

## Численное моделирование движения гранулированной среды в подвижных сосудах

И. О. БОГУЛЬСКИЙ<sup>1</sup>, Н. А. БОГУЛЬСКАЯ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия*

<sup>2</sup>*Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия*

e-mail: bogul@icm.krasn.ru

Предложена математическая модель движения гранулированной среды. Гранулы представлены в виде правильных абсолютно твердых тел с упругими оболочками, благодаря чему удается описать их взаимодействие и движение на достаточно большом временном промежутке.

*Ключевые слова:* моделирование, численные методы, гранулированная среда.

Настоящая работа является результатом сотрудничества авторов с инженерами-конструкторами, занимающимися созданием универсальных высевающих аппаратов вибрационного типа. Полученные инженерные решения поддержаны рядом публикаций [1, 2] и подтверждены патентами на изобретение [3, 4]. Главный критерий оптимальности работы конструкции — равномерность высева семян из отверстий лотка высевающего устройства. Модель, предложенная в работе, описывает движение зерен в мельницах и другие процессы, связанные с движением гранулированных сред.

Первые исследования по равномерности истечения гранул были связаны с попытками описания сыпучей среды в рамках модели потенциального течения идеальной жидкости [5, 6]. Это позволило получить ряд достаточно важных результатов, однако возникла необходимость имитационного, дискретного моделирования изучаемых процессов.

Рассматривается достаточно плотно упакованная гранулированная среда, попытки описать движение которой при условии “непроникания” частиц друг в друга чрезвычайно сложно. Для решения задач, в которых элементы сыпучей среды расположены на значительном расстоянии друг от друга, вполне удовлетворительным представляется кинематическое описание движения абсолютно твердых тел.

В основе предлагаемой модели движения гранулированной среды заложено упругое взаимодействие частиц следующей структуры. Будем считать, что каждая частица представляет собой абсолютно твердое тело (круг в плоском случае, шар в пространстве) массы  $m$ , радиуса  $r$ , окруженное достаточно тонкой упругой оболочкой. Коэффициент жесткости этой оболочки неизвестен, но его связь со сжатием  $\varepsilon$  определяется из условия: если частица неподвижно лежит на поверхности (рис. 1), то сила упругости  $F_y$  полностью компенсирует вес  $P$ :

$$c\varepsilon = mg. \quad (1)$$

Здесь  $c$  — жесткость упругой оболочки. В процессе движения этих элементарных частиц их взаимодействие (рис. 2) приводит к тому, что расстояние между центрами частиц

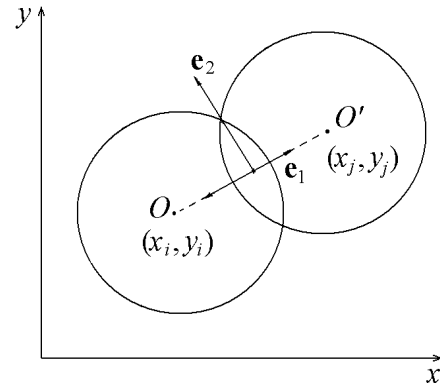
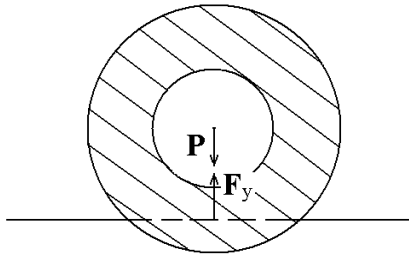


Рис. 1. Схема сил, действующих на частицу с упругой оболочкой      Рис. 2. Схема взаимодействия упругих частиц

становится меньше диаметра  $d$  и возникают упругие силы отталкивания тем большие, чем ближе друг к другу находятся центры частиц.

Модель заведомо нелинейная. Если расстояние между центрами частиц меньше диаметра — существует линейное упругое взаимодействие, если больше — взаимодействие отсутствует.

Кроме того, следует учитывать трение, возникающее в процессе движения частиц. Это еще одна причина нелинейности задачи, так как направление сил трения зависит от направления относительных скоростей движения точек контакта взаимодействующих тел.

