

Исследование бесконечных групп с условиями конечности (краткий обзор)*

В. И. СЕНАШОВ, В. П. ШУНКОВ

Учреждение Российской академии наук

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

e-mail:sen@icm.krasn.ru

Приведен краткий обзор некоторых результатов по теории групп, полученных в Институте вычислительного моделирования СО РАН.

Ключевые слова: бесконечные группы, условия конечности, периодические группы.

Академическая научная школа по теории групп появилась и получила свое развитие благодаря поддержке академиков АН СССР А.И. Мальцева, Л.В. Киренского и член-корр. АН СССР М.И. Каргаполова. Начало этой школе дал прибывший в середине 1960 г. из Свердловска в Красноярск (Красноярский государственный университет) научный десант молодых алгебраистов, состоящий из В.М. Бусаркина, Ю.М. Горчакова и В.П. Шункова. В настоящей статье речь пойдет об одной ветви школы, руководимой В.П. Шунковым.

Интенсивные исследования в области теории групп начались с 1975 г. с приходом в Вычислительный центр СО АН СССР (с 1998 г. — Институт вычислительного моделирования СО РАН) д-ра физ.-мат. наук В.П. Шункова, которого по рекомендации Г.И. Марчука директор института В.Г. Дулов пригласил на должность старшего научного сотрудника.

Исследования В.П. Шункова по теории групп начались еще на Урале, в Пермском государственном университете. Руководителем его первой курсовой работы “Описание конечных групп, в которых нормализатор любой подгруппы нормален в группе” стал доцент ПГУ молодой кандидат наук М.И. Каргаполов, научным руководителем дипломной работы (1959 г.) был зав. кафедрой алгебры ПГУ д-р физ.-мат. наук, профессор С.Н. Черников, пригласивший способного студента к себе в аспирантуру.

По окончании ПГУ Владимир Петрович поступил в аспирантуру этого вуза, но вслед за своим научным руководителем С.Н. Черниковым, перешедшим на работу в Уральский государственный университет (г. Свердловск), был переведен в аспирантуру УрГУ. Здесь Владимир Петрович продолжал обучение под руководством зав. отделом теории групп Уральского филиала МИАН им. В.А. Стеклова профессора С.Н. Черникова и защитил кандидатскую диссертацию “О группах, разложимых в равномерное произведение p -подгрупп”.

Первая работа В.П. Шункова по теории групп была опубликована в 1964 г. в Докладах АН СССР [1]. За достижения в разработке теории локально конечных групп

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 09-01-00395), гранта Сибирского федерального университета (проект — элитное математическое образование в СФУ).

© ИВТ СО РАН, 2009.

В.П. Шунков был удостоен премии им. А.И. Мальцева Российской академии наук, а в 1999 г. награжден медалью ордена “За заслуги перед отечеством” II степени.

С началом научной деятельности в Вычислительном центре СО АН СССР В.П. Шунков приступает и к научно-педагогической работе в аспирантурах ВЦ и КГУ. С 1978 г. им подготовлено 23 кандидата наук, из которых шестеро стали докторами наук. Еще одна кандидатская диссертация, выполненная под руководством В.П. Шункова, принята к защите на 2009 г.

За последние тридцать лет В.П. Шунковым и его учениками было разработано новое направление так называемой положительной теории периодических групп, которое получило безусловное признание как у нас в стране, так и за рубежом. При создании этой теории показана исключительная важность примеров групп, построенных П.С. Новиковым, С.И. Адяном и А.Ю. Ольшанским. В.П. Шунковым и его учениками построена теория сопряженно бипримитивно конечных групп (за этим классом групп в последние годы закрепилось название “группы Шункова”), охарактеризованы группы с условием минимальности, группы Фробениуса, слойно конечные группы, почти слойно конечные группы, черниковские группы, обобщенно черниковские группы в классе периодических групп и в классе всех групп. Получен ряд признаков простоты групп. Итоги исследований по этим направлениям представлены в монографиях [2–6].

