

Математическое моделирование работы редуктора с циклоидально-эксцентриковым зацеплением

А. М. БУБЕНЧИКОВ, Н. Р. ЩЕРБАКОВ
Томский государственный университет, Россия
e-mail: nrs@math.tsu.ru

В. В. СТАНОВСКОЙ, С. М. КАЗАКЯВИЧЮС, Т. А. РЕМНЕВА
ЗАО “Технология маркет”, Томск, Россия
e-mail: tm@mail.tomsknet.ru

Построена математическая модель работы редуктора, использующего циклоидально-эксцентриковое зацепление и состоящего из червячного элемента и выходной детали, построенной на базе циклоидальной кривой. Такое зацепление обладает повышенными силовыми характеристиками и позволяет получать высокие передаточные отношения в одной ступени. Создана компьютерная программа, иллюстрирующая кинематически согласованное движение идеальных геометрических фигур — торцевых сечений работающего механизма, и позволяющая находить необходимые для конструирования числовые характеристики.

Ключевые слова: математическая модель, редуктор, циклоидально-эксцентриковое зацепление, геометрические фигуры.

Введение

Широко применяемое эвольвентное зацепление колес при всех его достоинствах обладает и рядом недостатков, таких как недостаточная несущая способность зубьев из-за малой кривизны рабочих поверхностей, сравнительно высокие потери, связанные с наличием трения скольжения [1]. Кроме того, эвольвентное зацепление имеет ограничения по величине передаточного отношения для одной ступени. Все эти недостатки обуславливают поиск новых видов зацеплений.

Эвольвентное косозубое зацепление с уменьшенным числом зубьев меньшего колеса — шестерни [2, 3] позволяет повысить передаточное отношение при одних и тех же межосевых расстояниях. В частности, шестерня может быть выполнена с одним зубом, имеющим в нормальном сечении эвольвентный профиль, а передаточное отношение будет равно числу зубьев большего колеса. В этом зацеплении, как и в обычном эвольвентном, преобладает трение скольжения, снижающее КПД. Кроме того, наличие в профиле зуба точек перегиба, являющихся концентраторами напряжений, снижает прочность и нагрузочную способность зацепления.

Известно зацепление Новикова [1], которое имеет выпукло-вогнутые винтовые зубья с противоположным направлением винтовой линии и с начальным касанием в точке,

которая при вращении перемещается параллельно оси колес. Профили в торцовом сечении очерчиваются дугами окружностей и имеют кривизну разных знаков. В зацеплении Новикова преобладает качение, поэтому оно имеет более высокий КПД и обладает большей контактной прочностью, чем эвольвентное зацепление при тех же основных размерах. Однако оно обладает повышенной чувствительностью к изменению межосевого расстояния колес, высокой виброакустической активностью, низкой конструктивной гибкостью, что ограничивает область практического использования зацепления [4]. В данной статье описывается новый вид зацепления колес с криволинейными зубьями, который частично объединяет достоинства эвольвентного зацепления и зацепления Новикова.

1. Геометрическая модель механизма

Общий вид редуктора с плоскостью P , перпендикулярной осям колес, приведен на рис. 1, а фрагмент участка контакта червячного элемента с большим колесом — на рис. 2.

Зубчатый профиль меньшего колеса в торцовом сечении представляет собой окружность D диаметра $d = 2r$, эксцентрично смещенную на расстояние ε относительно оси вращения колеса OO_1 . Таким образом, колесо 1 имеет один зуб в форме эксцентричной окружности. Криволинейный профиль колеса 1 образован последовательным и непрерывным смещением этой окружности вдоль оси колеса OO_1 с одновременным поворотом ее вокруг этой же оси. Или, что то же самое, поверхность зуба меньшего колеса 1 образована непрерывным поворотом последовательных торцовых сечений цилиндра радиуса r вокруг эксцентрично смещенной оси OO_1 , т. е. образует винтовой эксцентрик.

