

Неклассические модели конвекции: Точные решения и их устойчивость*

В. К. АНДРЕЕВ, В. Б. БЕКЕЖАНОВА, М. В. ЕФИМОВА,
И. И. РЫЖКОВ, И. В. СТЕПАНОВА

Учреждение Российской академии наук

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

e-mail: andr@icm.krasn.ru

Приведен обзор различных результатов для неклассических моделей конвекции, полученных в ИВМ СО РАН за последние пять лет.

Ключевые слова: групповой анализ, инвариантные свойства уравнений, точные решения, гидродинамическая устойчивость, нейтральные кривые.

Введение

В последние десятилетия развитие вычислительной техники стимулировало поиск регулярных механизмов переноса энергии и вещества в жидких средах. К числу таких механизмов относятся процессы конвекции. Несмотря на интерес к этим течениям не только с точки зрения возможных технологических приложений, но и как к фундаментальной физической проблеме, до сих пор нет общих методов исследования нелинейных уравнений конвекции. При описании конвективных течений необходимо учитывать нелинейность уравнения состояния среды, эффекты Соре и Дюфура, перенос примесей и тепла, зависимости кинетических коэффициентов среды и коэффициентов теплового расширения и солевого сжатия от параметров состояния. Для анализа соответствующих систем нелинейных уравнений в частных производных необходимо применять достаточно мощные математические методы. Одним из таких методов является групповой анализ, позволяющий изучать инвариантные свойства уравнений и находить точные решения.

В современных исследованиях конвекции жидкости особое внимание уделяется изучению физических явлений, характеризующихся наличием нескольких основных механизмов формирования течений. При этом используются модели, более точно учитывающие термодинамику жидкости. Так, уравнение состояния жидкости может содержать нелинейную зависимость от температуры, концентрации и давления, что в наибольшей мере сказывается в слоях жидкости большой глубины. Возникающая в этих условиях инверсия плотности является неустойчивой формой механического равновесия, которое может быть нарушено посредством некоторых возмущений и привести к проникающей конвекции. Изучение свойств спектра возмущений, анализ воздействия осложняющих факторов — тепловых свойств границ системы, наличие источников тепла позволяют глубже понять природу и механизм неустойчивостей.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-00762) и интеграционных проектов СО РАН (гранты № 65 и 116).

© ИВТ СО РАН, 2009.

1. Симметрии уравнений конвекции бинарной смеси и некоторые точные решения

Рассмотрим модель конвекции бинарной смеси с учетом эффектов термодиффузии (Соре) и диффузионной теплопроводности (Дюфура)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0^{-1} \rho(T, C, p) \mathbf{g}, \\ T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= (\chi + \alpha^2 \mathcal{D}N) \Delta T + \alpha \mathcal{D}N \Delta C, \\ C_t + \mathbf{u} \cdot \nabla C &= \mathcal{D} \Delta C + \alpha \mathcal{D} \Delta T, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ — вектор скорости, p — давление, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — вектор ускорения силы тяжести, ν — коэффициент кинематической вязкости, χ — коэффициент теплопроводности, \mathcal{D} — коэффициент диффузии. Будем предполагать, что отклонения температуры T и концентрации C от средних значений T_0 и C_0 достаточно малы. Эффект Соре характеризуется параметром $\alpha = C_0(1 - C_0)\mathcal{D}_T/\mathcal{D}$, где \mathcal{D}_T — коэффициент термодиффузии. Термодинамический параметр

$$N = \left[\frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial \mu}{\partial C} \right)_{T,p} \right]_{T_0, C_0} \geq 0$$

характеризует эффект Дюфура. Здесь c_p — теплоемкость при постоянном давлении, μ — химический потенциал смеси.

Ниже излагаются результаты групповой классификации системы (1) в случае, когда 1) справедливо приближение Обербека — Буссинеска, т. е. плотность смеси можно записать в виде $\rho = \rho_0(1 - \beta_T T - \beta_C C)$; 2) плотность является функцией всех переменных, а эффект Дюфура отсутствует, т. е. $N = 0$.

В первом случае зависимость групповых свойств системы (1) от параметров, входящих в уравнения, была исследована в работах [1–4]. Результаты классификации представлены в виде таблиц. Всего выделяется 12 подмоделей конвекции (фактор-систем).

Случай бинарной смеси с эффектом Соре ($\alpha, \beta_T, \beta_C \neq 0, N = 0$) был изучен подробно. Построены оптимальные системы подалгебр первого и второго порядка для допускаемой алгебры операторов [2–4], и исследованы инвариантные решения уравнений модели, описывающие термодиффузионные течения в плоских [5] и цилиндрических [6] слоях.

Во втором случае ($N = 0$, плотность $\rho = \rho(T, C, p)$ задана) для системы трехмерных уравнений модели конвекции (1) с учетом эффекта Соре была решена задача групповой классификации относительно функции $\rho = \rho(T, C, p)$, определяющей силу плавучести, с учетом, что она зависит от трех параметров: давления, температуры и концентрации. После построения классифицирующего уравнения стало ясно, что нужно исследовать отдельно три случая: 1) функция ρ не зависит от давления, 2) ρ зависит от давления линейно, 3) ρ зависит от давления нелинейно. Результат исследования представлен в виде таблиц, где выписаны специализации классифицируемой функции и операторы, допускаемые исследуемой системой в зависимости от найденных специализаций. Следует заметить, что при составлении этих таблиц использовались преобразования эквивалентности, позволившие существенно упростить вид классифицируемой функции [7, 8]. Далее с использованием полученных таблиц групповой классификации были построены некоторые инвариантные решения. Следует отметить, что инвариантные решения

в основном строились для плотности ρ , зависящей произвольно лишь от температуры и концентрации, т.е. на операторах из ядра. Это позволяет в дальнейшем подставлять выражения для конкретной функции, определяющей силу плавучести, в решения и использовать их в качестве начальных для каких-либо экспериментов или в качестве тестовых для проверки корректности численных методов. При интерпретации найденных решений можно рассматривать различные постановки задач. Например, движение между двумя плоскими стенками со свободной границей или с границей раздела. Для одного из найденных стационарных решений была поставлена краевая задача, описывающая течение смеси между двумя твердыми стенками. Граничными условиями для скоростей являлись условия прилипания, для температуры — нагрев стенок до разных температур, для концентрации — отсутствие потока вещества через твердые стенки. Оказалось, что при таких условиях данное решение описывает некоторое обобщение хорошо известного течения Пуазейля с параболическим профилем скорости. Для другого найденного решения была поставлена задача течения жидкости между твердой стенкой и свободной границей, например, воздухом. Естественно, что граничные условия в данном случае были уже другие. Оказалось, что решение описывает состояние покоя жидкости при линейной зависимости температуры и концентрации от поперечной координаты [8, 9].

