

Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением*

А. Л. КАЗАКОВ, А. А. ЛЕМПЕРТ

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия

e-mail: kazakov@icc.ru, lempert@icc.ru

Исследуется краевая задача для уравнения нелинейной фильтрации (диффузии, теплопроводности) параболического типа с вырождением. Для рассмотренной задачи построены локально-аналитические (в виде сходящегося степенного ряда) решения в случае степенной зависимости коэффициента фильтрации от плотности. Тем самым развиты известные научные результаты А.Ф. Сидорова и его учеников. Проведены численные расчеты с помощью отрезков построенных рядов и предложенной в работе разностной схемы.

Ключевые слова: уравнение нелинейной фильтрации, краевая задача, аналитическое решение, разностная схема.

Введение

Для уравнения нелинейной фильтрации (диффузии, теплопроводности) задача исследования распространения возмущения по нулевому фону и взаимосвязи закона движения фронта с поведением ненулевого решения вблизи фронта является весьма естественной. Она имеет не только теоретическое, но и большое прикладное значение, поскольку описывает движение фронта нелинейной фильтрации (диффузии) [1], а также тепловой волны, распространяющейся по холодному фону с конечной скоростью.

А.Ф. Сидоров в 1980-х годах предложил при аналитическом и численном исследовании подобных задач (для уравнения параболического типа) применять метод характеристических рядов, ранее хорошо зарекомендовавший себя при построении решений линейных и нелинейных уравнений и систем гиперболического типа [2]. За работой [3] последовала серия публикаций ([4–6] и др.), которую и продолжает данная статья.

1. Постановка задачи

Уравнение фильтрации является математической формой закона Дарси для фильтрации газа в пористой среде [7]. В литературе данное уравнение также называется уравнением нелинейной диффузии [4] и нелинейной теплопроводности [6]. Однако мы здесь следуем терминологии, использованной в работах А.Ф. Сидорова [2].

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-07-00245).

Рассмотрим уравнение нелинейной фильтрации со степенной зависимостью коэффициента фильтрации от плотности $K(T) = \alpha T^\sigma$:

$$T_t = \alpha \operatorname{div}(T^\sigma \nabla T), \quad (1)$$

где $T = T(t, \mathbf{x})$ — искомая функция (плотность газа); t — время; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — вектор пространственных координат; $\operatorname{div}, \nabla$ — операторы дивергенции и градиента по пространственным координатам; $\alpha > 0, \sigma > 0$ — известные положительные константы, определяющие свойства среды (σ — показатель адиабаты (политропы)). В случае теплопроводности функция T является температурой, в случае диффузии — концентрацией.

Для уравнения (1) получен ряд точных автомодельных решений, описывающих тепловые волны, которые движутся с конечной скоростью при неограниченном возрастании температуры [8]. При рациональных значениях показателя адиабаты σ в случаях плоской, сферической и цилиндрической симметрии в виде специальных рядов построены решения задачи о тепловой волне, имеющей заданные свойства [4].

Стандартная замена $u = T^\sigma, t' = \alpha t$ приводит уравнение (1) к виду

$$u_t = u \Delta u + \frac{1}{\sigma} (\nabla u)^2. \quad (2)$$

Для процесса фильтрации величина u имеет конкретный физический смысл: давление газа в пористой среде (с точностью до постоянного множителя). При $u = 0$ коэффициент перед вторыми (старшими) производными обращается в нуль и параболический тип уравнения (2) вырождается. Этот случай — предмет дальнейшего рассмотрения. Отметим, что функция $u \equiv 0$ является тривиальным решением уравнения (2).

Будем предполагать, что $\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$, т. е. рассматривается плоскосимметричный случай. Тогда уравнение (2) имеет вид ($x = x_1$)

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma} (u_x)^2. \quad (3)$$

Для (3) рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u|_{x=a(t)} = u_0(t, x)|_{x=a(t)}, \quad a(0) = 0, \quad u_0(0, 0) = 0, \quad (4)$$

где известные функции $a(t), u_0(t, x)$ являются аналитическими.

Ранее для уравнения (3) исследованы [6] краевые задачи

$$u|_{x=b(t)} = 0, \quad b(0) = 0, \quad b'(0) \neq 0 \quad (5)$$

либо [2, 6]

$$u|_{x=0} = f(t), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0, \quad (6)$$

где $b(t), f(t)$ — известные аналитические в некоторой окрестности нуля функции. Для задач (3), (5) и (3), (6) (для задачи (3), (6) в литературе встречается наименование “задача А.Д. Сахарова об иницировании тепловой волны”, [2, с. 10]) были доказаны теоремы существования и единственности нетривиальных решений в классе аналитических функций.

