Вычислительные технологии **Том 15, № 2, 2010**

Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода*

В. В. Васин, Т. И. Серёжникова
Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
e-mail: vasin@imm.uran.ru, sti@imm.uran.ru

Построен и исследован регуляризующий алгоритм для восстановления негладкого решения уравнений Фредгольма первого рода. Алгоритм основан на использовании тихоновской регуляризации с недифференцируемым стабилизатором с привлечением проксимального метода и субградиентного процесса для решения задачи негладкой минимизации. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма, негладкое решение, тихоновская регуляризация, проксимальный метод, субградиентный процесс.

Введение

Вычислительная практика решения интегральных уравнений первого рода убедительно показала, что применение в тихоновской регуляризации стабилизаторов в форме вариации различных типов позволяет значительно улучшить качество аппроксимации разрывных решений по сравнению с классической квадратичной регуляризацией, когда используется гильбертова норма L_2 или W_2^n (см. [1–4]). При применении вариации функции в качестве стабилизатора удается обосновать кусочно-равномерную сходимость регуляризованных решений, что, по-видимому, и объясняет преимущество такого рода регуляризующих алгоритмов при восстановлении негладких решений.

Однако при численной реализации этих методов, т. е. при построении регуляризованного семейства приближенных решений, приходится иметь дело с задачей негладкой минимизации. Здесь наметились два подхода: а) негладкий функционал предварительно аппроксимируется семейством дифференцируемых функционалов, а затем применяются традиционные методы гладкого анализа, например, методы градиентного или ньютоновского типа [1, 2]; б) для регуляризованной негладкой выпуклой задачи минимизации тихоновского функционала применяются субградиентные процессы [3, 4].

В работе [5] был предложен другой параметрический класс недифференцируемых стабилизирующих функционалов на основе нормы пространства Липшица и обоснована равномерная сходимость тихоновских аппроксимаций к непрерывному необязательно дифференцируемому решению исходного уравнения. Оказалось, что при подходящем выборе управляющих параметров регулярные алгоритмы, построенные в рамках упомянутой регуляризации с привлечением prox-метода, вполне пригодны для восстанов-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00053) и Междисциплинарного проекта УрО РАН.

ления негладких (разрывных) решений интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

Заметим, что идея о возможности использования нормы пространства Липшица в качестве стабилизатора была высказана в обзорной статье [6].

В настоящей работе дается описание и обоснование всех этапов алгоритма и приводятся результаты численных экспериментов по решению интегрального уравнения, возникающего при продолжении геофизических полей.

1. Теоремы сходимости приближенных решений

Пусть Π — компакт в R^n. Определим множество функций, удовлетворяющих на Π условию Липшица

$$\exists \quad d > 0 : |u(x_1) - u(x_2)| \leq d\, |x_1 - x_2|^\mu \quad \forall\ x_1, x_2 \in \Pi, \tag{1}$$

где $0 < \mu \leq 1$, $|x_1 - x_2| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_{1i} - x_{2i}|^2\right)^{1/2}$. Обозначим через $H^\mu = H^\mu[\Pi]$ множество функций, удовлетворяющих на Π условию (1) с фиксированным параметром μ. По аналогии со случаем функции одной переменной определим норму

$$||u(x)||_{H^\mu} = \max_{x \in \Pi} |u(x)| + \sup_{x_1, x_2 \in \Pi} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^\mu},$$

относительно которой H^μ является банаховым пространством (см. [7]).

Рассмотрим линейное уравнение

$$Au = f \tag{2}$$

с оператором A, действующим из пространства H^μ в пространство непрерывных функций $C(\Pi)$, и единственным решением $\hat{u} \in H^\mu$. Непрерывность обратного оператора A^{-1} не предполагается, поэтому (2) относится к классу существенно некорректных задач. При приближенно заданной правой части f_δ, $||f - f_\delta|| \leq \delta$, для построения регуляризованного семейства приближенных решений используем метод Тихонова в виде [5, 7]

$$\min\{||Au - f_\delta||_{C[\Pi]} + \alpha ||u||_{H^\mu} : u \in H^\mu[\Pi]\}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть A — линейный непрерывный оператор в $C(\Pi)$, $Ker(A) = \{0\}$, $||f - f_\delta|| \leq \delta$. Тогда задача имеет решение u^α, возможно неединственное, и при связи параметров $\alpha(\delta) \to 0$, $\dfrac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0$, $\delta \to 0$ имеет место равномерная сходимость*