Исследовано инвариантное решение двумерных уравнений термодиффузионного движения (в системе (1) $N = 0$, $\mathbf{g} = 0$) $u_j = u_j(y, t)$, $v_j = 0$, $p_j = \rho_j f_j(t)x + P_j(t)$, $\theta_j = A_j x + T_j(y, t)$, $c_j = B_j x + K_j(y, t)$. Этому решению можно дать следующую интерпретацию. Предположим, что на границе раздела двух смесей $y = 0$ поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации: $\sigma(\theta, c) = \sigma_0 - \alpha_1 \theta - \alpha_2 c$, где $\alpha_1 > 0$, α_2 — постоянные. В начальный момент времени первая смесь заполняет слой $-l_1 < y < 0$, а вторая — слой $0 < y < l_2$. Смеси находятся в покое, и при $t = 0$ во всем пространстве мгновенно создаются поле температур $\theta_j = A_j x$ и поле концентраций $c_j = B_j x$. Термоконцентрационный эффект и градиенты давления $f_j(t)$ порождают движение смесей, в котором поверхность раздела остается плоскостью $y = 0$, а траектории являются прямыми, параллельными оси x . Функции u_j , T_j , K_j можно назвать возмущениями состояния покоя смесей. Подстановка решения указанного вида в систему уравнений термодиффузионного движения с учетом условий на границе раздела $y = 0$ приводит к сопряженной начально-краевой задаче для функций u_j , T_j , K_j . Доказано, что если градиент давления $f_1(t)$ достаточно быстро стремится к нулю при больших t и термоконцентрационные силы отсутствуют на поверхности раздела, то при $t \rightarrow \infty$ скорости в слоях по экспоненте стремятся к нулю. То же самое справедливо для температуры и концентрации. Если градиент давления отсутствует, то скорости, температуры и концентрации выходят на стационарный режим только за счет действия термоконцентрационных сил на поверхности раздела: скорости — на течения Куэтта в слоях, а температуры и концентрации описываются полиномами третьего порядка по y . В случае существования конечного предела $\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t)$ скорости выходят на стационарный режим типа течения Пуазейля, а температуры и концентрации описываются полиномами четвертого порядка по y ; если $f_1(t) = f_1^0 / \sqrt{t}$, то при $l_1, l_2 \rightarrow \infty$ решение выходит на автомодельный режим [10–13].

Изучено инвариантное решение уравнений термодиффузионного движения вида $w_j = w_j(r, t)$, $p_j = -\rho_j f_j(t)z + P_j(t)$, $\theta_j = Az + T_j(r, t)$, $c = Bz + K(t)$. Оно описывает однонаправленное нестационарное движение бинарной смеси в трубе радиуса b . Смесь занимает область $0 \leq r \leq a < b$, а вязкая теплопроводная жидкость — цилин-

дрический слой $a \leq r \leq b$, при этом $w_j(r, t)$ — осевая скорость смеси и жидкости, p_j, θ_j — распределение давления и температуры в них, а $c(z, r, t)$ — концентрация в смеси. Первоначально смесь и жидкость находятся в покое, затем при $t > 0$ градиенты давлений $f_j(t)$ порождают их движение, причем цилиндрическая поверхность $r = a$ во все моменты времени остается их поверхностью раздела. Доказано, что если градиент давления $f_1(t)$ достаточно быстро (по экспоненте) стремится к нулю, то и возмущения при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально затухают, причем показатели затухания зависят от свойств смеси и жидкости. В случае существования конечного предела $\lim_{t \rightarrow \infty} f_1(t)$ скорости выходят на стационарный режим (течение Пуазейля с поверхностью раздела), а температуры и концентрации есть полиномы четвертого порядка по радиальной координате r . Определены расходы смеси и жидкости, и решена обратная задача определения градиентов давления [14].

Ползущее движение бинарной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе исследовалось в работе [15]. Показано, в частности, что при больших временах движение выходит на стационарный режим.

2. Вопросы устойчивости

1. Устойчивость стационарной конвекции в термогравитационной колонне.

Рассмотрим смесь из n компонентов, состав которой описывается вектором концентраций $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n-1})^T$ (компонент с номером n выбран в качестве растворителя). Предполагается, что плотность линейно зависит от температуры и концентрации компонентов:

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta_T T - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i C_i \right] = \rho_0 \left[1 - \beta_T T - \mathbf{I} \cdot B\mathbf{C} \right].$$

Здесь T и \mathbf{C} — отклонения температуры и концентрации от средних значений T_0 и \mathbf{C}_0 , β_i — коэффициенты концентрационного расширения, $B = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ — диагональная матрица, $\mathbf{I} = (1, \dots, 1)$ — вектор размерности $n - 1$.

Пусть смесь помещена в термогравитационную колонну высотой $2H$, шириной $2L$ и длиной $2S$ (рис. 1). Боковые стенки $X = \pm L$ поддерживаются при постоянной темпе-

