

Аналитическое и численное построение решений системы уравнений газовой динамики, имеющих спиральный характер*

С. П. БАУТИН, А. В. РОЩУПКИН

*Уральский государственный университет путей сообщения,
Екатеринбург, Россия*

e-mail: SBautin@math.usart.ru, alex@flamingo.ru

Рассматриваются такие решения системы уравнений газовой динамики, которые передают плоские изоэнтропические течения политропного газа при учете силы Кориолиса, вызванные заданным стоком газа на окружности ненулевого радиуса. Доказано, что в начальные моменты времени в исходном однородном покоящемся газе одновременно со стоком возникает закрутка газа: в положительном направлении в Северном полушарии и в отрицательном в Южном. С помощью интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений получено стационарное решение системы уравнений газовой динамики, передающее течение с достаточно большой закруткой газа в окрестности окружности стока и имеющее нулевую закрутку на окружности заданного притока газа. Численным методом характеристик построено нестационарное решение системы уравнений газовой динамики, описывающее плоское спиральное течение с заданным стоком.

Ключевые слова: политропный газ, спиральные течения, аналитические решения, метод характеристик.

1. Система уравнений газовой динамики при наличии силы Кориолиса

Система уравнений газовой динамики (СУГД) для изоэнтропических плоских течений политропного газа при учете силы Кориолиса имеет следующий вид [1]:

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \frac{(\gamma - 1)}{2}c \left(u_r + \frac{u}{r} \right) = 0, \\ u_t + uu_r - \frac{v^2}{r} + \frac{2}{(\gamma - 1)}cc_r = av, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} = -au. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $c = \rho^{(\gamma-1)/2}$ — скорость звука; $\gamma = \text{const} > 1$ — показатель политропы газа в уравнении состояния $p = \rho^\gamma/\gamma$; в плоскости переменных x, y введена полярная система координат (r, φ) и предполагается, что $\partial/\partial\varphi = 0$; u, v — соответственно радиальная и окружная составляющие вектора скорости газа; $a = 2\Omega \sin \psi$ — параметр Кориолиса; Ω — модуль угловой скорости вращения Земли; ψ — широта точки O на поверхности Земли,

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00052).

в которой находится начало координатной плоскости xOy , касающейся поверхности Земли в точке O . Если точка O лежит в Северном полушарии, то $0 < \psi \leq \pi/2$, в Южном — $-\pi/2 \leq \psi < 0$, на экваторе — $\psi = 0$.

В системе (1) стандартным образом введены безразмерные переменные. Если в качестве масштабов скорости и расстояния при введении безразмерных переменных взяты соответственно $c_{00} = \frac{1}{3}10^3$ м/с, $r_{00} = 10^3$ м, то безразмерное значение константы $\Omega = 0.000218$, а t_{00} — масштабное значение времени — равно трем секундам. Если, не меняя масштаба скорости, увеличить масштаб расстояния, например в сто раз, то значения констант Ω и t_{00} также возрастут в сто раз.

2. Решение в начальные моменты времени задачи о плавном стоке газа

Рассматривается следующая задача о плавном стоке газа.

Пусть задана некоторая аналитическая функция $u_0(t)$ такая, что

$$u_0(0) = 0, \quad u'_0(0) < 0. \quad (2)$$

Для системы (1) ставятся условия

$$c(t, r)|_{C^+} = 1, \quad u(t, r)|_{C^+} = 0, \quad v(t, r)|_{C^+} = 0, \quad u(t, r)|_{r=r_0} = u_0(t). \quad (3)$$

Решение задачи (1), (3) при условиях (2) описывает плавный сток на окружности $r = r_0 > 0$ первоначально однородного и покоящегося при $r \geq r_0$ газа.

Схема течения в задаче о плавном стоке представлена на рис. 1, где цифрой 0 обозначена область покоящегося газа, цифрой 1 — область определения решения задачи (1), (3).

Первые три условия из (3) обеспечивают непрерывное примыкание решения задачи (1), (3) через звуковую характеристику

$$C^+ : r = r_0 + t$$

к однородному покоящемуся газу. Функция $u_0(t)$ из четвертого условия в (3) обеспечивает единственность решения поставленной задачи и задает на окружности $r = r_0$ скорость стока газа, непрерывно уменьшающуюся с ростом времени от нулевого значения в момент времени $t = 0$.