$$\lim_{\delta \to 0} ||u^{\alpha(\delta)} - \hat{u}||_{C(\Pi)} = 0,$$

кроме того,

$$\lim_{\delta \to 0} ||u^{\alpha(\delta)}||_{H^\mu} = ||\hat{u}||_{H^\mu}.$$

Замечание. Если вместо липшицевой нормы в (3) использовать стабилизатор

$$\Omega(u) = ||u||_{H^\mu} + \frac{1}{2} ||u||^2_{L_p}, \quad 1 < p < \infty, \tag{4}$$

то решение u^α задачи (3) единственно.

Используя метод Ритца, можно построить аппроксимации регуляризованного приближенного решения u^α элементами конечномерного пространства кусочно-линейных функций. Предположим, что компакт П допускает разбиение симплексами n-го порядка с максимальным диаметром $h = \max_m \Delta_m$. Обозначим через U_h конечномерное подпространство кусочно-линейных (линейных на каждом симплексе) функций.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда конечномерная задача*

$$\min\{||Au - f_\delta||_{C[\Pi]} + \alpha[||u_h||^2_{L_p[\Pi]} + ||u_h||_{H^\mu}] : u_h \in U_h\} \tag{5}$$

имеет единственное решение u_h^α, для которого выполнены соотношения

$$\lim_{h\to 0} ||u_h^\alpha - u^\alpha||_{C[\Pi]} = 0, \quad \lim_{h\to 0} ||u_h^\alpha||_{H^\mu[\Pi]} = ||u^\alpha||_{H^\mu[\Pi]},$$

где u^α — решение, полученное методом Тихонова со стабилизатором (4).

Как показали численные эксперименты, выполненные для интегральных уравнений Фредгольма первого рода с негладкими (разрывными) решениями, при малых значениях параметра α субградиентные методы работают неудовлетворительно, в результате чего не удается восстановить, например, хорошо выраженный разрыв или излом. С другой стороны, при относительно больших значениях α получается грубая аппроксимация решения при данном методе регуляризации.

В значительной степени эти трудности удается преодолеть, если для устойчивой аппроксимации экстремального элемента u^α использовать prox-метод (итерированный вариант метода Тихонова), а именно: если обозначить целевой функционал в (3) через $\Phi^\alpha(u)$, то итерационный процесс для аппроксимации u^α строится следующим образом:

$$u^k = \arg\min\{\Phi^\alpha(u) + \beta\,||u - u^{k-1}||^2_H \ : u \in U\}, \tag{6}$$

где $\beta > 0$, $||\cdot||_H$ — некоторая гильбертова норма.

В отличие от выпуклого функционала $\Phi^\alpha(u)$ функционал $\Phi^{\alpha,\beta} = \Phi^\alpha(u) + \beta\,||u - v||^2_H$ является сильно выпуклым, что гарантирует устойчивый счет при нахождении u^k субградиентным методом. По-видимому, это обстоятельство объясняет факт повышения качества аппроксимации негладкого решения, однако за счет увеличения трудоемкости алгоритма.

2. Алгоритм решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода и численные эксперименты

Рассмотрим одномерное интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$Au \equiv \int_0^1 K(x,y)u(x)dx = f(y), \quad 0 \le y \le 1 \tag{7}$$

с непрерывными по своим переменным функциями $K(x,y)$, $f(y)$ и исследуем более детально алгоритм, предложенный в предыдущем разделе. Прежде всего заметим, что конечномерная аппроксимация (см (5)), описанная в теореме 2, не ведет к полной дискретизации регуляризованной задачи, поэтому используем иную, более удобную для численной реализации схему [7].

Зададим равномерную сетку по x и по y с шагом $h = 1/N$ и аппроксимируем интеграл формулой правых прямоугольников.