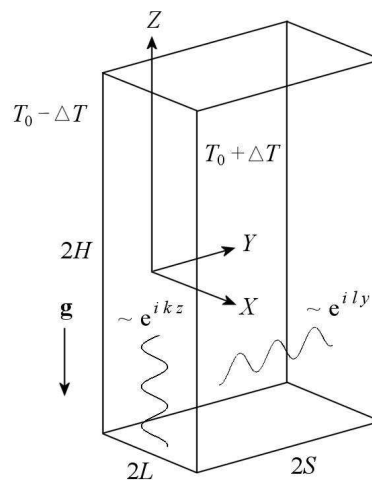


Рис. 1. Схема термогравитационной колонны

ратуре $T_0 \pm \Delta T$ (предполагается, что вертикальный градиент температуры отсутствует). Горизонтальный градиент температуры в колонне вызывает аналогичные градиенты концентрации благодаря эффекту Соре и, кроме этого, приводит к возникновению гравитационной конвекции. Соотношение размеров колонны $H/L \sim 10^2$ и $S/L \sim 10$, течение можно рассматривать как плоскопараллельное (в плоскости XZ), строго вертикальное (за исключением торцов колонны). Так как горизонтальная компонента скорости равна нулю, то из уравнения неразрывности следует, что вертикальная компонента зависит только от X . Разделение компонентов смеси в горизонтальном направлении совместно с вертикальным конвективным потоком приводит к разделению компонентов между верхним и нижним концами колонны. При достижении стационарного состояния вертикальные градиенты концентраций становятся постоянными. Экспериментальное измерение этих градиентов позволяет определить коэффициенты термодиффузии смеси. Выберем характерные масштабы расстояния L , времени L^2/ν , скорости $g\beta_T\Delta TL^2\nu^{-1}$, давления $\rho_0gL\beta_T\Delta T$, температуры ΔT , концентрации i -го компонента $\beta_T\Delta T/\beta_i$ и перейдем к безразмерным переменным. Тогда конвекция многокомпонентной смеси определяется параметрами $Gr = g\beta_T\Delta TL^3/\nu^2$ — число Грасгофа, $Pr = \nu/\chi$ — число Прандтля, $\mathcal{SC} = \nu^{-1}BDB^{-1}$ — безразмерная диффузионная матрица (здесь D есть матрица коэффициентов диффузии D_{ij}), при этом $\{\mathcal{SC}\}_{ij} = \beta_i/\beta_j Sc_{ij}^{-1}$, где $Sc_{ij} = \nu/D_{ij}$ — числа Шмидта. Вектор $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_{n-1})^T = -\beta_T^{-1}BD^{-1}\mathbf{D}_T$ (здесь $\mathbf{D}_T = (\mathbf{D}_{T,1}, \dots, \mathbf{D}_{T,n-1})$ — вектор коэффициентов термодиффузии) описывает отношения разделения, характеризующие эффект Соре для каждого из компонентов смеси [16]. Если самый тяжелый компонент выбран в качестве растворителя и $\beta_T > 0$, то при $\psi_i > 0$ ($\psi_i < 0$) компонент i перемещается в более теплую (более холодную) область под действием эффекта Соре. Сумма $\Psi = \psi_1 + \dots + \psi_{n-1}$ называется полным отношением разделения.

Согласно рассматриваемой конфигурации, стационарное решение, описывающее конвекцию и разделение смеси в колонне, ищется в виде $\mathbf{u} = (0, 0, w(x))$, $\Theta = \Theta(x)$,

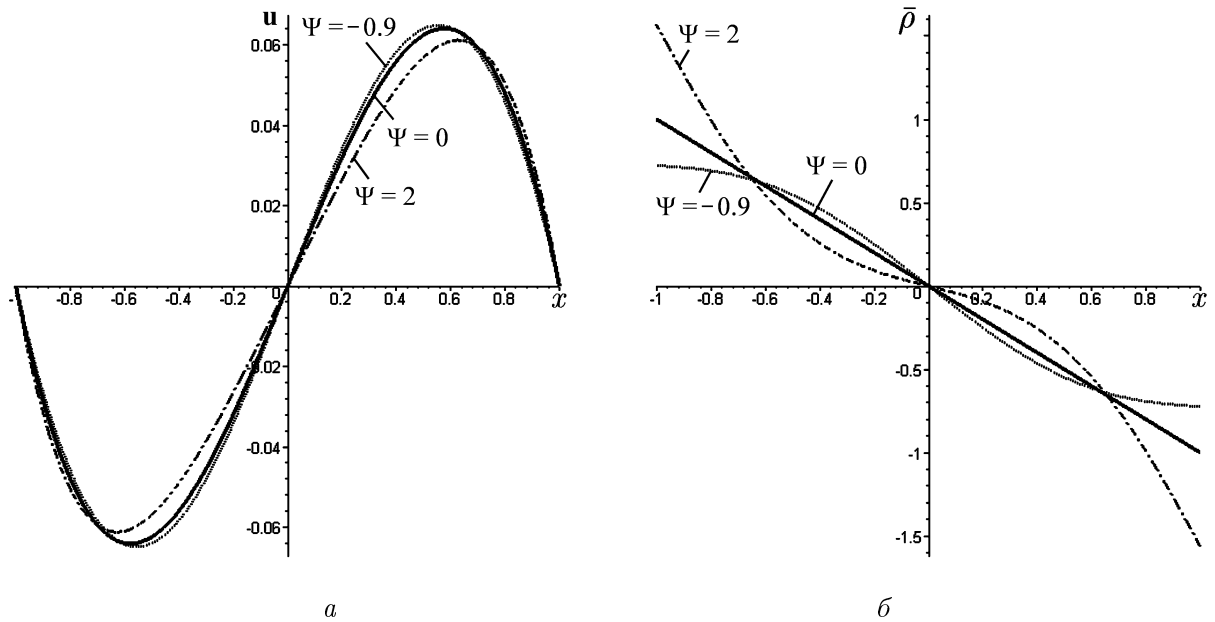


Рис. 2. Профили безразмерных скорости (а) и плотности (б) для различных значений полного отношения разделения Ψ

$\mathbf{c} = \mathbf{c}(x) + \text{Gr}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{C} \mathbf{R} z$, где $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_{n-1})^T = gL^4\nu^{-1}BD^{-1}\mathbf{A}$ — вектор концентрационных чисел Рэлея, которые определяются через вертикальные градиенты концентрации \mathbf{A} . На боковых стенках колонны задаются условия прилипания, распределение температуры и отсутствие потока вещества. Дополнительными условиями являются: замкнутость потока, сохранение массы каждого компонента и обращение в ноль полного потока вещества через любое поперечное сечение колонны. В работе [16] найдено точное решение, удовлетворяющее указанным условиям. Было установлено, что задача имеет единственное решение при $\Psi > -1$, счетное число решений при $-5 < \Psi < -1$ и не имеет решения при $\Psi < -5$. Рассмотрим профили безразмерных скорости и плотности $\bar{\rho} = (\rho - \rho_0)/\rho_0\beta_T\Delta T = -\Theta - \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}$ в поперечном сечении колонны (рис. 2). Если $\Psi = 0$, то изменения плотности за счет изменения концентрации компонентов компенсируют друг друга. В результате получается линейное распределение плотности, соответствующее линейному распределению температуры. Для $\Psi > 0$ легкие (тяжелые) по отношению к растворителю компоненты накапливаются вблизи нагретой (холодной) границы благодаря эффекту термодиффузии. Конвективное течение, в свою очередь, приводит к накоплению легких (тяжелых) компонентов в верхней (нижней) части колонны. Такая стратификация является гравитационно устойчивой. При $\Psi < 0$ легкие (тяжелые) компоненты собираются вблизи холодной (нагретой) границы. Данная стратификация гравитационно неустойчива, так как легкие (тяжелые) компоненты накапливаются в нижней (верхней) части колонны благодаря конвекции.