Начиная с 1970-х гг. под руководством В.П. Шункова регулярно работает Красноярский городской алгебраический семинар (проведено более 600 заседаний).

Остановимся более подробно на результатах, полученных в Институте вычислительного моделирования СО РАН.

Теория сопряженно бипримитивно конечных групп (групп Шункова) началась с работы В.П. Шункова [7]. Далее она получила развитие в работах В.О. Гомера, М.Н. Ивко, А.Н. Измайлова, Ал.Н. Остыловского, А.Н. Остыловского, И.И. Павлюка, А.М. Попова, А.В. Рожкова, Е.И. Седовой, В.И. Сенашова, А.И. Созутова, Н.Г. Сучковой, А.В. Тимофеевко, А.А. Черепа, А.А. Шафиро, А.К. Шлепкина, Л. Гамуди.

Известная проблема минимальности о строении бесконечной группы с условием минимальности, поставленная в середине XX в., только сравнительно недавно была решена отрицательно А.Ю. Ольшанским. В.П. Шунковым совместно с А.Н. Остыловским доказано, что всякая сопряженно бипримитивно конечная группа с условием минимальности для подгрупп является черниковской [8]. Тем самым проблема минимальности была решена положительно в классе сопряженно бипримитивно конечных групп. В.П. Шункову совместно с Н.Г. Сучковой удалось усилить этот результат для групп с условием минимальности для абелевых подгрупп [9]. В.П. Шунковым в работе [9] и затем им же совместно с А.М. Поповым в работе [10] охарактеризованы черниковские группы в классе групп без инволюций и в классе всех групп при достаточно слабых условиях конечности. Периодические почти локально разрешимые группы, удовлетворяющие условию примарной минимальности, охарактеризованы В.И. Сенашовым в классе периодических групп и в классе всех групп [11–13].

В.П. Шункову [14] принадлежит плодотворная идея при доказательстве признаков простоты бесконечных групп рассматривать произвольные, не обязательно конечные группы Фробениуса $L_g = \langle a, a^g \rangle$ с циклическим инвариантным множителем $\langle a \rangle$. Им же получен ряд признаков простоты для бесконечных групп в [14] и совместно с А.И. Созутовым в [15, 16]. В.П. Шунковым охарактеризованы бесконечные группы Фробениуса [17–19]. На основе примеров свободных бернсайдовских групп [20] им построен пример группы, обладающей парой Фробениуса, но не являющейся группой Фробе-

ниуса [21] (конечная группа, обладающая парой Фробениуса, по знаменитой теореме Фробениуса является группой Фробениуса).

Бесконечные периодические группы с сильно вложенной подгруппой интенсивно изучались В.П. Шунковым и А.Н. Измайловым в начале 1980-х гг. [22]. В последние годы группам с сильно вложенной подгруппой посвящены работы Т. Петерфалви, В.Д. Мазурова, А.И. Созутова и Н.М. Сучкова.

В работах [6, 23–26] ([23] — с соавторами) В.П. Шунков доказал ряд теорем вложения для элементов простых порядков в группах. Тем самым решался вопрос: в какие подгруппы изучаемой группы вкладывается элемент простого порядка и как он в них расположен? При этом на саму группу накладываются достаточно слабые ограничения. В.И. Сенашовым изучалась подгрупповая структура групп, в частности, строение как конечных, так и бесконечных силовских подгрупп в бесконечных группах [27, 28].

В.П. Шунков ввел понятие параметра вложения инволюции и на его основе изучил группы с конечно вложенной инволюцией [19]. На основе этого понятия О.В. Головановой написана серия работ и в 2006 г. защищена кандидатская диссертация. В связи с результатами, полученными при изучении групп с почти регулярной инволюцией и групп с конечно вложенной инволюцией, В.П. Шунковым поставлена глобальная проблема о переносе классификации конечных простых неабелевых групп в класс периодических групп с инволюциями.