Введем обозначения: $u(x_j) = u_j$, $f_\delta(y_i) = f_i$. Тогда дискретный аналог регуляризованной задачи со стабилизатором (4) принимает вид

$$\min_{u_i} \left\{ \max_{1\le j\le N} |\sum_{j=1}^{N} hK(y_i, x_j)u_j - f_i| + \right.$$

$$\left. +\alpha \left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} h|u_j|^2 + \max_{1\le j\le N}|u_j| + \max_{i\ne j}\frac{|u_i-u_j|}{|x_i-x_j|^\mu} \right] : \{u_j\}_1^N \in R^N \right\}. \tag{8}$$

Теорема 3. *Экстремальная задача (8) имеет единственное решение $\bar u^N = (\bar u_1, \bar u_2, ..., \bar u_N)$, и последовательность кусочно-линейных восполнений $\bar u^N(x)$, построенных по вектору $\bar u^N$, равномерно сходится к решению задачи*

$$\min \left\{ ||Au - f||_C + \alpha \left[\frac{1}{2}||u||^2_{L_2} + ||u||_{H^\mu} \right] : u \in H^\mu \right\}.$$

Теперь дискретный аналог prox-метода (6) принимает форму

$$u^k = \arg\min \{\Phi_N^\alpha(u) + \beta\, ||u - u^{k-1}||^2_{R_N} \ : u \in R^N\} = \Phi^*_{N,k}, \tag{9}$$

где Φ_N^α — целевая функция в задаче (8).

Так как целевая функция в (9) является сильно выпуклой, то prox-отображение (см. [8]), определяющее итерационный процесс (9), принадлежит классу псевдосжимающих отображений, и, следовательно, prox-метод (9) сходится к решению задачи (8) (см. [9, 10]). Поскольку выпуклая функция субдифференцируема, то при фиксированном u^{k-1} для аппроксимации u^k применимы субградиентные методы.

Наиболее простой вариант субградиентного метода имеет вид [11]

$$u^{k,\nu+1} = u^{k,\nu} - \lambda_k \frac{v^{k,\nu}}{||v^{k,\nu}||}, \quad \nu = 0, 1, 2, ..., n_k, \tag{10}$$

где $v^{k,\nu} \in \partial\Phi^{\alpha,\beta}_{N,k}(u^{k,\nu})$, $\Phi^{\alpha,\beta}_{N,k}$ — целевая функция в задаче (9), $\partial\Phi$ означает субдифференциал функционала Φ. Как известно, в общем случае для выпуклой функции при $\lambda_k > 0$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\lambda_k = \infty$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\lambda_k^2 < \infty$ установлена сходимость итераций по функционалу [11], но поскольку $\Phi^{\alpha,\beta}_{N,k}$ — сильно выпуклая функция, то имеет место сходимость по аргументу, т. е. $\lim\limits_{\nu\to\infty} ||u^{k,\nu} - u^k|| = 0$.

Если известна некоторая оценка $\tilde\Phi_{N,k}$ для оптимального значения $\Phi^*_{N,k}$ в задаче (9), т. е.

$$\tilde\Phi_{N,k} \le \Phi^*_{N,k} + \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k > 0,$$

то целесообразно перейти от задачи (9) к решению выпуклого неравенства

$$\Phi^{\alpha,\beta}_{N,k}(u) - \tilde\Phi_{N,k} \le 0. \tag{11}$$

Теперь для приближенного решения неравенства (11) применим более эффективный итерационный процесс фейеровского типа [12]

$$u^{k,\nu+1} = u^{k,\nu} - \lambda \left(\Phi^{\alpha\,\beta}_{N,k}(u^{k,\nu}) - \tilde\Phi_{N,k}\right)^+ \frac{v^{k,\nu}}{||v^{k,\nu}||^2}, \tag{12}$$

где $v^{k,\nu} \in \partial\Phi^{\alpha,\beta}_{N,k}(u^{k,\nu}),\ 0 < \lambda < 2,\ \nu = 0,1,2,...,n_k$, а величина $\tilde{\Phi}_{N,k}$ может уточняться в процессе счета.

Важно отметить, что итерации u^k prox-метода (9) могут вычисляться субградиентными методами (10), (12) с некоторой погрешностью с сохранением сходимости, а именно, справедлива следующая теорема, обоснование которой следует из результатов [13, 14].