При увеличении разности температур между боковыми стенками стационарное конвективное течение может стать неустойчивым. Линейный анализ устойчивости данного течения для случая многокомпонентной смеси был проведен в работе [17]. Заметим, что в данном случае преобразование Сквайра не применимо, поэтому наиболее опасные возмущения могут быть, вообще говоря, трехмерными. Рассмотрим два типа нормальных возмущений: продольные волны $\mathbf{u} = (-\Phi_z, 0, \Phi_x)$, Θ, \mathbf{c} в плоскости XZ , которые имеют вид $(\Phi, \Theta, \mathbf{c}) = (\varphi(x), \theta(x), \boldsymbol{\xi}(x)) \exp(-\lambda t + ikz)$, где Φ есть функция тока, и поперечные волны $\mathbf{u} = (0, v, w)$, Θ, \mathbf{c} в плоскости YZ : $(v, w, \Theta, \mathbf{c}) = (v(x), w(x), \theta(x), \boldsymbol{\xi}(x)) \exp(-\mu t + ily)$.

Зависимость критического числа Грасгофа в бинарной смеси с $\text{Pr} = 10$ от отношения разделения Ψ представлена на рис. 3, а. Здесь сплошные линии соответствуют продольным возмущениям. Расчеты показали, что монотонная мода слабо зависит от чисел Прандтля и Шмидта. При положительных Ψ легкий (тяжелый) компонент накапливается в верхней (нижней) части колонны, обеспечивая потенциально устойчивую стратификацию. Последняя усиливается с ростом Ψ , оказывая стабилизирующий эффект на монотонную моду. При дальнейшем увеличении коэффициента разделения колебательная мода становится наиболее опасной и приводит к резкому понижению порога устойчивости. Эта мода существенно зависит от диффузионных свойств смеси: уменьшение числа Шмидта (т. е. увеличение коэффициента диффузии) оказывает стабилизирующий эффект. Колебательная неустойчивость связана с появлением двух возмущений, движущихся в вертикальном направлении с противоположными фазовыми скоростями. При отрицательных Ψ тяжелый компонент накапливается в верхней части колонны, приводя к гравитационно неустойчивой стратификации. В этом случае система неустойчива относительно длинноволновых поперечных возмущений при любом значении числа Грасгофа.

Рассмотрим теперь тройную смесь, которая может быть охарактеризована четырьмя параметрами: $\Psi, \psi_1, s = \text{Sc}_{11}/\text{Sc}_{22}, \text{Sc}_{22}$. Предполагается, что задача устойчивости

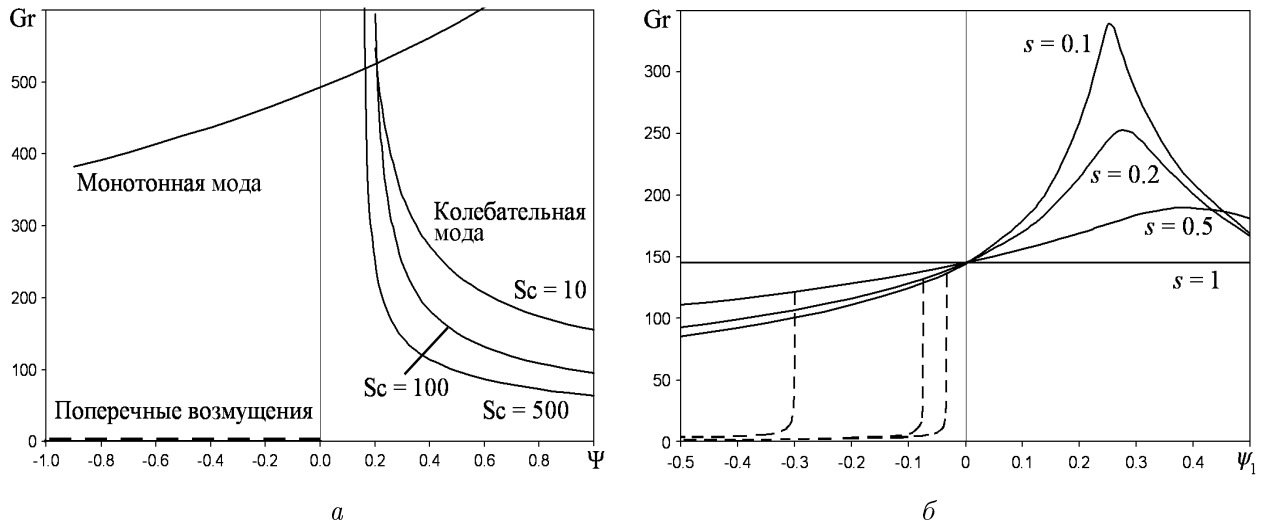


Рис. 3. Зависимость критического числа Грасгофа бинарной смеси от отношения разделения Ψ (а) и зависимость критического числа Грасгофа тройной смеси от отношения разделения ψ_1 при $\Psi = 0.3$, $Sc_{22} = 500$, $s = Sc_{11}/Sc_{22}$ (б)

сведена к задаче без учета перекрестной диффузии (описываемой числами Шмидта Sc_{12} и Sc_{21}) с помощью специального преобразования [17, 18]. Рассмотрим сначала тройную смесь с одинаковыми диффузионными свойствами двух компонентов ($s = 1$). Расчеты показали, что карта устойчивости такой смеси совпадает с соответствующей картой для бинарной смеси (см. рис. 3, а), где $\Psi = \psi_1 + \psi_2$ есть полное отношение разделения. Отметим, что границы устойчивости не зависят от конкретных значений ψ_1 и ψ_2 , а определяются их суммой. В случае $s \neq 1$ наличие трех компонентов становится существенным. Монотонная мода определяется только значением полного отношения разделения Ψ , однако колебательная мода зависит от термодиффузионных свойств компонентов смеси. На рис. 3, б приведена зависимость критического числа Грасгофа для колебательной моды от отношения разделения ψ_1 при $\Psi = 0.3$, $Sc_{22} = 500$. С увеличением разницы между диффузионными свойствами компонентов ($s \rightarrow 0$) указанная зависимость становится все более сильной (сплошные линии на рис. 3, а соответствуют продольным возмущениям). В области отрицательных значений ψ_1 наиболее опасными становятся поперечные возмущения (соответствующие кривые показаны штриховыми линиями). Эти возмущения связаны с неустойчивой стратификацией колонны по плотности в вертикальном направлении.

2. Неустойчивость бинарных смесей в плоских слоях.

Задача о малых возмущениях произвольных движений бинарных смесей с общей поверхностью раздела изучена в работе [19].