## 1. Алгоритм решения задачи

Рассмотрим каждую из частиц и выясним, какие из всех остальных являются “ближайшими соседями” в данный момент времени. Вычислим силы и моменты сил, возникающие при взаимодействии с соседними частицами. Численно решим полученную систему дифференциальных уравнений.

Сначала рассмотрим простейший вариант, не учитывающий силы трения.

Пусть сосуд содержит  $N$  элементов, координаты центров которых  $x_i, y_i, i = 1, 2, 3, \dots, N$  известны.

Расчеты сил начнем с определения элементов, “ближайших” к  $i$ -му. Можно сразу вычислить расстояние между центрами элементов  $i$  и  $j \neq i$ :

$$R_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2},$$

и отобрать в качестве “ближайших” те, для которых  $R_{ij} < d$ . Однако с точки зрения экономии вычислений более выгодной является следующая процедура: найдем модуль разности координат  $|x_i - x_j|, j = 1, 2, 3, \dots, N, j \neq i$ . Если эта величина больше  $d$ , элемент с номером  $j$  больше не рассматривается. В противном случае вычисляются величины  $|y_i - y_j|, j = 1, 2, 3, \dots, N, j \neq i$ . Величину  $R_{ij}$  определяем только в случае  $|y_i - y_j| < d$ , и в случае  $R_{ij} < d$  считаем элемент с номером  $j$  лежащим в “ближайшем окружении”. Таких элементов не может быть много. Запоминаем их номера и далее работаем только с ними.

Вычислим силу, действующую на  $i$ -й элемент со стороны  $j$ -го. Так как расстояние  $R_{ij}$  меньше диаметра  $d$ , возникает упругая сила  $\mathbf{f}_{ij}$  (см. рис. 2), равная

$$f_{ij} = (d - R_{ij})c = (d - R_{ij})\frac{mg}{2\varepsilon} \quad (2)$$

и действующая в направлении точки  $O$  по линии  $OO'$ . Единичный вектор в направлении  $OO'$  равен

$$\mathbf{e}_1 = \left( \frac{x_j - x_i}{R_{ij}}, \frac{y_j - y_i}{R_{ij}} \right). \quad (3)$$

Единичный вектор  $\mathbf{e}_2$ , перпендикулярный  $\mathbf{e}_1$ , соответственно равен

$$\mathbf{e}_2 = \left( -\frac{y_j - y_i}{R_{ij}}, \frac{x_j - x_i}{R_{ij}} \right). \quad (4)$$

Следовательно, со стороны  $j$ -го элемента действует сила с компонентами

$$\begin{aligned} f_x^{ij} &= -(d - R_{ij})\frac{mg}{2\varepsilon} \frac{(x_j - x_i)}{R_{ij}}, \\ f_y^{ij} &= -(d - R_{ij})\frac{mg}{2\varepsilon} \frac{(y_j - y_i)}{R_{ij}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Полные компоненты силы, действующей на  $i$ -й элемент, получаются суммированием величин (5) по всему окружению, в направлении  $y$  дополнительно учитывается вес  $-mg$ .

Достаточно естественно записывается и взаимодействие элемента со стенками и дном лотка. Предположим, закон движения стенок лотка известен: левая граница движется по закону  $Gl = Gl(t)$ , правая — по закону  $Gp = Gl + L$ , где  $L$  — постоянная длина лотка. Если расстояние  $(x_i - Gl)$  меньше  $r$  (рис. 3, а), то возникает горизонтальная сила

$$F_x = (x_i - Gl - r)\frac{mg}{\varepsilon}.$$

В случае “проникновения” элемента в правую стенку (рис. 3, в)

$$F_x = -(-r - Gp + x_i)\frac{mg}{\varepsilon}.$$

Если координата  $y_i$  становится меньше  $r$  (рис 3, б), возникает вертикальная компонента

$$F_y = (r - y_i)\frac{mg}{\varepsilon}.$$

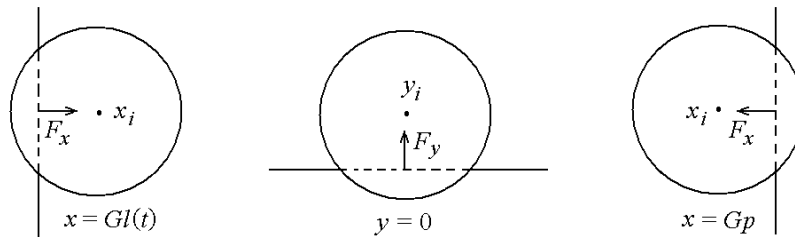


Рис. 3. Схема взаимодействия частиц со стенками и дном лотка

При необходимости можно учесть и вертикальное движение лотка по известному закону.