Теорема 4. *Пусть T — prox-отображение, т. е.*

$$T\ :\ v \to arg\,min\{\Phi^{\alpha}_N(u) + \beta\,||u - v||^2\ : u \in R^N\}.$$

Пусть prox-метод реализуется с погрешностью

$$\|z^{k+1} - T(z^k)\| \le \gamma_k, \quad z^0 \in R^N, \quad \sum_{i=0}^{\infty}\gamma_k < \infty.$$

Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} ||z^k - \bar{u}^N|| = 0$, где $\bar{u}^N$ — решение задачи (8).

Замечание. Если известна априорная информация о решении уравнения (2) вида $u \in Q$, где Q — выпуклое замкнутое множество, заданное, например, системой линейных или выпуклых неравенств, то вместо prox-метода можно использовать итерационный процесс [14]

$$u^{k+1} = P_Q(T(u^k)),$$

где T — prox-отображение, P_Q — фейеровское отображение, отвечающее за ограничение $u \in Q$.

Таким образом, все описанные этапы алгоритма, построенного на основе тихоновской регуляризации со стабилизатором в форме нормы Липшица, prox-метода, дискретной аппроксимации квадратурным методом и субградиентного процесса негладкой оптимизации, являются обоснованными, следовательно, мы имеем дело с регуляризующим алгоритмом.

В формулах (12) субдифференциалы каждого из слагаемых целевой функции вычисляются по известным правилам субдифференциального исчисления. Приведем, например, формулу для субдифференциала третьего слагаемого

$$\varphi(u) = \max_{0\le i,j\le N} \frac{|u_i - u_j|}{|x_i - x_j|^{\mu}}. \tag{13}$$

Обозначим через $J(u)$ множество пар индексов i_0, j_0, для которых в (13) достигается максимум. Определим вектор

$$v_{i_0 j_0} = \left(0,...,0,\frac{1}{|x_{i_0} - x_{j_0}|^{\mu}},0,...,0,-\frac{1}{|x_{i_0} - x_{j_0}|^{\mu}},0,...,0\right),$$

где ненулевые элементы занимают позиции с номерами i_0 и j_0; тогда

$$\partial\varphi(u) = \begin{cases} M = \mathrm{co}\{v_{i_0 j_0}\}_{i_0,j_0\in J(u)}, & \text{если}\quad u_{i_0} - u_{j_0} > 0,\\ \mathrm{co}\{M\bigcup(-M)\}, & \text{если}\quad u_{i_0} - u_{j_0} = 0,\\ -M = \mathrm{co}\{-v_{i_0 j_0}\}_{i_0,j_0\in J(u)}, & \text{если}\quad u_{i_0} - u_{j_0} < 0,\end{cases}$$

где $\mathrm{co}\{M\}$ — выпуклая оболочка множества M, $u = (u_0, u_2, \ldots, u_N)$.

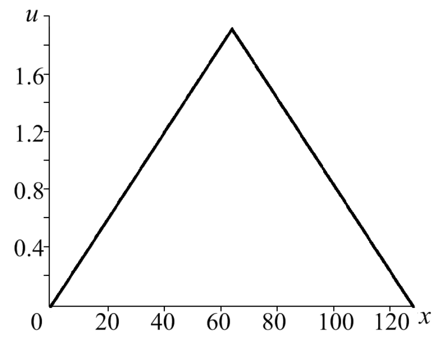
Для проведения численных экспериментов рассматривается решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода [15]

$$Au \equiv \int\limits_0^2 \frac{H}{H^2 + (x-y)^2} u(x) ds = f(y), \quad 0 < H \leq 2, \quad 0 \leq x, y \leq 2, \tag{14}$$