а. Исследована устойчивость равновесного состояния двух смесей с общей поверхностью раздела, ограниченных твердыми стенками, в модели термодиффузии. На границе раздела сред поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации. Определяющими параметрами задачи являются число Марангони $M = \alpha_1(\theta_{10} - \theta_{20})l(\rho_2\nu_2\chi_2)^{-1}$, число Соре $Sr = \alpha_2\alpha_2l(\theta_{10} - \theta_{20})(\rho_2\nu_2^2)^{-1}$, число Вебера $We = \sigma_0l(\rho_2\nu_2^2)^{-1}$. Аналитически была получена зависимость числа Марангони на поверхности раздела от волнового числа для случая стационарных возмущений. Показано, что если поверхность раздела деформируема, то с увеличением числа Соре растет крити-

ческое значение числа Марангони, а значит область устойчивости увеличивается. Для случая нестационарных возмущений были определены области устойчивости системы. Анализ результатов показал, что рост числа Соре приводит к стабилизации состояния термодиффузионного равновесия [20] (рис. 4).

б. Изучена задача об устойчивости равновесного состояния системы двух несмешивающихся бинарных смесей с общей поверхностью раздела, ограниченной снизу твердой стенкой, а сверху свободной границей. Численное решение спектральной задачи показало, что область неустойчивости, которая соответствует положительным значениям C_i , при росте числа Марангони на поверхности раздела увеличивается. Зависимость мнимой части комплексного декремента от волнового числа α при изменении термодиффузионных эффектов показана на рис. 5. Обнаружено, что при фиксированных числах Марангони в случае увеличения числа Соре на поверхности раздела область устойчивости длинноволновых возмущений понижается, кроме того, численные расчеты показали, что усиление термодиффузионных эффектов на свободной границе приводит к увеличению области длинноволновой устойчивости [21].

3. Устойчивость равновесных состояний слабосжимаемых жидкостей.

С целью изучения механизма глубинной циркуляции вод оз. Байкал рассмотрена задача теории гидродинамической устойчивости.

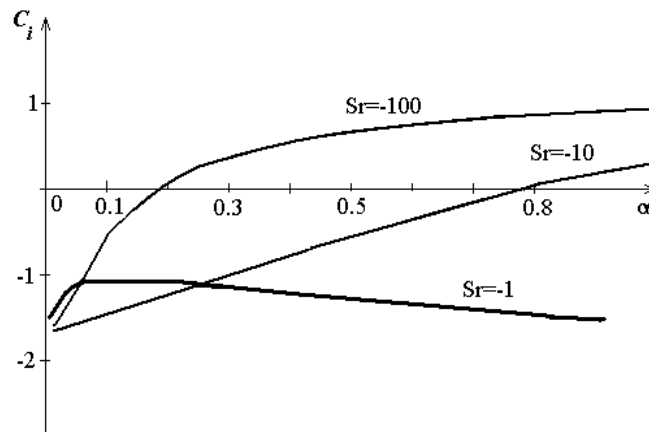


Рис. 4. Зависимость коэффициентов нарастания возмущений C_i от волнового числа α

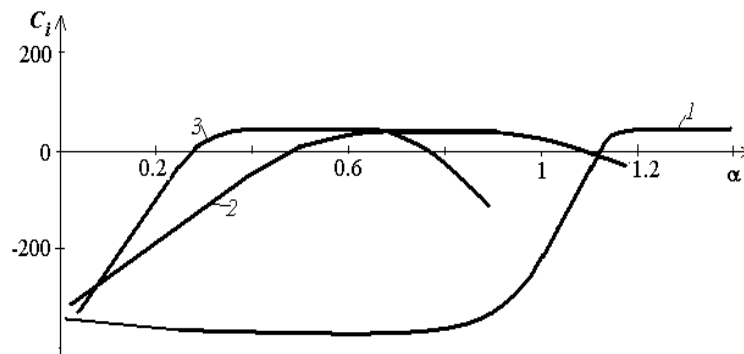


Рис. 5. Зависимость коэффициентов нарастания возмущений C_i от волнового числа α в системе глицерин—этиловый спирт ($M_1 = 260$, $M_2 = 60$, $Sr_2 = -10$): кривая 1 — $Sr_1 = -100$, 2 — $Sr_1 = -10$, 3 — $Sr_1 = -1$

Одним из основных факторов обновления глубинных вод является характер стратификации вод по температуре и плотности. Уравнение состояния жидкости содержит нелинейную зависимость от температуры и давления, что наиболее сильно сказывается в слоях жидкости большой глубины [22]:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_*)^2), \quad (2)$$

где $T_* = T_0(1 - \delta_0 p)$, $\rho_0, \theta_0, \alpha, \delta_0$ — постоянные положительные величины.

Другими важными факторами, формирующими конвекцию в естественных водоемах, являются непрерывно идущие процессы обмена теплом между водной массой и окружающей средой. При этом в [23] установлено, что здесь имеет место существенный вертикальный теплообмен между приповерхностными водами и атмосферой не только в безледный период, но и через ледяной покров.

Рассматриваются задачи о конвекции вязкой теплопроводной жидкости со свободной поверхностью [22, 24] и в системе двух несмешивающихся жидкостей с общей границей раздела [25, 26]. В [26] вместо (2) используется линейная зависимость плотности от температуры и давления $\rho = \rho_0(1 - \beta(\theta - \theta_0) - \gamma(p - p_0))$. Выбранные уравнения состояния с малыми β, δ_0 и γ позволяют считать слои жидкостей слабосжимаемыми средами.

Как указывалось выше, термогравитационная конвекция обусловлена прогреванием приповерхностных вод. В уравнение энергии добавим общую энергетическую функцию теплового источника F_w , значение которой определяется оптическими параметрами и моделью распространения излучения в среде [24, 26]. В случае объемного поглощения (проникновения солнечной радиации в среду) мощность тепловых источников F_w определяется по закону

$$F_w(z, t) = \sigma \varkappa R \exp(-\varkappa z). \quad (3)$$

Здесь σ — числовой параметр, представляющий собой отношение интенсивности солнечной радиации к радиационному балансу на поверхности воды, $0 < \sigma < 1$, \varkappa — показатель ослабления солнечной радиации в воде (показатель поглощения), R — радиационный баланс поверхности. На свободной поверхности в качестве энергетического условия принимается граничное условие третьего рода $k \partial T / \partial \mathbf{n} + b(T - T_{\text{газ}}) = Q$, $Q = \sigma R + F_e + F_h$, где k — коэффициент теплопроводности жидкости, $T_{\text{газ}}$ — температура газа, Q — заданный поток тепла через свободную поверхность, F_e, F_h — потери тепла на испарение (конденсацию) и конвективный теплообмен жидкость—газ соответственно.

В работе [27] используется модель, позволяющая проанализировать тепловое состояние водоема в зимнее время, когда воды озера покрыты льдом. Лед считается твердой неподвижной теплопроводящей стенкой конечной толщины. Уравнение для температуры льда θ_i имеет вид

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \chi_i \Delta \theta_i + F_i, \quad F_i = \frac{q_0 \varkappa_i}{2\sqrt{z}} \exp(-\varkappa_i \sqrt{z}). \quad (4)$$

Здесь χ_i — коэффициент температуропроводности льда, для F_i принимается эмпирическая формула, q_0 — интенсивность теплового потока на поверхности ледяного покрова, \varkappa_i — показатель поглощения солнечной радиации во льду.