После описанных действий (для каждого элемента окружения) суммарные силы, действующие на элемент с номером  $i$ , вычислены.

Далее необходимо численно решать задачу Коши для уравнений Ньютона. Вопрос о выборе численного алгоритма для решения данной задачи не тривиален, что требует пояснения. Дело в том, что даже линейная задача об упругом взаимодействии тяжелых точек (в простейшем случае шарик на пружине) не является асимптотически устойчивой. Спектр оператора перехода в лучшем случае чисто мнимый, а в данной задаче вполне может содержать положительные вещественные части. Кроме того, система уравнений является жесткой. Поэтому применение достаточно простых численных методов типа метода Эйлера первого порядка точности [7] исключается (область устойчивости этого метода вообще не содержит точек мнимой оси). С другой стороны, вычисление сил требует достаточно большого (в плоском случае порядка  $N^2$ ) количества операций, в силу чего использование многостадийных явных методов [8] также не желательно.

Поясним последнее. Хорошо известны эффективные многостадийные методы с автоматическим контролем точности и устойчивости (см., например, [8]), выигрывающие по сравнению с классическими за счет большего шага по времени. Однако в нашей задаче можно провести простую оценку максимального шага, при котором имеет смысл рассчитывать процесс. Частота вибрации лотка в конструкции  $\approx 10$  Гц, амплитуда  $\approx 1$  мм. За один шаг можно “разрешить продвинуться” стенке лотка на треть-четверть радиуса. Элементарные оценки дают в этом случае шаг по времени не больше 0.002 с.

В качестве компромисса используем схему Рунге—Кутты второго порядка точности [7], по которой можно (с полученным шагом по времени) вычислить устойчивое решение.

Запишем закон Ньютона для  $i$ -го элемента в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v1_i, \\ \dot{v}1_i = F_x - \mu v1_i, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{y}_i = v2_i, \\ \dot{v}2_i = F_y - \mu v2_i. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $F_x$  и  $F_y$  — действующие на  $i$ -й элемент суммарные силы в направлениях  $x$  и  $y$ ,  $v1_i$ ,  $v2_i$  — компоненты скорости центра масс в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно, а диссипативные (вязкие) члены  $\mu v1_i$  и  $\mu v2_i$ , где  $\mu > 0$  — коэффициент вязкости, введены искусственным образом для повышения устойчивости решения. Непосредственно при численном эксперименте значение вязкости  $\mu$  выбирается чисто эмпирически так, чтобы обеспечивалась устойчивость, но значение  $\mu$  было, по возможности, минимальным.

На каждом шаге по времени  $\Delta t$  на первой стадии вычисляются промежуточные величины на шаге  $\Delta t/2$ . По методу Эйлера

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i^{n+1} &= \tilde{x}_i^n + \frac{\Delta t}{2} v1_i^n, & \tilde{v}1_i^{n+1} &= \tilde{v}1_i^n + \frac{\Delta t}{2} (F_x^n - \mu v1_i^n), \\ \tilde{y}_i^{n+1} &= \tilde{y}_i^n + \frac{\Delta t}{2} v2_i^n, & \tilde{v}2_i^{n+1} &= \tilde{v}2_i^n + \frac{\Delta t}{2} (F_y^n - \mu v2_i^n). \end{aligned} \quad (8)$$

На второй стадии совершается переход на следующий шаг по времени  $\Delta t$ :

$$\begin{aligned} x_i^{n+1} &= x_i^n + \Delta t v \tilde{1}_i^{n+\frac{1}{2}}, & v1_i^{n+1} &= v1_i^n + \Delta t \left( \tilde{F}_x^{n+\frac{1}{2}} - \mu v \tilde{1}_i^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ y_i^{n+1} &= y_i^n + \Delta t v \tilde{2}_i^{n+\frac{1}{2}}, & v2_i^{n+1} &= v2_i^n + \Delta t \left( \tilde{F}_y^{n+\frac{1}{2}} - \mu v \tilde{2}_i^{n+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\tilde{F}_x^{n+\frac{1}{2}}$  и  $\tilde{F}_y^{n+\frac{1}{2}}$  — силы, вычисленные для  $\tilde{x}_i^{n+\frac{1}{2}}$  и  $\tilde{y}_i^{n+\frac{1}{2}}$ .