На рис. 2, а приведено качественное поведение функции $u_0(t)$ в случае плавного стока.

Теорема. *Задача (1), (3) при условиях (2) имеет как в некоторой окрестности точки $(t = 0, r = r_0)$, так и в некоторой окрестности C^+ -характеристики во все моменты времени единственное аналитическое решение.*

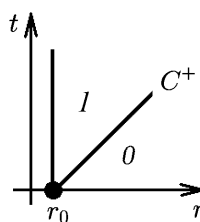


Рис. 1. Схема течения в задаче о плавном стоке газа

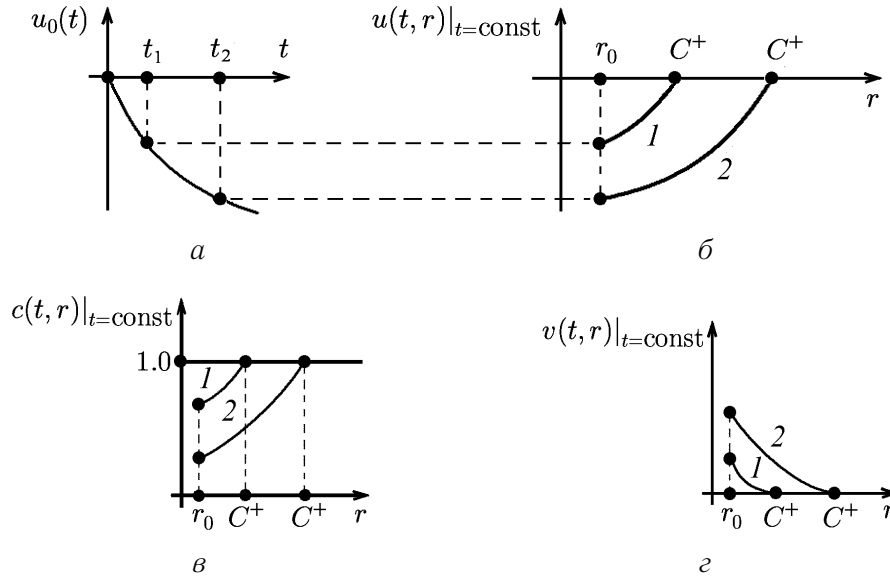


Рис. 2. Качественное поведение функции $u_0(t)$ (а) и газодинамических параметров $u(t, r)|_{t=\text{const}}$ (б), $c(t, r)|_{t=\text{const}}$ (в) и $v(t, r)|_{t=\text{const}}$ (г) в случае плавного стока в моменты времени $t = t_{1,2}$ при $t_1 < t_2$ (Северное полушарие); 1, 2 — кривые, соответствующие моментам времени t_1, t_2

Данная теорема справедлива, так как задача (1) — (3) является частным случаем характеристической задачи Коши (ХЗК) стандартного вида [2]. Сведение задачи (1) — (3) к нужному виду фактически повторяет соответствующие выкладки из работ [3–5] и поэтому здесь не приводится.

Решение ХЗК (1), (3) представляется в виде сходящегося ряда

$$\mathbf{U}(t, r) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(t) \frac{(r - r_0 - t)^k}{k!}, \quad \mathbf{U}_k(t) = \left. \frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial r^k} \right|_{C^+}, \quad (4)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} c \\ u \\ v \end{pmatrix}$$

есть вектор искомых функций, а $\mathbf{U}_0(t)$ — постоянный вектор начальных данных на характеристике C^+ , составленный из первых трех равенств в (3).

Построение коэффициентов ряда (4) при $k \geq 1$ проводится стандартным образом [2] так же, как это делается при построении решения задачи о плавном движении поршня [3–5]. В частности, для определения $u_k(t)$, $k \geq 1$, следует решать обыкновенные дифференциальные уравнения с начальными данными, определяемыми в момент времени $t = 0$, с помощью четвертого соотношения из (3). После этого $c_k(t)$, $v_k(t)$ находятся в явном виде из соответствующих алгебраических уравнений. Детальный анализ структуры коэффициентов ряда (4) повторяет соответствующие построения из [3–5] и приводит к выводу о неограниченности области сходимости ряда по переменной t : при любом значении $t \geq 0$ имеется ненулевой радиус сходимости ряда (4) в окрестности C^+ -характеристики, который, естественно, стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Первые коэффициенты ряда (4) имеют вид