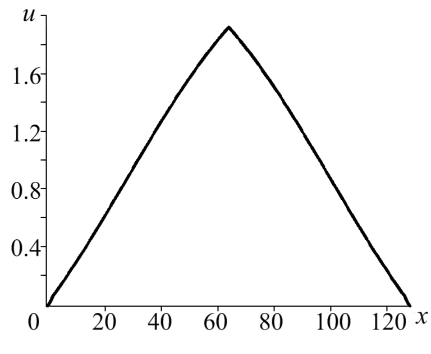
которое моделирует ситуацию, когда необходимо найти продолженное на глубину $x = H$ гравитационное поле $u(x)$ по измеренному на земной поверхности полю $f(y)$ (плоский случай). Были проведены расчеты по восстановлению трех модельных решений. Использовалось нулевое начальное приближение. В формуле (8)для нормы Липшица полагалось $\mu = 0.001$, в (9) задавалось $\beta = 300$. Количество итераций по формулам (12) принималось равным 60. Для расчета вариантов с точной правой частью для задания параметра регуляризации использовались $\alpha = 10^{-4},\ 10^{-5}$, а для расчетов с возмущенной правой частью — $\alpha = 10^{-3},\ 10^{-4}$. Понятно, что с ростом величины параметра H, $0 < H \leq 2$, процесс восстановления приближенного решения задачи (14) усложняется, поскольку свойства матрицы ухудшаются. Для моделей 1 и 2 полагалось $H = 2$, для модели 3 — $H = 1$.

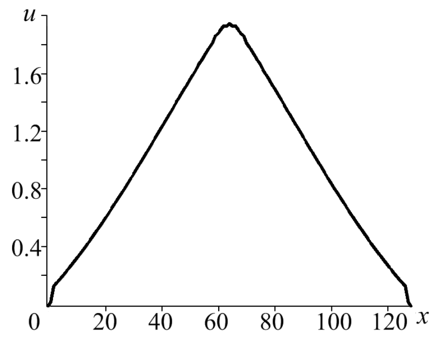
Для каждой модели рассчитывался вариант с точной правой частью и вариант с возмущенной правой частью, величина возмущения полагалась $||f - f_\delta||_C = \delta \leq 0.0108$.

Точная правая часть для каждой модели рассчитывалась подстановкой точного решения u в сеточный вариант операторного уравнения $Au = f$.



а





б *в*

Рис. 1. Модель 1. *а* — точное решение; *б* — восстановленное решение при точной правой части ($\Delta_1 = 1.7 \times 10^{-2}, \Delta_2 = 1.0 \times 10^{-6}$); *в* — восстановленное решение при возмущенной правой части ($\Delta_1 = 2.1 \times 10^{-2}, \Delta_2 = 8.4 \times 10^{-3}$)

Точное решение $u(x)$ $(0 \leq x, u \leq 2)$ для каждой модели рассчитывалось на равномерной сетке по x, состоящей из 129 узлов с шагом $h = 2/128 \approx 0.016$, по следующим формулам:

$$\text{Модель 1 } u_i = \begin{cases} 1/32 \times i, & i = 0, ..., 64, \\ 1/32 \times (128 - i), & i = 65, ..., 128. \end{cases}$$

$$\text{Модель 2 } u_i = \begin{cases} 0, & i = 0, ..., 42, \\ 2, & i = 43, ..., 85, \\ 0, & i = 86, ..., 128. \end{cases}$$

$$\text{Модель 3 } u_i = \begin{cases} 0, & i = 0, ..., 15, \\ 1/8 \times (i - 16), & i = 16, ..., 32, \\ 2 - 1/32(i - 32), & i = 33, ..., 64, \\ u_{128-i}, & i = 65, ..., 128. \end{cases}$$

В каждом варианте расчетов для полученного приближения вычислялись относительная погрешность по решению Δ_1 и относительная погрешность по невязке Δ_2:

$$\Delta_1 = \frac{||x - \tilde{x}||_{L_2}}{||x||_{L_2}}, \quad \Delta_2 = \frac{||A\tilde{x} - f||_{L_2}}{||f||_{L_2}}.$$