Начальные условия можно выбрать достаточно произвольно. Проще всего взять ровные вертикальные “столбцы” из элементов, где верхний ряд “вдавлен” во второй на величину  $\varepsilon$ , второй в третий — на  $2\varepsilon$  и т. д. Это дает возможность легко вычислить вертикальные координаты гранул в начальный момент времени. Если лоток неподвижен, такая система теоретически должна находиться в равновесии все время, что является одним из самых важных тестов устойчивости численного решения динамической задачи. Когда лоток приходит в движение, элементы среды за несколько шагов по времени принимают “плотную упаковку”, обеспечивающую минимум потенциальной энергии системы.

Учет сил трения в рассматриваемой задаче — наиболее сложный вопрос в моделировании процесса движения гранулированной среды. Ясно, что нужно различать “сухое” трение, когда движение соседних частиц и стенок сосуда происходит без проскальзывания, и трение скольжения (максимально возможное), возникающее при “проскальзывании” соседних элементов.

Будем считать, что между элементами в процессе движения возникает сила трения, пропорциональная силе упругого сдавливания и направленная против относительной скорости движения точки контакта.

Рассмотрим два “соседних” элемента с номерами  $i$  и  $j$  (рис. 4). Мы уже выяснили, что сила давления элемента  $j$  на элемент  $i$

$$F_{ij} = (d - R_{ij}) \frac{mg}{2\varepsilon}$$

и направлена против вектора  $\mathbf{e}_1$  (3). Возникающая при этом сила трения  $F_{ij}^{\text{TP}}$  равна

$$F_{ij}^{\text{TP}} = \nu F_{ij},$$

где  $\nu$  — коэффициент трения скольжения, и в зависимости от проекций скоростей точек  $A$  и  $A'$  (см. рис. 4) на линию (1), идущую вдоль вектора  $\mathbf{e}_2$ , направлена либо в направлении вектора  $\mathbf{e}_2$ , либо в противоположном. Для точки  $A'$ , принадлежащей элементу  $j$ ,

$$\mathbf{v}_{A'} = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{OA} = (v1_i, v2_i) + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{OA}.$$

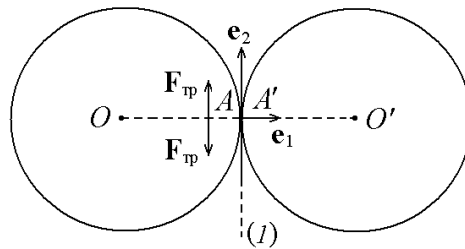


Рис. 4. Схема взаимодействия двух элементов с учетом сил трения

Для точки  $A$ , принадлежащей элементу  $i$ ,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{O}'\mathbf{A} = (v1_j, v2_j) + \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{O}'\mathbf{A}.$$

Обозначим направляющие косинусы вектора  $\mathbf{e}_1$  как

$$e_x = \frac{x_j - x_i}{R_{ij}}, \quad e_y = \frac{y_j - y_i}{R_{ij}}.$$

Тогда  $-\mathbf{e}_2 = (e_y, -e_x)$ .

Проекция скоростей точек  $A$  и  $A'$  есть их скалярное произведение на вектор  $-\mathbf{e}_2$ :

$$PR\mathbf{v}_A \big|_{(1)} = (v1_i, v2_i)(e_y, -e_x) + \omega_i R = v1_i e_y - v2_i e_x + \omega_i r,$$

$$PR\mathbf{v}_{A'} \big|_{(1)} = (v1_j, v2_j)(e_y, -e_x) + \omega_j R = v1_j e_y - v2_j e_x + \omega_j r.$$

Здесь  $\omega_i$  и  $\omega_j$  — угловые скорости вращения  $i$ -го и  $j$ -го элементов. Относительная скорость вдоль линии (1)

$$W = PR\mathbf{v}_A \big|_{(1)} - PR\mathbf{v}_{A'} \big|_{(1)} = (v1_i - v1_j)e_y - (v2_i - v2_j)e_x + (\omega_i - \omega_j)r. \quad (10)$$