В [22, 24–27] находятся решения, описывающие равновесное состояние. В [24] изучено влияние показателя поглощения на распределение температуры в слое. Чем ниже показатель поглощения \varkappa , тем глубже солнечная радиация проникает в толщу воды.

За счет светопоглощающих свойств воды влияние солнечного излучения на температурный режим значительно только в верхних слоях водной толщи. С ростом глубины внутреннее тепловыделение уменьшается (это видно из (3)) и отсутствует на больших глубинах, не оказывая существенного влияния на распределение температуры в нижней части слоя. С помощью численных расчетов показано, что во всех рассмотренных случаях состояние механического равновесия является неустойчивым, а теплообмен через свободную поверхность имеет стабилизирующее влияние. Вычисления проводились для различных зон оз. Байкал (Южной, Центральной и Северной) с учетом характерных значений физических параметров (толщина слоя, потоки тепла и др.). Построены инкременты нарастания возмущений, и найдены критические длины волн возмущений, приводящих к неустойчивости. Ниже приводятся графики нейтральных кривых.

На рис. 6, *а* представлены зависимости чисел Рэлея от волнового числа (нейтральные кривые). Видно, что при уменьшении числа Био критические числа Рэлея убывают, а область неустойчивости смещается в область больших по значению волновых чисел.

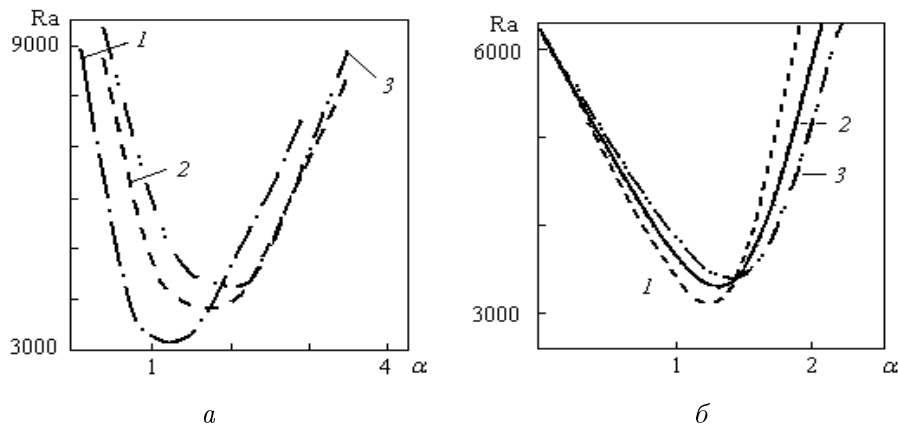


Рис. 6. Нейтральные кривые $Ra(\alpha)$: *а* — система горизонтальных слоев слабосжимаемых жидкостей; кривая 1 — $Bi = 0.2$, 2 — $Bi = 1$, 3 — $Bi = 2$; *б* — система лед—вода; кривая 1 — $Bi = 0.2$, 2 — $Bi = 2$, 3 — $Bi = 10$

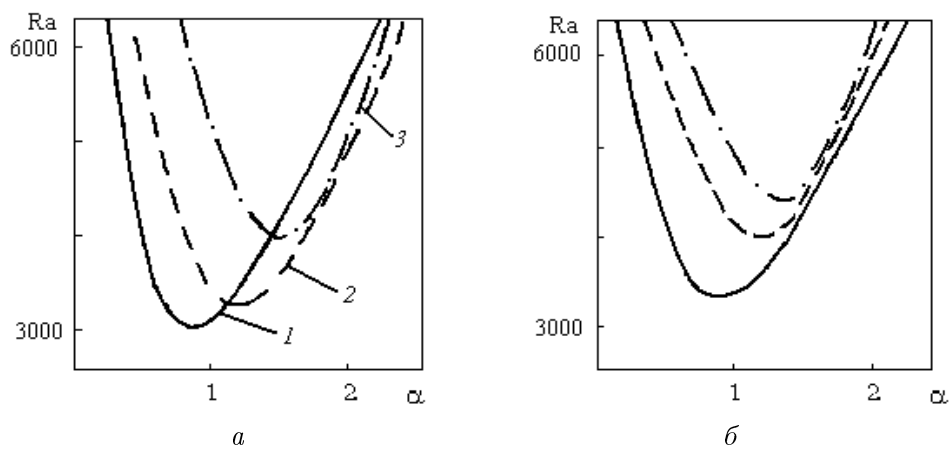


Рис. 7. Нейтральные кривые $Ra(\alpha)$ для жидкости со свободной границей при наличии объемных источников тепла; $Bi = 0.2, 1, 2$ — соответственно кривые 1–3; $\alpha = 0.2 \text{ м}^{-1}$ (*а*), 0.4 м^{-1} (*б*)

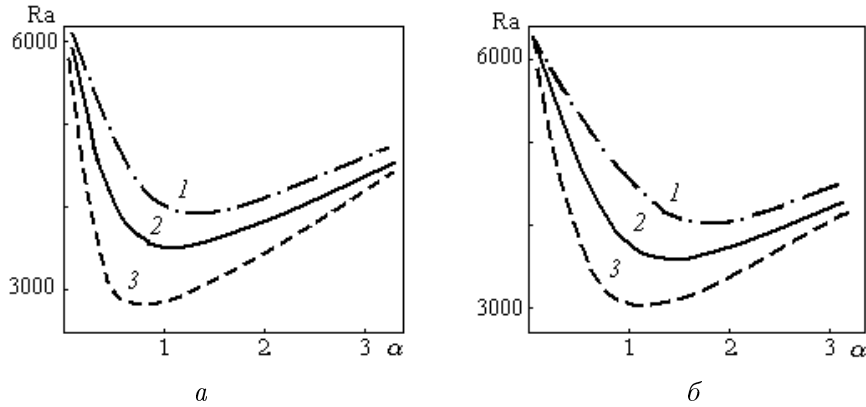


Рис. 8. Нейтральные кривые для двухслойной системы при наличии объемных источников тепла: *a* — при $z_* = 50$ м, *б* — при $z_* = 200$ м; кривая 1 — $Bi = 2$, 2 — $Bi = 1$, 3 — $Bi = 0.2$

На рис. 7 приведены нейтральные кривые в зависимости от показателя поглощения. Видно, что с ростом α внутреннее тепловыделение убывает, что приводит к увеличению зоны устойчивости. Светопоглощающие свойства среды имеют стабилизирующее влияние.

