$

Приведем результат, характеризующий сходимость алгоритма FMG [13, теорема 4.15].

Теорема 4. *Пусть m выбрано так, что* (85) *выполняется с $\varepsilon < 1$ и пусть t удовлетворяет условию* (86). *Тогда при использовании алгоритма FMG мы получим последовательность приближенных решений u_i, $i = 1, \ldots, l$, задач* (42), *которые удовлетворяют оценке*

$$\|\mathbf{w}_i - \mathbf{u}_i\|_i \leq c_9 h_i \frac{1+\rho}{c_5(1-\rho)}, \quad \rho = 4\varepsilon^t c_4^{-1} c_5 < 1,$$

а для их восполнений $\tilde{u}_i \in H^i$ справедлива оценка

$$|u - \tilde{u}_i|_{0,\Omega} \leq c_9 h_i^2 \cdot 2/(1-\rho).$$

Наконец, сформулируем результат, содержащий оценку числа арифметических операций в алгоритме FMG (см. [13, лемма 5.1.4]).

Теорема 5. *В алгоритме FMG для достижения точности, обусловленной погрешностью дискретной задачи с учетом численного интегрирования, т. е. для выполнения оценок*

$$|\tilde{w}_l - \tilde{u}_l|_{0,\Omega} \le c_9 h_l^2,$$
$$|u - \tilde{u}_l|_{0,\Omega} \le 2c_9 h_l^2$$

требуется $O(n_l)$ арифметических операций.

Список литературы

[1] Ильин В.П., Свешников В.М. О разностных методах на последовательности сеток // Численные методы механики сплошной среды: Информ. бюл. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Отд-ние механики и процессов управления. 1971. Т. 2, № 1. С. 43–55.

[2] Deuflhard P. Cascadic conjugate-gradient methods for elliptic partial differential equations. I. Algorithm and numerical results // Technical Report SC 93-23. Berlin: Konrad-Zuse-Zentrum (ZIB), 1993.

[3] Shaidurov V.V. Some estimates of the rate of convergence for the cascadic conjugate-gradient method // Comp. Math. Applic. 1996. Vol. 31, N 4–5. P. 161–171.

[4] Shaidurov V.V. Some estimates of the rate of convergence for the cascadic conjugate-gradient method. Magdeburg, 1994 (Preprint Otto-von-Guericke Universität. № 4).

[5] Bornemann F.A., Deuflhard P. The cascadic multigrid method for elliptic problems // Numer. Math. 1996. Vol. 75. P. 135–152.

[6] Shaidurov V.V., Timmermann G. A cascadic multigrid algorithm for semilinear indefinite elliptic problems // Computing. 2000. Vol. 64. P. 349–366.

[7] Shaidurov V.V. Cascadic algorithm with nested subspaces in domains with curvilinear boundary // Advanced Mathematics: Computations and Applications. Novosibirsk: Computing Center Publisher, 1995. P. 588–595.

[8] Shaidurov V.V., Tobiska L. The convergence of the cascadic conjugate-gradient method applied to elliptic problems in domain with re-entrant corners // Math. Comput. 2000. Vol. 69, N 230. P. 501–520.

[9] Гилева Л.В. Каскадный многосеточный алгоритм в методе конечных элементов для трехмерной задачи Дирихле // Сиб. журн. вычисл. математики. 1998. Т. 1, № 3. С. 217–226.

[10] Гилева Л.В., Шайдуров В.В. Каскадный многосеточный алгоритм в методе конечных элементов для трехмерной задачи Дирихле в области с криволинейной границей // Сиб. журн. вычисл. математики. 2002. Т. 5, № 2. С. 127–147.

[11] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 578 с.

[12] Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач: пер. с англ. М.: Мир, 1980.

[13] Shaidurov V.V. Multigrid Methods for Finite Elements. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[14] Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов: учеб. пособие. Казань: Изд-во Каз. ГУ, 2004.

[15] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.

[16] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

Поступила в редакцию 11 ноября 2007 г.,
в переработанном виде — 13 мая 2008 г.