Профиль зуба большого колеса 2 в торцовом сечении сопрягается с эксцентрично смещенной окружностью D колеса 1. Профиль построен как огибающая семейства

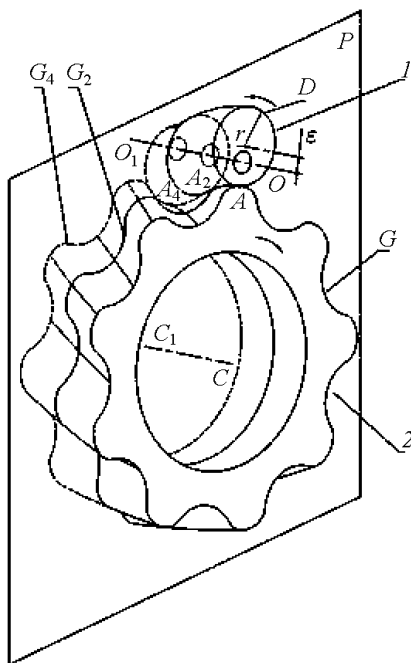


Рис. 1

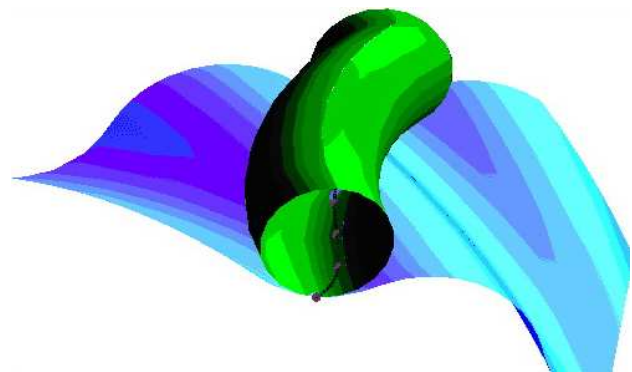


Рис. 2

эксцентриковых окружностей в разных фазах зацепления и представляет собой циклоидальную кривую G , являющуюся эквидистантой эпитрохоиды [5]. Винтовая криволинейная поверхность зубьев колеса 2 образуется аналогично поверхности зуба колеса 1 последовательным и непрерывным поворотом циклоидальных торцевых сечений колеса вокруг оси CC_1 колеса 2. Винтовые поверхности колес 1 и 2 имеют противоположное направление вращения.

2. Нахождение линии контакта

Параметрические уравнения эпитрохоиды имеют вид:

$$x(\tau) = -\varepsilon \cos(\tau) + a \cos\left(\frac{\tau}{z_2 + 1}\right),$$

$$y(\tau) = -\varepsilon \sin(\tau) + a \sin\left(\frac{\tau}{z_2 + 1}\right),$$

где $\tau = 0 \dots 2\pi(z_2 + 1)$ — текущий параметр, ε — эксцентриситет, a — межцентровое расстояние колес, z_2 — количество циклов кривой (количество зубьев колеса 2).

Параметрические уравнения эквидистанты G , удаленной по нормали на радиус окружности D от эпитрохоиды, имеют вид

$$X(\tau) = x(\tau) + \frac{d}{2}n_1(\tau),$$

$$Y(\tau) = y(\tau) + \frac{d}{2}n_2(\tau),$$

где $n_1(\tau)$, $n_2(\tau)$ — координаты единичного вектора нормали.

Как видно из схемы построения зубчатых поверхностей колес 1 и 2, профиль зуба колеса 1 в любом торцовом сечении представлен эксцентрично смещенной окружностью D , а профиль колеса 2 — повернутой циклоидальной кривой G . Окружность D в любом торцовом сечении имеет точку касания A с соответствующей циклоидальной кривой. Винтовой зуб колеса 1 имеет одновременно множество точек контакта с винтовым циклоидальным зубом колеса 2. Эти точки образуют непрерывную винтообразную (с непостоянной кривизной) линию контакта AA_2A_4 .