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t+r_0} \left[(\gamma+1)\sqrt{r_0} \left(\sqrt{\frac{t}{r_0}+1} - 1 \right) - \frac{1}{\sqrt{r_0}u'_0(0)} \right]} > 0,$$

$$c_1 = \frac{(\gamma-1)}{2}u_1 > 0, \quad v_1(t) = 0, \quad v_2 = au_1. \quad (5)$$

Из последнего равенства в формулах (5) следует, что если течение рассматривается в Северном полушарии, где $a = 2\Omega \sin \psi > 0$, то $v_2(t) > 0$, а если в Южном, то $v_2(t) < 0$.

Поскольку доказано, что решение задачи (1)–(3) задается аналитическими функциями, то для коэффициентов ряда (4) справедливы стандартные оценки [6, 7]. В частности, и для коэффициентов ряда, задающего функцию $v(t, r)$, существует неотрицательное число M такое, что при всех $k \geq 0$ в некоторой окрестности точки $(t = 0, r = r_0)$ справедливо неравенство $|v_k(t)(r - r_0 - t)|^k < M^k k!$. Из этого неравенства следует, что в соответствующей окрестности рассматриваемой точки начальный отрезок ряда для $v(t, r)$ (напомним, что $v_0 = v_1 = 0$) задает главную часть функции $v(t, r)$:

$$\left| v_2(t)(r - r_0 - t)^2/2 \right| \gg \sum_{k=3}^{\infty} \left| v_k(t)(r - r_0 - t)^k/k! \right|,$$

поэтому под действием силы Кориолиса в течении, образующемся при стоке газа на окружности $r = r_0$, при $t > 0$ в некоторой окрестности звуковой C^+ -характеристики начинается закрутка газа в положительном или отрицательном направлениях для Северного или Южного полушария соответственно.

На рис. 2, б—г для случая Северного полушария приведено качественное поведение газодинамических параметров в задаче о плавном стоке в разные моменты времени $t = t_{1,2}$: $t_1 < t_2$.

3. Стационарное плоское спиральное течение со стоком

У системы (1) при заданных значениях

$$r = r_{in} = \text{const} > 0, \quad c|_{r=r_{in}} = 1, \quad u|_{r=r_{in}} = u_{in}, \quad v|_{r=r_{in}} = 0,$$

где константа u_{in} удовлетворяет неравенствам

$$-1 < u_{in} < 0,$$

существует единственное стационарное (т. е. при $\partial/\partial t = 0$) решение

$$c = c^o(r), \quad u = u^o(r), \quad v = v^o(r),$$

определенное на промежутке

$$0 < r_0 \leq r \leq r_{in}.$$

При этом функция $v^o(r)$ находится из третьего уравнения системы (1) при $\partial/\partial t = 0$ в явном виде

$$v^o(r) = \frac{C_1}{r} - \frac{a}{2}r, \quad C_1 = \frac{a}{2}r_{in}^2. \quad (6)$$

По заданной функции $u^o(r)$ функция $c^o(r)$ определяется из первого уравнения системы (1) при $\partial/\partial t = 0$ равенством

$$c^o(r) = \left[\frac{C_2}{ru^o(r)} \right]^{(\gamma-1)/2}, \quad C_2 = r_{in}u_{in}, \quad (7)$$

а функция $u^o(r) < 0$ задается в неявном виде с помощью уравнения

$$F(r, u^o) \equiv \frac{2}{(\gamma-1)} \left(\frac{C_2}{ru^o} \right)^{(\gamma-1)} + (u^o)^2 - C_3 + \frac{C_1^2}{r^2} + \frac{a^2}{4}r^2 = 0, \quad (8)$$