При построении нейтральных кривых (рис. 8) изменилось значение числа Био, характеризующее интенсивность теплообмена с окружающей средой, и положение поверхности раздела z_* . Чем меньше толщина верхнего слоя, тем активнее термодинамические процессы, протекающие в нем, и это оказывает дестабилизирующее влияние на устойчивость.

Было проведено сравнение полученного решения с решением аналогичной задачи для слоя жидкости толщины l . В двухслойной системе неустойчивость наступает при меньших волновых числах.

Из рис. 6, б видно, что при увеличении числа Био критические числа Рэлея возрастают, а область неустойчивости смещается в область больших по значению волновых чисел. Однако рост интенсивности теплообмена имеет слабое стабилизирующее влияние. При сравнении всех полученных результатов оказалось, что наличие теплопроводящей стенки увеличивает зону устойчивости. С ростом толщины верхней стенки стабилизирующее влияние вязкости и светопоглощающих свойств льда усиливается, и критическая длина волны увеличивается.

4. Конвекция в слое при колебаниях температуры на свободной границе.

В области со свободной недеформируемой поверхностью рассмотрена задача об устойчивости горизонтального слоя жидкости при колебаниях температуры на верхней и нижней границах. Граничные условия для температуры задавались в следующем виде: верхняя граница $T_{up} = T \sin(\Omega t)$, нижняя граница $T_{down} = AT \sin(\omega \Omega t)$.

Рассмотрено влияние параметров A , ω , ψ , определяющих асинхронность колебательных режимов. Полученные результаты показали, что значения данных параметров оказывают влияние на устойчивость слоя жидкости. Так, увеличение амплитуды колебаний температуры на нижней границе (параметр A) при малых волновых числах α приводит к повышению устойчивости. Однако обнаружено, что с ростом α наблюдается обратный эффект: увеличение амплитуды колебаний сокращает предел устойчивости. На рис. 9, а показано влияние A на величину числа Рэлея Ra , при котором начинается режим неустойчивости. Здесь параметр R определен как $R = (Ra - Ra_0)/Ra_0$,

где Ra_0 — число Рэлея, при котором начинается режим неустойчивости при отсутствии колебаний температуры на нижней границе. Из рис. 9, *а* видно, что для $\alpha = 4$ существует диапазон значений A , при которых $R < 0$, что свидетельствует о сокращении области устойчивости.

Влияние параметра ω , определяющего соответствие частот колебаний температуры на верхней и нижней границах, показано на рис. 9, *б* для случая $\alpha = 4$, $A = 7$. Увеличение частоты колебаний на нижней границе приводит к сокращению уровня воздействия, оказываемого этим параметром на устойчивость. Поэтому, как видно из рис. 9, *б*, с ростом ω значение R уменьшается.

На рис. 10 приведены результаты, демонстрирующие влияние параметра фазы колебаний ψ на устойчивость слоя жидкости при $\alpha = 4$, $A = 7$. Полученные данные показывают, что расхождение в фазах колебаний температуры на нижней и верхней границах

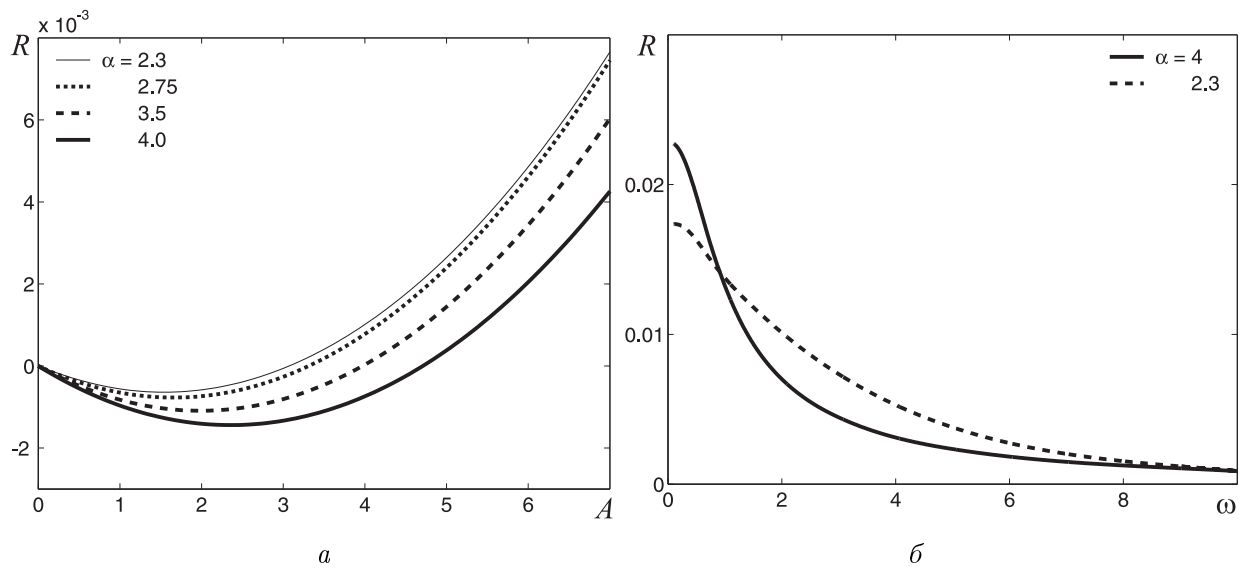


Рис. 9. Влияние параметра амплитуды колебаний A на устойчивость (*а*) и параметра частоты колебаний ω на устойчивость (*б*) для различных α

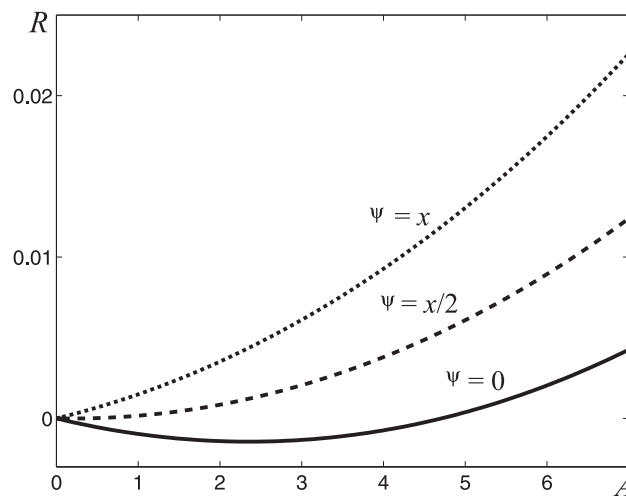


Рис. 10. Влияние параметра фазы колебаний ψ на устойчивость

оказывает стабилизирующее воздействие на устойчивость слоя жидкости. Как видно из рисунка, с ростом ψ значение R увеличивается. Максимальный стабилизирующий эффект достигается, когда колебания температуры находятся в противофазе при $\psi = \pi$ [28, 29].