В.П. Шунковым введен класс M_p -групп, являющийся далеко идущим обобщением черниковской группы. Этот класс групп был подробно изучен в работах [5, 29–31]. Недавно данное направление получило продолжение в работе С.Н. Козулина, В.И. Сенашова, В.П. Шункова [32], в которой получено описание M_p -группы с ручками простых порядков, отличных от трех. Им также введен класс T_0 -групп и получена абстрактная характеристика этого класса в классе всех групп. На основе полученной характеристики удалось установить связь между конечной группой и бесконечными бернсайдовскими группами. Результаты, касающиеся данного класса, опубликованы в [33–36]. В 2008 г. вышла в свет работа В.И. Сенашова, В.П. Шункова [37], посвященная описанию результатов, полученных для этого и других классов бесконечных групп.

Одновременно изучаются группы, удовлетворяющие условиям конечности, наложенным на системы подгрупп. В частности, эти условия накладываются на некоторые дупорожденные подгруппы и на слои элементов в периодических локально разрешимых подгруппах. Слоино конечные группы (группы, множество элементов данного порядка которых конечно) охарактеризованы В.И. Сенашовым в классе периодических групп [38, 39]. В.П. Шунковым совместно с В.И. Сенашовым [40] получено описание групп со слойно конечной периодической частью, у которых множество элементов конечного порядка является слойно конечной группой. В.И. Сенашовым также охарактеризованы группы со слойно конечной периодической частью [41, 42].

Почти слойно конечные группы, являющиеся конечными расширениями слойно конечных групп, представляют собой существенно более широкий класс групп, чем слойно конечные группы, в частности, в него входят все черниковские группы. Подобно проблеме Шмидта (будет ли конечной всякая группа, у которой любая собственная подгруппа конечна) правомерно поставить вопрос: какие свойства переносятся на всю группу с некоторой системы ее подгрупп? Этот вопрос решается В.П. Шунковым в работах [43–45] для условия почти слойной конечности в классе локально конечных групп. В.И. Сенашовым свойство почти слойной конечности с нормализаторов ее нетривиальных конечных подгрупп переносится на всю группу [43, 46–49]. В настоящее время

В.И. Сенашовым исследуются смешанные группы и устанавливаются признаки существования у таких групп почти слойно конечной периодической части [50]. При этом находит применение теория T_0 -групп, разрабатываемая В.П. Шунковым с конца 1980-х гг. Основы теории таких групп изложены в монографии [51].

В последние годы по данному направлению В.И. Сенашовым, А.И. Созутовым и В.П. Шунковым опубликованы три обзорных работы [52–54].

Под руководством В.П. Шункова подготовлены кадры высшей квалификации (в скобках указаны годы присуждения степеней кандидата и доктора физ.-мат. наук):

1. Н.С. Черников (1978, 1992);
2. А.Н. Остыловский (1978);
3. В.Г. Васильев (1980);
4. А.И. Созутов (1980, 1996);
5. Ив.И. Павлюк (1982);
6. А.А. Шафиро (1984);
7. А.Н. Измайлов (кандидатская диссертация написана в 1984 г.);
8. А.К. Шлепки (1985, 1999);
9. Е.И. Седова (Чубарова) (1985);
10. В.И. Сенашов (1985, 1998);
11. А.М. Попов (1988, 2007);
12. Н.Г. Сучкова (1989);
13. А.В. Тимофеенко (1991, докторская диссертация защищена в ноябре 2009 г.);
14. В.О. Гомер (1992);
15. Г.А. Троякова (1993);
16. М.Н. Ивко (1993);
17. А.А. Череп (1994);
18. Ал.Н. Остыловский (1996);
19. О.В. Пашковская (1999);
20. Е.Н. Яковлева (2002);
21. С.Н. Козулин (2005);
22. О.В. Голованова (2006);
23. М.В. Янченко (2008);
24. Ин.И. Павлюк (защита кандидатской диссертации назначена на декабрь 2009 г.).