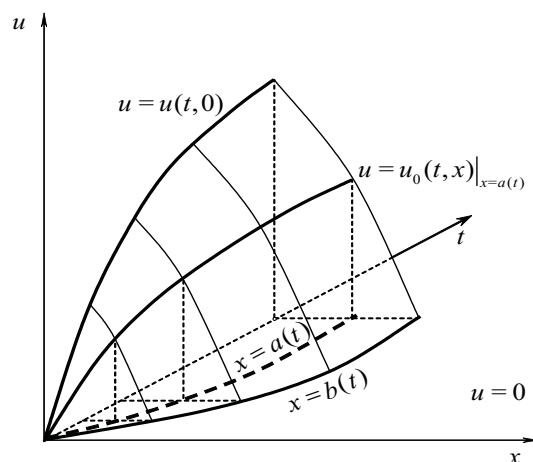


Рис. 1. Поверхность $u = u(t, x)$ в пространстве переменных t, x, u

Замена искомой функции $v = u - u_0$ позволяет сделать краевые условия в задаче (3), (4) нулевыми, однако при этом в уравнении появляются дополнительные слагаемые, содержащие производные искомых функций, что неудобно для дальнейшего исследования. Поэтому данная замена не производится.

Следует указать, что задачи (3), (5) и (3), (6) представляют собой частные случаи задачи (3), (4) при $u_0(t, x) \equiv 0$ и $a(t) \equiv 0$ соответственно.

Поскольку уравнение (3) является инвариантным относительно сдвигов вдоль координатной оси, то при наличии вырождения, не теряя общности рассмотрения, можно считать, что $u(0, 0) = 0$. Тогда построение решения уравнения (3) с геометрической точки зрения будет построением поверхности $u = u(t, x)$, проходящей через начало координат, в пространстве переменных t, x, u (рис. 1). Сечение этой поверхности плоскостью Oxt приводит к условию (5), плоскостью Oxt — к условию (6). Наконец, сечение цилиндрической поверхностью $x = a(t)$ приводит к условию (4).

2. Основная теорема

Теорема. Пусть функции $u_0(t, x)$, $x = a(t)$, $a'(0) \neq 0$ являются аналитическими в некоторой окрестности начала координат и производная функции $u_0(t, x)$ вдоль кривой $x = a(t)$ в точке $t = 0$ равна нулю. Тогда задача (3), (4) имеет в некоторой окрестности точки $t = 0, x = 0$ два аналитических решения.

Доказательство. Из условия теоремы имеем

$$u_t(0, 0) + a'(0)u_x(0, 0) = 0, \quad a'(0) \neq 0. \quad (7)$$

Физически первое условие (7) можно интерпретировать как требование того, чтобы скорость изменения давления u вдоль кривой $x = a(t)$ в начальный момент времени была нулевой.

Будем строить решение задачи (3), (4) в виде кратного ряда

$$u = \sum_{k=0, l=0}^{\infty} u_{k,l} \frac{t^k [x - a(t)]^l}{k!l!}. \quad (8)$$

Для удобства определения коэффициентов ряда (8) сделаем в задаче (3), (4) замену независимых переменных

$$\begin{cases} \tau = t, \\ z = x - a(t). \end{cases} \quad (9)$$

Якобиан замены (9) $J = 1$, т. е. последняя является невырожденной. В этом случае производные меняются как

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -a'(\tau) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau},$$

и задача (3), (4) примет вид

$$\begin{cases} u_\tau = a'(\tau)u_z + uu_{zz} + \frac{1}{\sigma}u_z^2, \\ u|_{z=0} = f(\tau), \end{cases} \quad (10)$$

где $f(\tau) = u_0(\tau, a(\tau))$. Из аналитичности функций $a(t)$ и $u_0(t, x)$ следует, что функция $f(\tau)$ также аналитическая в некоторой окрестности точки $\tau = 0$, т. е. функции $a(\tau)$ и $f(\tau)$ могут быть разложены в сходящиеся ряды

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{\tau^n}{n!}, \quad f_n = \left. \frac{d^n f}{d\tau^n} \right|_{\tau=0}, \quad a(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\tau^n}{n!}, \quad a_n = \left. \frac{d^n a}{d\tau^n} \right|_{\tau=0},$$

причем из (4) и (7) следует, что $f(0) = f'(0) = 0$, $a(0) = 0$, $a'(0) \neq 0$, т. е.

$$f_0 = f_1 = 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 \neq 0. \quad (11)$$

С точки зрения построения формального решения знак функции f не имеет значения, однако из физического смысла задачи следует, что первый ненулевой из коэффициентов f_n должен быть положительным. Если же все коэффициенты f_n равны нулю, т. е. $f \equiv 0$, то задача (10) описывает движение тепловой волны по холодному фону [6].

Решение задачи (10) будем искать в виде

$$u = \sum_{k=0, l=0}^{\infty} u_{k,l} \frac{\tau^k z^l}{k! l!}, \quad u_{k,l} = \left. \frac{\partial^{k+l} u}{\partial \tau^k \partial z^l} \right|_{\substack{\tau=0 \\ z=0}}. \quad (12)$$

Одинаковые символы в формулах (8) и (12) означают одни и те же величины. Коэффициенты ряда (12) определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования $n = k + l$. Из граничных условий имеем $u_{k,0} = f_k(\tau)$, $k = 0, 1, \dots$. В силу этого и с учетом (11) получим

$$u_{0,0} = f_0 = 0, \quad u_{1,0} = f_1 = 0.$$

Для определения $u_{0,1}$, положив в уравнении (10) $\tau = z = 0$, имеем

$$u_{0,1} \left(\frac{1}{\sigma} u_{0,1} + a'(0) \right) = 0. \quad (13)$$

При нахождении корней (13) необходимо рассматривать два случая: $u_{0,1} \neq 0$ и $u_{0,1} = 0$.