С точки зрения программирования удобнее всего ввести величину  $(in)_{ij}$ , которая принимает значения  $(in)_{ij} = 1$ , если  $W < 0$ , и  $(in)_{ij} = -1$ , если  $W > 0$ . В этом случае к силам (5) необходимо добавить соответствующие компоненты сил трения

$$\begin{aligned} F_x^{ij} &= f_x^{ij} + F_{ij}^{\text{тр}} e_x (in)_{ij}, \\ F_y^{ij} &= f_y^{ij} - F_{ij}^{\text{тр}} e_y (in)_{ij}, \\ M_i &= -M_i^0 \cdot (in)_{ij}. \end{aligned} \quad (11)$$

Взаимодействие с дном и боковыми стенками записывается подобным образом: если  $0 < y_i < r$ , то  $(in)_i = 1$  при  $(v_N - u_j - \omega_j r) < 0$  и  $(in)_i = -1$  при  $(v_N - u_j - \omega_j r) > 0$ . Здесь  $v_N = \dot{G}l(t)$  — скорость движения дна лотка.

Далее силы вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_x^{ij} &= f_x^{ij} + F_{\text{тр}} (in)_i, \\ F_y^{ij} &= f_y^{ij}, \\ M_i &= -M_i^0 \cdot (in)_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Учет трения обязательно приводит к учету вращения элемента, поэтому в уравнениях (11) и (12) необходимо вычислять также и момент силы.

После того как суммарные (с учетом трения) силы подсчитаны, численное решение уравнений проводится тем же методом (8), (9). Однако размерность системы возрастает, кроме системы четырех уравнений (6) и (7) необходимо интегрировать уравнение, описывающее вращение элемента под номером  $i$  вокруг оси, проходящей через центр тяжести:

$$J\dot{\omega}_i = M_i. \quad (13)$$

Здесь  $J = \frac{mr^2}{2}$  — момент инерции круга относительно оси, проходящей через центр.

Решение уравнений (12) производится численным алгоритмом (8), (9). Записывать полное уравнение вращения не обязательно, так как силы и моменты сил, действующие на рассматриваемый элемент, зависят только от координат центра круга и угловой скорости.

## 2. Вычислительные эксперименты

На основе математической модели был создан комплекс программ, реализующий имитационную модель движения гранулированной среды в горизонтально вибрирующем сосуде с отверстиями в дне.

На рис. 5 приведено численное решение задачи для удаленного от начального момента времени, когда система уже достаточно плотно упакована. Здесь рассмотрено 2400 элементов в подвижной лотке и порядка 100 в бункере в начальный момент времени. В дне лотка имеются три отверстия размером в три диаметра элемента, через которые происходит высыпание частиц. Соответственно опустошается и бункер. В численном эксперименте длина лотка принята 50 см, диаметр частиц — 0.8 см. Величина  $\epsilon$  составляет 0.01 радиуса частицы. Частота горизонтальных гармонических колебаний лотка 9 Гц, амплитуда 1 см, шаг по времени 0.002 с. Около отверстий расположены счетчики, показывающие количество выпавших частиц.

На рис. 6 светлые гранулы образуют зоны уплотнения, темные — зоны разрыхления среды.