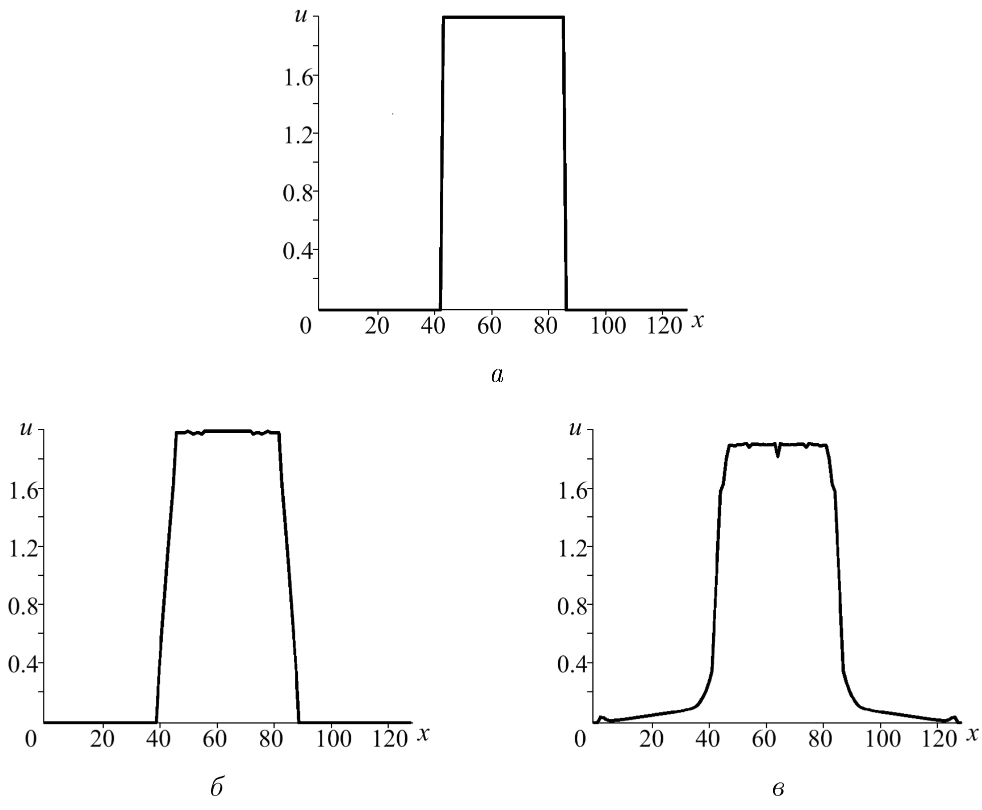


Рис. 2. Модель 2. *а* — точное решение; *б* — восстановленное решение при точной правой части $(\Delta_1 = 7.6 \times 10^{-4}, \Delta_2 = 6.9 \times 10^{-4})$; *в* — восстановленное решение при возмущенной правой части $(\Delta_1 = 3.9 \times 10^{-2}, \Delta_2 = 2.7 \times 10^{-2})$