Следует отметить, что часть рассматриваемых здесь результатов опубликована в монографиях [30, 31].

Список литературы

- [1] АНДРЕЕВ В.К., РЫЖКОВ И.И. Групповая классификация и точные решения уравнений термодиффузии // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 508–17.
- [2] RYZNKOV I.I. Symmetry analysis of equations for convection in binary mixture // J. Siberian Federal Univ. 2009. Vol. 1, N 4. P. 410–431.
- [3] РЫЖКОВ И.И. Оптимальная система подалгебр для уравнений термодиффузии // Вычисл. технологии. 2004. Т. 9, № 1. С. 95–104.
- [4] RYZNKOV I.I. On the normalizers of subalgebras in an infinite Lie algebra // Commun. Nonl. Science and Numerical Simulat. 2006. Vol. 11, N 2. P. 172–185.
- [5] РЫЖКОВ И.И. Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии бинарной смеси в случае плоского движения // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 1. С. 95–108.
- [6] RYZNKOV I.I. On double diffusive convection with Soret effect in a vertical layer between co-axial cylinders // Phys. D: Nonlinear Phenomena. 2006. Vol. 215, N 2. P. 191–200.
- [7] РОДИОНОВ А.А., СТЕПАНОВА И.В. Групповая классификация уравнений модели конвекции с учетом сил плавучести // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 5. С. 61–69.
- [8] СТЕПАНОВА И.В. Об инвариантных моделях термодиффузионных течений // Сборник трудов конф. молодых ученых Красноярского научного центра СО РАН. Красноярск: КНЦ СО РАН, 2008. С. 44–45.
- [9] СТЕПАНОВА И.В. О некоторых точных решениях модели конвекции с учетом сил плавучести // Материалы конф. молодых ученых ИВМ СО РАН. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2008. С. 10–17.
- [10] ЕФИМОВА М.В. Эволюция возмущений движения бинарных смесей с плоской границей раздела под действием перепада давления и термоконцентрационных сил. Препр. № 4. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2007. 40 с.
- [11] АНДРЕЕВ В.К. Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием нестационарного перепада давления // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 94–107.
- [12] ANDREEV V.K. Evolution of the joint motion of two viscous heat-conducting fluids in a plane layer under the action of an unsteady pressure gradient // J. Appl. Mech. and Techn. Phys. 2008. Vol. 49, N 4. P. 598–609.
- [13] АНДРЕЕВ В.К., КАРТОШКИНА А.Е. Автомодельное движение бинарных смесей с плоской границей раздела // Сибирский журн. индустр. математики. 2007. Т. 10, № 1(29). С. 17–24.
- [14] АНДРЕЕВ В.К., СОБАЧКИНА Н.Л. Свойства решений начально-краевой задачи, возникающей при движении бинарной смеси в цилиндрической трубе. Препр. № 1. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2009. 40 с.

- [15] АНДРЕЕВ В.К., СОБАЧКИНА Н.Л. Движение бинарной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 2. С. 3–14.
- [16] RYZHKOV I.I., SHEVTSOVA V.M. On thermal diffusion and convection in multicomponent mixtures with application to the thermogravitational column // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19, N 2. 027101.
- [17] RYZHKOV I.I., SHEVTSOVA V.M. Convective stability of multicomponent fluids in the thermogravitational column // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 79, N 2. 026308.
- [18] RYZHKOV I.I., SHEVTSOVA V.M. On the cross-diffusion and Soret effect in multicomponent mixtures // Microgravity Science and Technology. 2009. Vol. 21, N 1-2. P. 37–40.
- [19] АНДРЕЕВ В.К., ЕФИМОВА М.В. Линеаризованная задача конвективного движения бинарной смеси с межфазной границей раздела // Вестник Красноярского гос. ун-та: Физ.-мат. науки. 2006. Вып. 1. С. 175–183.
- [20] ЕФИМОВА М.В. Неустойчивость поверхности раздела при наличии термодиффузии в условиях невесомости // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, № 1. С. 63–69.
- [21] ЕФИМОВА М.В. Неустойчивость поверхности раздела равновесного состояния двух бинарных смесей с учетом эффекта Соре // Там же. 2007. Т. 12, № 6. С. 34–43.
- [22] БЕКЕЖАНОВА В.Б. Исследование устойчивости равновесного состояния в модели конвекции с нелинейной зависимостью плотности от температуры и давления // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 2. С. 66–74.
- [23] ВЕРВОЛОВ В.И., СОКОЛЬНИКОВ В.М., ШИМАРАЕВ М.Н. Гидрометеорологический режим и тепловой баланс озера Байкал. М.; Л.: Наука, 1965. 373 с.
- [24] АНДРЕЕВ В.К., БЕКЕЖАНОВА В.Б. Неустойчивость равновесного состояния жидкости со свободной границей при наличии объемных источников тепла // МЖГ. 2008. № 2. С. 11–20.
- [25] АНДРЕЕВ В.К., БЕКЕЖАНОВА В.Б. Конвективная неустойчивость системы горизонтальных слоев слабосжимаемых жидкостей // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 15–22.
- [26] БЕКЕЖАНОВА В.Б. Неустойчивость двухслойной системы при наличии объемных источников тепла // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 4. С. 24–33.
- [27] БЕКЕЖАНОВА В.Б. Неустойчивость равновесного состояния жидкости в системе лед–вода с учетом радиационного нагрева // МЖГ. 2008. № 6. С. 6–14.
- [28] ГАПОНЕНКО Ю.А. Конвекция в горизонтальном слое жидкости в условиях колебания температуры на свободной границе // Вестник Красноярского гос. ун-та: Физ.-мат. науки. 2006. № 1. С. 175–184.
- [29] ГАПОНЕНКО Ю.А. Численное исследование устойчивости горизонтального слоя жидкости со свободной границей при периодических колебаниях температуры // Материалы V Всерос. научной конф. Томск, 2006. С. 230–231.
- [30] АНДРЕЕВ В.К., ГАПОНЕНКО Ю.А. Математическое моделирование конвективных течений. Красноярск: КрасГУ, 2006. 392 с.
- [31] АНДРЕЕВ В.К., ГАПОНЕНКО Ю.А., ГОНЧАРОВА О.Н., ПУХНАЧЁВ В.В. Современные математические проблемы конвекции. М.: Физматлит, 2007. 368 с.