Координаты точки A контакта окружности D с циклоидальной кривой G находятся как сумма радиус-вектора центра окружности D с вектором, направленным по нормали к этой окружности в точке контакта и имеющим длину, равную радиусу окружности D . Для нахождения этой нормали нет необходимости прибегать к дифференцированию — достаточно применить свойство циклоидальных кривых: нормаль в произвольной точке такой кривой проходит через полюс (точка соприкосновения обкатывающихся кругов, с помощью которых получается исходная циклоидальная кривая [5, с. 113]). Линия AA_2A_4 строится с помощью встроенной в пакете MathCad функции интерполяции массива точек контакта, соответствующих близким торцевым сечениям. Полученная при этом вектор-функция $K\nu(\nu)$ ($\nu = 0 \dots 2\pi$) — угол поворота окружности D вокруг оси OO_1 , при котором получается соответствующее торцевое сечение, точек линии контакта AA_2A_4 дает возможность дифференцирования с помощью символьного процессора пакета MathCad для нахождения кривизны в каждой точке этой линии в любой момент времени. Эта кривизна оказывается не постоянной, т.е. линия контакта не является винтовой.

3. Расчет усилий в точках контакта и потерь мощности на трение

Сечениями, перпендикулярными осям вращения, выделим элементарные по глубине фрагменты деталей с размером в направлении осей — dh ; их в дальнейшем будем называть плоскими фрагментами (фигурами) зубчатого колеса и червяка. Далее мы предполагаем, что различные по глубине фрагменты каждой отдельно взятой детали не участвуют в силовом взаимодействии. В случае же существования такого взаимодействия реализующие его усилия были бы направлены лишь вдоль осей вращения. Таким образом, распределенные по линии контакта усилия $F(\nu, \delta)$ действуют в плоскости, нормальной осям вращения деталей. Поскольку на глубине dh реализуется поворот плоской линии G на угол $d\nu$, то со стороны входной детали (червяка) на выделенный элементарный фрагмент зубчатого колеса будет действовать сила величиной $F(\nu, \delta)d\nu$, направленная по общей нормали к плоским фигурам в точке контакта. В свою очередь, со стороны зубчатого колеса вдоль того же направления общей нормали будет действовать равная по величине, но противоположно направленная сила реакции. Точками опоры выделенных вращающихся плоских фигур являются центры вращения этих фигур. Центры вращения остаются неподвижными во все время движения, в случае же не слишком значительных центробежных сил эти центры взаимодействуют по законам статики, т. е. по закону равенства действия и противодействия.

Входной момент на генераторе запишем в интегральной форме:

$$M = \int_{\delta}^{\delta+\pi} F(\nu, \delta) |\mathbf{r}(\nu, \delta)| \sin(\gamma(\nu, \delta)) d\nu,$$

где $\mathbf{r}(\nu, \delta)$ — радиус-вектор точки контакта относительно оси вращения винтового эксцентрика OO_1 , $\gamma(\nu, \delta)$ — угол между этим вектором и общей нормалью к касающимся кривым (окружность и эквидистанта), а интегрирование ведется по половине длины винтового эксцентрика — “рабочая часть червяка”, изменяющаяся в зависимости от δ . Отсюда легко видеть, что расчет усилий в точках контакта при угле поворота генератора δ можно производить по формуле

$$F(\nu, \delta) = \frac{M \sin(\gamma(\nu, \delta))}{\int_{\delta}^{\delta+\pi} |\mathbf{r}(\nu, \delta)| \sin^2(\gamma(\nu, \delta)) d\nu}. \quad (1)$$

Обозначим векторные величины этих сил через $\mathbf{F}(\nu, \delta)$. Тогда выходной момент можно записать в виде:

$$M_{\text{вых}} = \int_{\delta}^{\delta+\pi} |\mathbf{F}(\nu, \delta) \times \boldsymbol{\rho}(\nu, \delta)| d\nu,$$

где $\boldsymbol{\rho}(\nu, \delta)$ — радиус-вектор точки контакта плоских фигур относительно оси вращения фрагмента зубчатого колеса CC_1 .