являющегося следствием второго уравнения системы (1) при $\partial/\partial t = 0$ и полученных соотношений (6), (7). Здесь

$$C_3 = \frac{2}{(\gamma-1)} + u_{in}^2 + \frac{a^2}{4}r_{in}^2.$$

Условие существования неявно заданной функции

$$\frac{\partial F}{\partial u^o} \neq 0$$

может быть представлено с помощью конкретного вида частной производной

$$\frac{\partial F}{\partial u^o} = 2 \left(\frac{C_2}{ru^o} \right)^{(\gamma-2)} \left[-\frac{C_2}{r(u^o)^2} \right] + 2u^o = \frac{2}{u^o} \left[(u^o)^2 - \left(\frac{C_2}{ru^o} \right)^{(\gamma-1)} \right]. \quad (9)$$

Выписать в случае произвольного значения константы $\gamma > 1$ функцию $u^o = u^o(r)$ в явном виде из уравнения (8) вряд ли возможно. Только в частном случае $\gamma = 3$ (8) переходит в биквадратное уравнение относительно u^o .

Функции $c = c^o(r)$, $u = u^o(r)$ можно также определить при решении задачи Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} (c^o)' = -\frac{(\gamma-1)}{2} c^o \frac{\left[(u^o)^2 + \frac{C_1}{r^2} - \frac{a^2}{4}r^2 \right]}{r[(u^o)^2 - (c^o)^2]}, \\ (u^o)' = u^o \frac{\left[(c^o)^2 + \frac{C_1}{r^2} - \frac{a^2}{4}r^2 \right]}{r[(u^o)^2 - (c^o)^2]}, \\ c^o|_{r=r_{in}} = 1, \quad u^o|_{r=r_{in}} = u_{in}. \end{array} \right. \quad (10)$$

Естественно, что определение функций $c^o(r)$, $u^o(r)$ с помощью равенства (7) и разрешения уравнения (8) эквивалентно решению задачи Коши (10), поскольку из (9) с учетом (7) следует

$$\frac{\partial F}{\partial u^o} = \frac{2}{u^o} \left[(u^o)^2 - (c^o)^2 \right].$$

Решение задачи (10) (как и (6)–(8)) описывает следующее плоское стационарное спиральное течение газа при учете силы Кориолиса.

На окружности $r = r_{in}$ осуществляется приток газа извне (из области с $r > r_{in}$), поскольку на ней задано $u^o(r_{in}) = u_{in} < 0$ — отрицательное значение радиальной скорости газа. На этой же окружности заданы значения двух других газодинамических параметров:

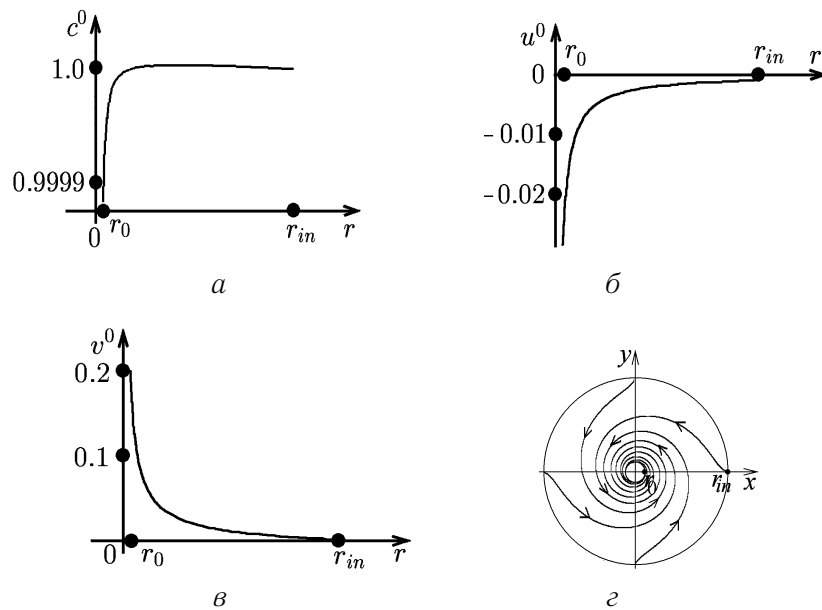


Рис. 3. Графики функций $c^o(r)$ (а), $u^o(r)$ (б) и $v^o(r)$ (в), являющиеся решением одной задачи Коши (10); линии тока течения и окружности $r = r_0$, $r = r_{in}$, на которых происходит сток и приток газа (г)

$c^o(r_{in}) = 1$ — единичной скорости звука и $v^o(r_{in}) = 0$ — нулевого значения окружной компоненты скорости.