Эти высококлассные специалисты в настоящее время плодотворно работают в области теории групп как в Институте вычислительного моделирования СО РАН, так и в других научных учреждениях России и ближнего и дальнего зарубежья.

Список литературы

- [1] Шунков В.П. О группах, разложимых в строгое равномерное произведение своих p -групп // Докл. АН СССР. 1964. Т. 154. С. 542–545.
- [2] Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П. Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск, Изд-во КГТУ, 2004.
- [3] Сенашов В.И. Слойно конечные группы. Новосибирск: Наука, 1993.
- [4] Сенашов В.И., Шунков В.П. Группы с условиями конечности. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2001.
- [5] Шунков В.П. M_p -группы. М.: Наука, 1990.

- [6] Шунков В.П. О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992.
- [7] Шунков В.П. О бесконечных централизаторах в группах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 1. С. 224–226.
- [8] Остыловский А.Н., Шунков В.П. О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности // Исследования по теории групп. Красноярск, 1975. С. 32–48.
- [9] Сучкова Н.Г., Шунков В.П. О группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 4. С. 445–469.
- [10] Попов А.М., Шунков В.П. Характеризация одного класса черниковских групп // Там же. 1987. Т. 26, № 3. С. 358–375.
- [11] Сенашов В.И. Характеризация обобщенно черниковских групп // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 3. С. 309–310.
- [12] Сенашов В.И. Характеризация обобщенно черниковских групп в группах с инволюциями // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 4. С. 577–588.
- [13] Сенашов В.И. Характеризация групп с обобщенно черниковской периодической частью // Там же. 2000. Т. 67, вып. 2. С. 270–275.
- [14] Шунков В.П. Об одном признаке простоты групп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 5. С. 576–603.
- [15] Созутов А.И., Шунков В.П. О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами // Там же. 1977. Т. 16, № 6. С. 711–735.
- [16] Созутов А.И., Шунков В.П. О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами. Часть 2 // Там же. 1979. Т. 18, № 2. С. 206–223.
- [17] Шунков В.П. Характеризация некоторых конечных групп Фробениуса // Мат. заметки. 1988. Т. 43, № 6. С. 725–732.
- [18] Шунков В.П. О парах Фробениуса вида $(F\lambda V, V)$ // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 10. С. 1311–1324.
- [19] Шунков В.П. Группы с конечно вложенной инволюцией // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 1. С. 102–123.
- [20] Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
- [21] Созутов А.И., Шунков В.П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 4. С. 495–506.
- [22] Измайлов А.Н., Шунков В.П. Два признака простоты групп с бесконечно изолированной подгруппой // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 6. С. 647–669.
- [23] Козулин С.Н., Сенашов В.И., Шунков В.П. О группах Фробениуса с инвариантным множителем $SL_2(3)$ // Укр. мат. журн. 2006. Т. 58, № 6. С. 765–777.
- [24] Шунков В.П. О расположении элементов простых порядков в группах // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 4. С. 463–483.
- [25] Шунков В.П. О примарных элементах в группах // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 7-8. С. 1070–1078.
- [26] Шунков В.П. О расположении инволюций в группе // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 208–219.
- [27] Сенашов В.И. Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых периодических группах Шункова // Дискретная математика. 2002. Т. 14, № 4. С. 133–152.