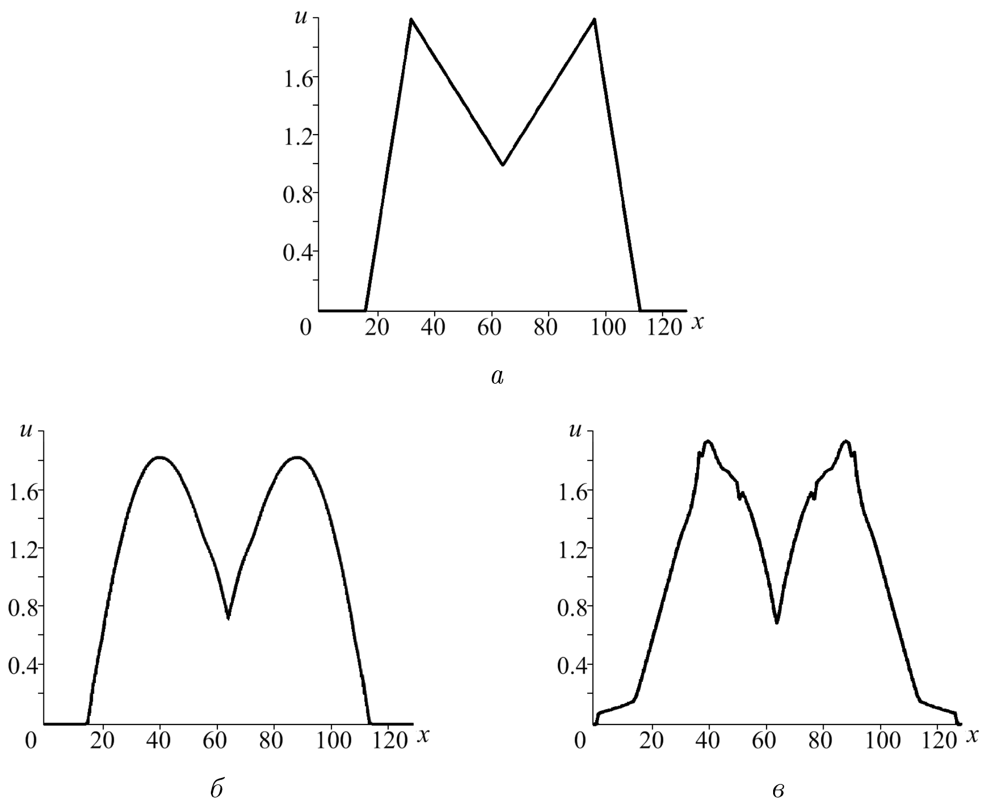


Рис. 3. Модель 3. *а* — точное решение; *б* — восстановленное решение при точной правой части ($\Delta_1 = 1.6 \times 10^{-4}, \Delta_2 = 9.5 \times 10^{-5}$); *в* — восстановленное решение при возмущенной правой части ($\Delta_1 = 7.1 \times 10^{-3}, \Delta_2 = 5.1 \times 10^{-3}$)

На рис. 1 – 3 приведены графики восстановленных решений как для точных, так и для возмущенных данных для трех модельных решений. На всех рисунках горизонтальная ось — номера узлов равномерной сетки по аргументу x.

Анализ численного моделирования показывает, что предложенный алгоритм достаточно хорошо восстанавливает решение с изломом (разрыв в производной) и разрывом первого рода самой функции, сохраняя структуру исходной модели. Несколько хуже алгоритм работает для более сложной модели 3. По-видимому, в данном случае для повышения качества решения необходимо использовать вместо $u_0 \equiv 0$ начальное приближение, учитывающее некоторые особенности решения, а также более тщательно выбирать управляющие параметры α, β.

Заключение

В работе предложен регулярный алгоритм, который позволяет восстанавливать негладкие решения интегральных уравнений первого рода. Алгоритм основан на тихоновской регуляризации с недифференцируемым стабилизатором (в форме нормы пространства Липшица) с привлечением prox-метода и субградиентных процессов для решения задачи негладкой минимизации. Численные эксперименты подтверждают, что использование prox-метода существенно повышает качество приближенного решения, поскольку дает возможность применять субградиентные процессы для сильно выпуклой функции, что обеспечивает устойчивость счета.

Список литературы

[1] Леонов А.С. Кусочно-равномерная регуляризация двумерных некорректных задач с разрывными решениями. Численный анализ // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 12. С. 1939–1944.

[2] Vogel C.R. Computational Methods for Inverse Problems. Philadelphia: SIAM, 2002. 183 p.

[3] Васин В.В., Серёжникова Т.И. Двухэтапный метод аппроксимации негладких решений и восстановление зашумленного изображения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 126–135.

[4] Vasin V.V., Korotkii M.A. Tikhonov regularization with non-differentiable stabilizing functionals // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2007. Vol. 15, No. 8. P. 853–865.

[5] Васин В.В. Устойчивая аппроксимация негладких решений некорректно поставленных задач // Докл. РАН. 2005. Т. 402, № 5. С. 586–589.

[6] Тихонов А.Н., Васильев Ф.П. Методы решения некорректных экстремальных задач // Banach Center Publ. 1976. Vol. 3. P. 297–342.

[7] Васин В.В. Аппроксимация негладких решений линейных некорректных задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 64–77.

[8] Moreau J.J. Proximite et dualite dans un espace Hilbertien // Bull. Soc. Math. France. 1965. Vol. 93, No. 2. P. 273–299.

[9] Martinet B. Determination approachee d'un point fixe d'ne applications pseudo-contractante // C. R. Acad. Sci. Paris. 1972. Vol. 274. P. 163–165.

[10] Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ "Наука", 1993.

[11] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

[12] Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Москва; Ижевск: НИЦ РХД, 2005.

[13] Rockafellar R.T. Monotone operators and the proximal point algorithm // SIAM J. Control and Optimizat. 1976. Vol. 14, No. 5. P. 871–898.

[14] Васин В.В. Проксимальный алгоритм с проектированием в задачах выпуклого программирования. Свердловск, 1982 (Препр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР).

[15] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 30 апреля 2009 г.,
с доработки — 20 ноября 2009 г.