Неравенства $-1 < u_{in} < 0$ отражают дозвуковой характер течения в окрестности окружности притока $r = r_{in}$ и обеспечивают разрешимость как уравнения (8) относительно $u^o(r)$, так и задачи (10).

Плоское стационарное течение (6)–(8), т. е. решение задачи (10), определено в некотором кольце $0 < r_0 \leq r \leq r_{in}$. Внутри этого кольца функции $u^o(r)$, $v^o(r)$ строго монотонны: $u^o(r)$ растет от $u^o(r_0)$ до $u^o(r_{in})$, $v^o(r)$ убывает от $v^o(r_0) > 0$ до $v^o(r_{in}) = 0$. Во всем течении выполняется неравенство $-u^o(r) \neq c^o(r)$.

Поскольку при $0 \leq r < r_0$ течение газа не строится, то на окружности $r = r_0$ предполагается сток газа.

На рис. 3, а–в представлены графики функций $c^o(r)$, $u^o(r)$, $v^o(r)$, являющихся решением одной задачи Коши (10), на рис. 3, г приведены четыре линии тока течения и окружности $r = r_0$, $r = r_{in}$, на которых происходит соответственно сток и приток газа.

Таким образом, стационарные спиральные течения, имеющие заданный радиальный приток на окружности $r = r_{in}$ (т. е. $u^o|_{r=r_{in}} = u_{in} < 0$, $v^o|_{r=r_{in}} = 0$) и не имеющие особенностей на некотором отрезке $0 < r_0 \leq r \leq r_{in}$, обладают следующими свойствами:

- 1) можно полагать, что на окружности $r = r_0$ имеется сток газа;
- 2) на отрезке $[r_0, r_{in}]$ скорость звука не является постоянной и при $r \rightarrow r_0 + 0$ монотонно убывает;
- 3) при $r_0 \leq r \leq r_{in}$ радиальная скорость имеет отрицательные значения и при уменьшении r ее модуль растет;
- 4) окружная скорость определена (см. (6)) при всех положительных значениях r , равна нулю при $r = r_{in}$ и при $r \rightarrow +0$ для случаев соответственно Северного или Южного полушария неограниченно растет или убывает;
- 5) при $r \rightarrow r_0 + 0$ численные значения модуля окружной скорости на порядок больше модуля радиальной скорости.

Поскольку при $r \rightarrow r_0 + 0$ величины $|u^o(r)|$ растут, а значения $c^o(r)$ убывают, то можно предположить, что для конкретного набора констант $\gamma, a, r_{in}, u_{in} < 0$ найдется ненулевое значение $r = r_* > 0$, при котором $[u^o(r_*)]^2 = [c^o(r_*)]^2$, поэтому данное стационарное спиральное течение с притоком на окружности $r = r_{in}$ нельзя продолжить при $r < r_*$ и, следовательно, сток газа заведомо надо будет задавать на окружности с радиусом r_0 , где $0 < r_* < r_0 < r_{in}$.

4. Численное построение нестационарного спирального течения со стоком

Доказанная выше теорема обеспечивает существование нестационарного течения со стоком в некоторой окрестности точки $(t = 0, r = r_0)$, а также при $t \rightarrow +\infty$ в некоторой окрестности звуковой C^+ -характеристики, т. е. в моменты времени, близкие к моменту начала плавного стока из однородного покоящегося газа, сопровождающегося возникновением закрутки газа, а также в окрестности C^+ -характеристики при всех $t > 0$.

Стационарное спиральное течение с заданным притоком и с соответствующим стоком моделирует нестационарное течение при очень больших значениях времени.

Описание формирования спирального течения со стоком от момента $t = 0$ до достаточно больших значений времени возможно численно с помощью известного метода характеристик [8, 9]. Тем самым определится процесс поведения нестационарного течения, в том числе время его выхода на стационарный режим.

Пусть при некоторых значениях r_0, r_{in} известно решение стационарной задачи $c^o(r), u^o(r), v^o(r)$, где $0 < r_0 \leq r \leq r_{in}$.