Таким образом, если “разброс” входного воздействия определяется по формуле (1), то, следуя принципу Лагранжа, при статическом нагружении системы мы должны иметь:

$$M\omega_1 = M_{\text{вых}}\omega_2, \quad (2)$$

где ω_1, ω_2 — угловые скорости червяка и зубчатого колеса соответственно. В динамических же условиях, т. е. при наличии в системе движения, соотношение (2), следуя принципу Даламбера—Лагранжа, можно обобщить таким образом:

$$M\omega_1 = M_{\text{вых}}\omega_2 - Q_{\text{тр}},$$

где $Q_{\text{тр}}$ — потери входной мощности на трение.

Величины потерь входной мощности на трение рассчитываются следующим образом:

$$Q_{\text{тр}} = k \int_{\delta}^{\delta+\pi} F(\nu, \delta)(\Delta \mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) d\nu.$$

Здесь k — коэффициент трения, $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной в точке контакта, $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}_1$, $\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{\omega}_2$, \mathbf{r} , $\boldsymbol{\rho}$ — радиусы-векторы точек контакта соответственно относительно оси вращения червяка и оси вращения зубчатого колеса.

Радиусы кривизны и контактные напряжения в точках линии контакта

Для нахождения контактных напряжений в точках линии AA_2A_4 необходимо знать радиус кривизны той линии на большом зубе 2, которая получается торцевым сечением, соответствующим точке контакта, т. е. при заданном угле ν . Эта линия является результатом поворота исходной линии G на угол

$$-\frac{1}{z_2}(\nu + \delta),$$

где δ — угол поворота генератора. Нормальные контактные напряжения находятся по формуле из [6, с. 351]:

$$\sigma_m = 271 \sqrt{\frac{F(d \pm 2R)}{l2dR}},$$

где F — нормальные усилия в точке контакта, определенные формулой (1); l — толщина колес; d — диаметр меньшего колеса; R — радиус кривизны линии AA_2A_4 в точке контакта. Радиусы кривизны вычисляются по обычной формуле:

$$R(\nu, \delta) = \frac{[X'(\varphi(\nu, \delta))^2 + Y'(\varphi(\nu, \delta))^2]^{\frac{3}{2}}}{X'(\varphi(\nu, \delta))Y''(\varphi(\nu, \delta)) - X''(\varphi(\nu, \delta))Y'(\varphi(\nu, \delta))},$$

где

$$\varphi(\nu, \delta) = \frac{z_2 + 1}{z_2}(\nu + \delta),$$

а $(X(\varphi(\nu, \delta)), Y(\varphi(\nu, \delta)))$ — координаты точки контакта на соответствующей эквидистанте.

Вычисления производились с использованием встроенных функций приближенного численного дифференцирования пакета MathCad, которые проводятся по умолчанию с точностью до третьего знака после запятой. Причем точность расчетов может быть повышена специальным заданием управляющей команды, что и было проделано в настоящей работе. Однако результаты, полученные с более высокой точностью проведения численного дифференцирования, не привели к ощутимому изменению значений радиусов кривизны в точках контакта.

4. Оптимизация параметров

Приведенные выше рассуждения легли в основу компьютерной программы, созданной в пакете MathCad. В начале этой программы вводятся значения параметров зацепления, изменением которых можно оптимизировать зацепление по КПД, а также по максимально допустимым значениям контактных напряжений. Поскольку малое колесо (червячный элемент) в зацеплении имеет один зуб, то передаточное отношение зацепления определяется только числом зубьев большего колеса z_2 . При проектировании редукторов передаточное отношение обычно является заданной величиной, следовательно, для нашего зацепления варьировать число зубьев большего колеса мы не можем. Второй заданный параметр редуктора — его номинальный крутящий момент, характеризующий нагрузочную способность передачи. Величина крутящего момента определяется габаритами передачи. Поэтому второй постоянной величиной в нашем случае мы выбрали межцентровое расстояние колес a . Таким образом, в качестве изменяемых при оптимизации параметров для $a = 70$ мм, $z_2 = 10$ были выбраны диаметр окружности d в поперечном сечении однозубого колеса 1 и эксцентриситет ε смещения этой окружности от оси вращения колеса. Для получения численных значений КПД выбрали коэффициент трения скольжения равным 0.05.