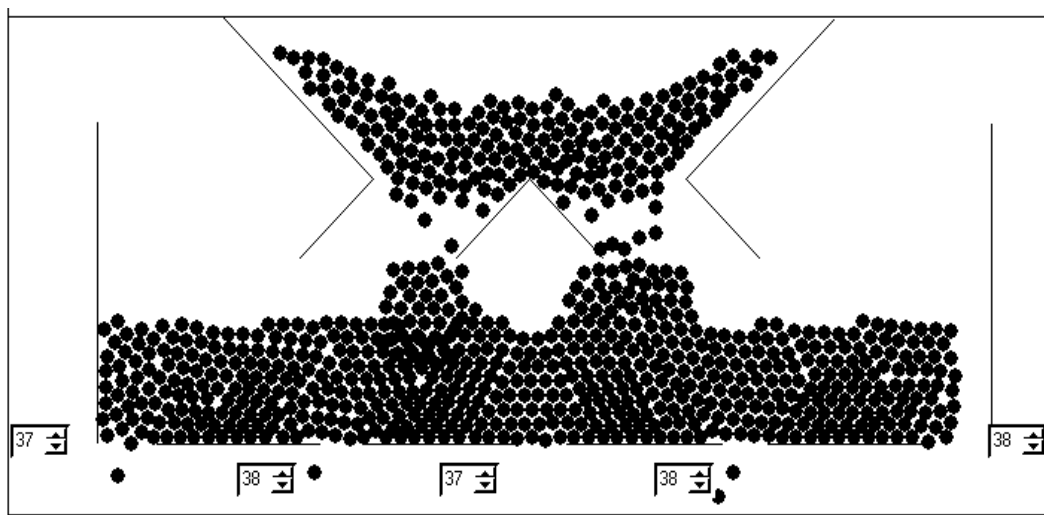


Рис. 5. Результат работы программы

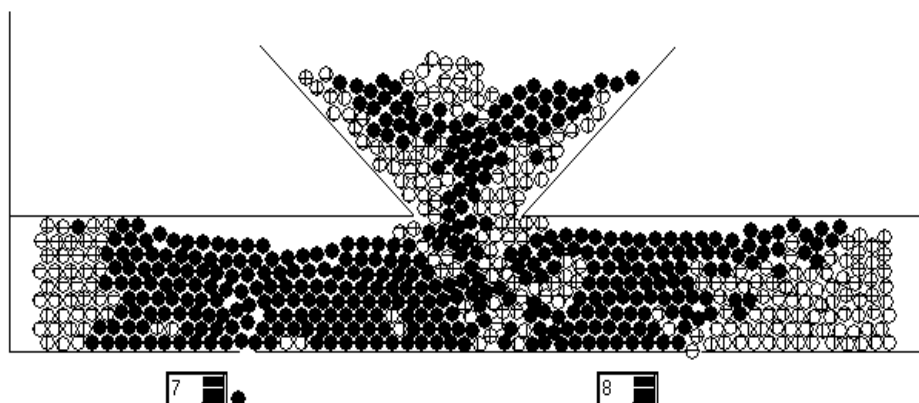


Рис. 6. Зоны уплотнения

Предложенный подход применялся для моделирования поведения гранулированной среды в конструкциях роторного типа. Была проведена оптимизация конструкций и вибрационных режимов их работы. Получены результаты для трехмерного варианта задачи с гранулами в виде шаров.

## Список литературы

- [1] Вишняков А.А. Универсальные почвообрабатывающе-посевные машины. Красноярск: Изд-во КрасГАУ, 2004. 202 с.
- [2] Богульская Н.А., Богульский И.О., Вишняков А.А. Оптимизация конструктивных параметров высевающего аппарата вибрационного типа // Вестник КрасГАУ. 2009. № 1(28). С. 110–112.
- [3] Пат. № 2192111 Россия, МКИ А 01 С7/16. Вибрационный высевающий аппарат овощной сеялки / А.А. Вишняков, А.С. Вишняков, А.А. Вишняков, П.Г. Ляшок, И.О. Богульский. Оpubл. в БИ., 10.11.2002, № 31.
- [4] Пат. № 2310311 Россия, МПК А 01 С7/16. Высевающий аппарат сеялки / А.А. Вишняков, А.С. Вишняков, И.О. Богульский, Н.А. Богульская, Д.А. Каркавин, В.А. Козлов. Оpubл. в БИ., 20.11.2007, № 32.
- [5] Богульская Н.А., Богульский И.О., Вишняков А.А. Вертикальная вибрация жидкости в сосуде // Ресурсосберегающие технологии: Сб. науч. тр. / Прил. к "Вестнику КрасГАУ". 2005. № 3. С. 115–120.
- [6] Никифоров А.Л., Вишняков А.А., Богульский О.И. Движение сухих семян в вибрирующей лотке сеялки // Международная научно-практ. конф. "Земледельческая механика в растениеводстве". М., 2001. С. 106–110.
- [7] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [8] Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем. Новосибирск: Наука, 1997. 195 с.

*Поступила в редакцию 15 августа 2010 г.,  
с доработки — 22 октября 2010 г.*