Решение нестационарной задачи строится в областях G_0, G_1 , представленных на рис. 4. При $0 \leq t \leq t_1$ в области G_0 решается задача (1), (3) с заданной функцией $u_0(t)$. Здесь t_1 есть тот момент времени, в который рассчитанная радиальная скорость в точке $r = r_{in}$ становится равной (естественно, приближенно) значению $u^o(r_{in})$:

$$u(t, r)|_{t=t_1, r=r_{in}} = u^o(r_{in}).$$

Вычисленные к этому моменту времени $t = t_1$ при $r_0 \leq r \leq r_{in}$ значения газодинамических параметров обозначаются как

$$\mathbf{U}(t, r)|_{t=t_1} = \mathbf{U}_{00}(r). \quad (11)$$

При этом в расчетах при малых по модулю значениях u_{in} величины $c_{00}(r_{in}), v_{00}(r_{in})$ получались достаточно близкими к единице и нулю соответственно.

После момента времени $t = t_1$ решение строится в полосе G_1 (см. рис. 4):

$$G_1 : \{t \geq t_1; r_0 \leq r \leq r_{in}\}.$$

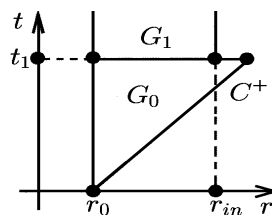


Рис. 4. Область построения решения нестационарной задачи

На левой границе этой полосы G_1 , т. е. при $r = r_0$, ставится условие, передающее непрерывный сток:

$$u(t, r)|_{r=r_0} = \begin{cases} u_0(t), & \text{если } u_0(t) > u^o(r_0), \\ u^o(r_0), & \text{если } u_0(t) \leq u^o(r_0). \end{cases} \quad (12)$$

Иначе говоря, при достижении в точке $r = r_0$ значения $u^o(r_0)$ скорость стока полагается постоянной и равной скорости стока в стационарном течении.

На нижней границе полосы G_1 , т. е. при $t = t_1$, задаются условия (11). На правой границе G_1 , при $r = r_{in}$, задаются стационарные значения газодинамических параметров, определяемые значениями (11):

$$\mathbf{U}(t, r)|_{r=r_{in}} = \mathbf{U}_{00}(r_{in}). \quad (13)$$

Система (1) имеет две звуковые характеристики C^\pm и одну контактную C^0 :

$$C^\pm : \frac{dr}{dt} = u \pm c, \quad C^0 : \frac{dr}{dt} = u,$$

вдоль каждой из которых вводится свое дифференцирование

$$\frac{d}{dt}\Big|_{C^\pm} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c)\frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{d}{dt}\Big|_{C^0} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial r}$$

и система (1) записывается в эквивалентном виде — в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dR}{dt}\Big|_{C^+} = f_1(r, c, u, v)|_{C^+}, \\ \frac{dL}{dt}\Big|_{C^-} = f_2(r, c, u, v)|_{C^-}, \\ \frac{dv}{dt}\Big|_{C^0} = f_3(r, u, v)|_{C^0}, \end{cases} \quad (14)$$

где инварианты Римана R, L задаются стандартным образом

$$R(t, r) = u + \frac{2}{(\gamma - 1)}c, \quad L(t, r) = u - \frac{2}{(\gamma - 1)}c,$$

а правые части системы (14) имеют вид

$$\begin{aligned} f_1(r, c, u, v) &= v \left(\frac{v}{r} + a \right) - \frac{cu}{r}, \\ f_2(r, c, u, v) &= v \left(\frac{v}{r} + a \right) + \frac{cu}{r}, \\ f_3(r, u, v) &= -u \left(\frac{v}{r} + a \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Определение газодинамических параметров по значениям инвариантов Римана осуществляется с помощью соотношений

$$c = \frac{(\gamma - 1)}{4} (R - L), \quad u = \frac{1}{2} (R + L). \quad (16)$$

Для численного построения решения поставленной задачи применяется метод характеристик, который хорошо зарекомендовал себя при решении многих задач газовой динамики [8, 9].

Традиционный способ построения характеристической сетки, в узлах которой методом характеристик определяются значения искомых функций, приводит к построению треугольных ячеек с неравномерно расположенными узлами [8, 9]. Кроме этого, в случае системы, состоящей из более чем двух уравнений, необходимо применять интерполяцию [8, 9], поскольку точка пересечения характеристики, имеющей промежуточный наклон, с линией, соответствующей предыдущему временному слою, в общем случае не совпадает с узлами характеристической сетки, ранее найденными по значениям максимального и минимального наклона характеристик.