- [28] СЕНАШОВ В.И. О силовских подгруппах периодических групп Шункова // Укр. мат. журн. 2005. Т. 57, № 11. С. 1548–1556.
- [29] ШУНКОВ В.П. M_p -группы // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 4. С. 445–475.
- [30] ШУНКОВ В.П. M_p -группы с ядром произвольного ранга // Там же. 1987. Т. 26, № 1. С. 84–105.
- [31] ШУНКОВ В.П. M_p -группы с регулярной ручкой // Там же. 1987. Т. 26, № 2. С. 220–266.
- [32] КОЗУЛИН С.Н., СЕНАШОВ В.И., ШУНКОВ В.П. Группы с ручками порядка, отличного от трех // Укр. мат. журн. 2004. Т. 56, № 8. С. 1030–1042.
- [33] СЕНАШОВ В.И. Об одном вопросе В.П. Шункова // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1154–1156.
- [34] ШУНКОВ В.П. T_0 -группы // Мат. труды. 1998. Т. 1, № 1. С. 139–202.
- [35] ШУНКОВ В.П. T_0 -группа и ее место в теории групп // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 4. С. 572–576.
- [36] SHUNKOV V.P. On placement of prime order elements in a group // Там же. 2002. Т. 54, № 6. С. 881–884.
- [37] SENASHOV V.I., SHUNKOV V.P. New Classes of Infinite Groups // Mashad J. Math. Sci. Vol. 1, N 1. 2008. P. 23–29.
- [38] СЕНАШОВ В.И. Характеризация слойно конечных групп в классе периодических групп // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 5. С. 608–617.
- [39] СЕНАШОВ В.И. Характеризация слойно конечных групп // Там же. 1989. Т. 28, № 6. С. 687–704.
- [40] СЕНАШОВ В.И., ШУНКОВ В.П. Об одной характеристике бесконечных групп с конечной периодической частью // Там же. 1983. Т. 22, № 1. С. 93–112.
- [41] СЕНАШОВ В.И. Группы со слойно конечной периодической частью // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1374–1386.
- [42] СЕНАШОВ В.И. Характеризация групп со слойно конечной периодической частью // Укр. мат. журн. 2001. Т. 53, № 3. С. 314–319.
- [43] СЕНАШОВ В.И., ШУНКОВ В.П. Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискретная математика. 2003. Т. 15, № 3. С. 91–104.
- [44] SENASHOV V.I., SHUNKOV V.P. Almost layer-finiteness of the periodic part of groups without involutions // Discrete Math and Appl. VSP. 2003. Vol. 13, N 4. P. 391–404.
- [45] SHUNKOV V.P. Almost layer-finiteness of locally finite groups // AMSE Trans. Advances in Modelling and Analysis. 2005. Vol. 42, N 3. P. 45–55.
- [46] СЕНАШОВ В.И. Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 7-8. С. 1002–1008.
- [47] SENASHOV V.I. Groups with minimality condition // Proc. of the Intern. Conf. “Infinite Groups 1994”. Held in Ravello, Italy. / Eds. Francesco de Giovanni and Martin L. Newell. Berlin; New York: de Gruyter, 1995. P. 229–234.
- [48] СЕНАШОВ В.И. Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 4. С. 472–485.
- [49] СЕНАШОВ В.И. Почти слойная конечность периодической группы без инволюций // Там же. 1999. Т. 51, № 11. С. 1529–1533.

- [50] СЕНАШОВ В.И. О группах Шункова с сильно вложенной подгруппой // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 203–210.
- [51] ШУНКОВ В.П. T_0 -группы. Новосибирск: Наука, 2000.
- [52] СЕНАШОВ В.И., СОЗУТОВ А.И., ШУНКОВ В.П. Группы с условиями конечности // Успехи мат. наук. 2005. Т. 69, № 5 (365). С. 1–46.
- [53] SENASHOV V.I. Characterizations of layer-finite groups and their extensions // J. Siberian Federal Univ. Math. and Phys. 2009. Vol. 2, N 3. P. 279–287.
- [54] SHUNKOV V.P. Groups with conditions of finiteness // Acta Appl. Math. 2005. Vol. 85, N 1-3. P. 277–283.

Поступила в редакцию 23 октября 2009 г.