Схема выполненной оптимизации состоит в следующем. Предварительно, опираясь на данные расчетов, строим поверхности, реализующие значения КПД и контактного напряжения, которые будут определены на куске плоскости допустимых значений ε и d . Далее проводим плоскость минимально допустимого значения КПД, которая отсечет от поверхности реализаций указанной величины купол с основанием в виде криволинейного многоугольника. Вторую фигуру, являющуюся также многоугольником, получаем как проекцию на плоскость независимых переменных (плоскость ε , d) части поверхности реализаций контактного напряжения, отсеченной плоскостью предельного значения данной величины. Пересечением двух построенных указанным выше способом плоских фигур будет также криволинейный многоугольник, центр площади которого и определит оптимальные величины ε и d . В результате проведенной оптимизации установлено, что при $\varepsilon = 4.9$ мм, $d = 16.23$ мм получаем (при прочих равных условиях) наибольший КПД = 96.25 %. Контактные напряжения в таком случае при $M = 50$ Н·м и длине червяка $l = 30$ мм не превышают 1.3×10^6 кг·м⁻¹·с⁻².

Программа и метод расчета могут быть использованы и для иных значений z_2 , a , M . Выбор другого коэффициента трения изменит только абсолютное значение КПД, не изменяя оптимальных значений геометрических параметров, при которых достигается этот КПД.

5. Тестирование алгоритма

Алгоритм построения математической модели тестировался в два этапа.

1. Был создан анимационный файл, визуализирующий кинематически согласованное движение деталей механизма. При этом в каждый момент времени можно было видеть не только взаимное расположение контактирующих частей механизма, но и изображение пространственной непрерывной линии контакта. Это подтверждает, что во все время движения детали устройства не выходят из силового взаимодействия.

2. Были проведены предварительные тестовые расчеты движения деталей зацепления при нулевом эксцентриситете. В этом случае и червячный элемент, и зубчатое

колесо имеют цилиндрическую боковую поверхность. Расчетами были найдены радиусы кривизны в точках контакта, которые с высокой точностью (до девятого знака после запятой, если радиус кривизны выражен в миллиметрах) совпали с радиусами цилиндров. Кроме этого, линия контакта из пространственной кривой превратилась в почти идеальную прямую, а КПД получился равным 100, в случае если момент трения превосходил передаваемый момент.

Таким образом, в статье рассмотрен новый вид зубчатого зацепления, а именно циклоидально-эксцентриковое зацепление с криволинейными зубьями, обладающее высоким передаточным отношением при минимальных габаритных размерах. Зубья имеют большой приведенный радиус кривизны, что увеличивает контактную прочность зацепления, а форма зуба обеспечивает большую изгибную прочность. Зацепление обладает повышенным КПД, так как имеет минимальные потери на трение.

Новое зубчатое зацепление оформлено в качестве заявки на изобретение на патент Российской Федерации.

Список литературы

- [1] БАТУРИН А.Т., ИЦКОВИЧ Г.М. и др. Детали машин. М.: Машиностроение, 1970. 264 с.
- [2] ВУЛГАКОВ Э.Б., КАПЕЛЕВИЧ А.Л. Зубчатая передача с параллельными осями. А.с. СССР SU 1060835.
- [3] ROTH K. Involute gear combinations. Пат. США US 3,247,736.
- [4] ЖУРАВЛЕВ Г.А. Ошибочность физических основ зацепления Новикова как причина ограниченности его применения // Редукторы и приводы. 2006. Т. 1, № 04. С. 38–45.
- [5] САВЕЛОВ А.А. Плоские кривые. М.: Физматгиз, 1960. 294 с.
- [6] ЧЕРМЕНСКИЙ О.Н., ФЕДОТОВ Н.Н. Подшипники качения. Справочник-каталог. М.: Машиностроение, 2003. 576 с.

*Поступила в редакцию 23 июня 2008 г.,
в переработанном виде — 11 января 2009 г.*