В настоящей работе система (14) решается на прямоугольной сетке и поэтому используется стандартное для разностных схем обозначение U_i^n вектора значений искомых функций в точке $(t = t_n, r = r_i)$, где

$$t_n = n\tau, \quad r_i = r_0 + ih.$$

На рис. 5 приведены две ячейки расчетной сетки.

Шаг сетки по пространственной переменной постояен: $\Delta r = h$. Выбор величины шага по временной переменной $\Delta t = \tau$ определяется из неравенства

$$\tau \leq \frac{h}{|u| + c}, \quad (17)$$

выполнение которого гарантирует, что все три характеристики, выходящие из точки (t_{n+1}, r_i) , пересекают прямую $t = t_n$ в пределах отрезка $[r_{i-1}, r_{i+1}]$ (см. рис. 5).

По значениям газодинамических параметров, заданных в точках (t_n, r_{i-1}) , (t_n, r_i) , (t_n, r_{i+1}) , параметры газа в точке (t_{n+1}, r_i) определяются по следующему алгоритму.

Вначале вычисляются величины λ^+ , λ^0 и λ^- по формулам

$$\lambda^+ = \frac{\alpha(u_i^n + c_i^n)}{1 + \alpha[(u_i^n + c_i^n) - (u_{i-1}^n + c_{i-1}^n)]},$$

$$\lambda^0 = \frac{-\alpha u_i^n}{1 + \alpha(u_i^n - u_{i-1}^n)},$$

$$\lambda^- = \frac{-\alpha(u_i^n + c_i^n)}{1 + \alpha[(u_{i+1}^n - c_{i+1}^n) - (u_i^n - c_i^n)]},$$

где $\alpha = \frac{\tau}{h}$. С их помощью определяются значения

$$r_i^+ = r_i - \lambda^+ h, \quad r_i^0 = r_i + \lambda^0 h, \quad r_i^- = r_i + \lambda^- h$$

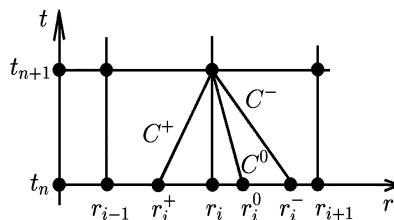


Рис. 5. Две ячейки расчетной сетки

координат точек, лежащих при $t = t_n$ на отрезке $[r_{i-1}, r_{i+1}]$ (см. рис. 5). Величины искомых функций в найденных точках с координатами (t_n, r_i^+) , (t_n, r_i^0) и (t_n, r_i^-)

$$\mathbf{U}(t_n, r_i^+) = \mathbf{U}_{r_i^+}^n, \quad \mathbf{U}(t_n, r_i^0) = \mathbf{U}_{r_i^0}^n, \quad \mathbf{U}(t_n, r_i^-) = \mathbf{U}_{r_i^-}^n$$

вычисляются с помощью линейной интерполяции по значениям $\mathbf{U}_{i-1}^n, \mathbf{U}_i^n$ для точки (t_n, r_i^+) и $\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n$ для точек $(t_n, r_i^0), (t_n, r_i^-)$:

$$\mathbf{U}_{r_i^+}^n = \mathbf{U}_i^n + \lambda^+ (\mathbf{U}_{i-1}^n - \mathbf{U}_i^n),$$

$$\mathbf{U}_{r_i^0}^n = \mathbf{U}_i^n + \lambda^0 (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n),$$

$$\mathbf{U}_{r_i^-}^n = \mathbf{U}_i^n + \lambda^- (\mathbf{U}_{i+1}^n - \mathbf{U}_i^n).$$

Таким образом, три прямые, выходящие из точек (t_n, r_i^+) , (t_n, r_i^0) , (t_n, r_i^-) , с наклонами C^+ , C^0 - и C^- -характеристик, вычисленными по значениям $\mathbf{U}_{r_i^+}^n, \mathbf{U}_{r_i^0}^n, \mathbf{U}_{r_i^-}^n$ соответственно, проходят через точку (t_{n+1}, r_i) (см. рис. 5).

Далее с помощью разностной аппроксимации системы (14) находятся значения инвариантов Римана и функции v на следующем временном слое в точке (t_{n+1}, r_i) :

$$R_i^{n+1} = R_{r_i^+}^n + \tau f_1(r_i^+, \mathbf{U}_{r_i^+}^n),$$

$$L_i^{n+1} = L_{r_i^-}^n + \tau f_2(r_i^-, \mathbf{U}_{r_i^-}^n),$$

$$v_i^{n+1} = v_{r_i^0}^n + \tau f_3(r_i^0, \mathbf{U}_{r_i^0}^n),$$

с помощью которых определяются

$$c_i^{n+1} = \frac{(\gamma - 1)}{4} (R_i^{n+1} - L_i^{n+1}), \quad u_i^{n+1} = \frac{1}{2} (R_i^{n+1} + L_i^{n+1}).$$

Затем для улучшения точности расчета осуществляется пересчет значений искомых функций в точке (t_{n+1}, r_i) с переложением идеи традиционного для метода характеристик пересчета [8] на его данную модификацию. Для этого сначала вычисляются значения

$$\tilde{\lambda}^+ = \frac{\alpha[(u_i^{n+1} + c_i^{n+1}) + (u_i^n + c_i^n)]}{2 + \alpha[(u_i^n + c_i^n) - (u_{i-1}^n + c_{i-1}^n)]},$$

$$\tilde{\lambda}^0 = \frac{-\alpha(u_i^{n+1} + u_i^n)}{2 + \alpha(u_{i+1}^n - u_i^n)},$$

$$\tilde{\lambda}^- = \frac{-\alpha[(u_i^{n+1} - c_i^{n+1}) + (u_i^n - c_i^n)]}{2 + \alpha[(u_{i+1}^n - c_{i+1}^n) - (u_i^n - c_i^n)]},$$

по которым определяются уточненные значения

$$\tilde{r}_i^+ = r_i - \tilde{\lambda}^+ h, \quad \tilde{r}_i^0 = r_i + \tilde{\lambda}^0 h, \quad \tilde{r}_i^- = r_i + \tilde{\lambda}^- h,$$

и в этих точках (t_n, \tilde{r}_i^+) , (t_n, \tilde{r}_i^0) и (t_n, \tilde{r}_i^-) вычисляются уточненные значения газодинамических параметров

$$\tilde{\mathbf{U}}_{\tilde{r}_i^+}^n = \mathbf{U}_i^n + \tilde{\lambda}^+ (\mathbf{U}_{i-1}^n - \mathbf{U}_i^n),$$

r	10 км	1 км	200 м	20 м (сток)
$ u $, км/ч	0.3	3.4	16.9	176.9
v , км/ч	0	6.7	33.9	353.7

Входные данные одного расчета нестационарного плоского спирального течения со стоком и выходом решения на стационарный режим в случае $\psi = \pi/6$ следующие: $h = 10^{-4}$, $r_{in} = 10$ км, $r_0 = 20$ м, $|u^o(r_{in})| = 0.3$ км/ч.

В таблице приведены размерные значения модуля радиальной и значения окружной составляющих вектора скорости газа в момент времени $t = t_2 = 6$ ч 40 мин при различном размерном расстоянии. В рассматриваемом случае выход на стационарное течение наблюдается при $t \approx 14$ ч 10 мин, при этом значение окружной скорости в точке стока $v(r_{in}) = 654.5$ км/ч.

Благодарим коллегу А.В. Боровских за полезные замечания, сделанные при выполнении данного исследования.

Список литературы

- [1] Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963.
- [2] БАУТИН С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Диф. уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052–2063.
- [3] БАУТИН С.П. Математическая теория безударного сильного сжатия идеального газа. Новосибирск: Наука, 1997.
- [4] БАУТИН С.П. Математическое моделирование сильного сжатия газа. Новосибирск: Наука, 2007.
- [5] БАУТИН С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009.
- [6] ПЕТРОВСКИЙ И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
- [7] КУРАНТ Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.
- [8] ЖУКОВ А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. М.: Изд-во АН СССР, 1960. Т. 58.
- [9] РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Б.Л., ЯНЕНКО Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.

Поступила в редакцию 25 декабря 2009 г.,
с доработки — 23 августа 2010 г.