1. Рассмотрим случай $u_{0,1} \neq 0$. Тогда решение уравнения (13) примет вид

$$u_{0,1} = -\sigma a_1 \neq 0,$$

т. е. все производные первого порядка определены. Далее найдем производные второго порядка. Для этого прежде всего из граничных условий получим

$$u_{2,0} = f_2.$$

Для нахождения $u_{1,1}$ продифференцируем уравнение (10) по τ и примем $z = \tau = 0$. Подставив известные величины, получим $f_2 = -2a_1u_{1,1} + a_1u_{1,1} - a_2\sigma a_1$, откуда имеем

$$u_{1,1} = -\frac{f_2 + \sigma a_1 a_2}{a_1}.$$

Аналогично, продифференцировав (10) по z , положив $z = \tau = 0$, подставив известные величины и приведя подобные слагаемые, получим

$$u_{0,2} = \frac{f_2 + \sigma a_1 a_2}{(1 + \sigma)a_1^2}.$$

Таким образом, все производные первого и второго порядка найдены и база индукции установлена.

Пусть определены производные до порядка n включительно, т. е. предполагаются известными все $u_{i,k}$ при $i + k = 0, \dots, n$. Тогда

$$u_{n+1,0} = f_{n+1}.$$

Продифференцировав уравнение (10) k раз по τ , $n - k$ раз по z и положив $z = \tau = 0$, получим

$$\begin{aligned} u_{k+1,n-k} &= \sum_{i=0}^k C_k^i a_{i+1} u_{k-i,n-k+1} + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j} u_{i,j+2} + \\ &+ \frac{1}{\sigma} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j+1} u_{i,j+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

При $k = n$ имеем уравнение $u_{n+1,0} = -a_1 u_{n,1} + g_{n,0}$, из которого однозначно определяется

$$u_{n,1} = -\frac{f_n}{a_1} + \frac{g_{n,0}}{a_1},$$

где функция

$$g_{n,0} = \sum_{i=1}^n C_n^i a_{i+1} u_{n-i,1} + \sum_{i=2}^n C_n^i u_{i,0} u_{n-i,2} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i u_{n-i,1} u_{i,1}$$

зависит от производных порядка не выше n , которые известны в силу предположения индукции. Далее последовательно вычисляются

$$u_{k,n-k+1} = \frac{g_{k,n-k} - u_{k+1,n-k}}{a_1[1 + (n-k)\sigma]}, \quad k = n-1, \dots, 0,$$

где функции

$$g_{k,n-k} = \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \leq n-2}}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j} u_{i,j+2} + \\ + \frac{1}{\sigma} \sum_{\substack{i=0 \\ i+j \neq 0, \\ i+j \neq n}}^k \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i,j+1} u_{k-i,n-k-j+1} + \sum_{i=1}^k C_k^i a_{i+1} u_{k-i,n-k+1}$$

зависят от величин, известных в силу предположения индукции.

Таким образом, для случая $u_{0,1} \neq 0$ формальное решение задачи (10) построено.

2. Рассмотрим случай $u_{0,1} = 0$, в задаче о движении теплового фронта по холодному фону [6] приводящий к тривиальному решению. Однако, если среди f_n есть хотя бы один ненулевой коэффициент, решение также будет ненулевым.

Процедура построения решения здесь аналогична вышеописанной. При этом получают следующие соотношения:

$$u_{2,0} = f_2, \quad u_{1,1} = \frac{f_2}{a_1}, \quad u_{0,2} = \frac{f_2}{a_1^2}.$$

Пусть найдены все производные до порядка n включительно. Тогда из (10), поскольку $u_{1,0} = u_{0,1} = 0$, получаем

$$u_{n+1,0} = f_{n+1}, \quad u_{k,n-k+1} = \frac{u_{k+1,n-k} - g_{k,n-k}}{a_1}, \quad k = n-1, \dots, 0.$$

Таким образом, оба формальных решения задачи (10) построены.

Сходимость построенных рядов доказывается методом мажорант, причем для первого и второго случаев строится одна и та же мажоранта. Подробное доказательство здесь не приводится, так как при этом используется стандартная процедура, предложенная в [6], а само доказательство является весьма громоздким.

Аналогично [6] устанавливается, что область сходимости ряда (8) имеет вид $|t| < t_0, |x - a(t)| < H(t)$, где $t_0 > 0$ — ближайшая к нулю особая точка для функций $a(t), 1/a'(t), f(t)$, $H(t)$ — положительная функция, которая при приближении значения аргумента слева к $t = t_0$ стремится к нулю как некоторая положительная степень величины $|t - t_0|$.

Замечание 1. Данная теорема обобщает результат работы [6] для задачи (3), (5). Задача (3), (6) под ее действие не подпадает.

3. Построение фронта фильтрации

Ряд (8) удобен для исследования (в том числе численного) решения задачи (3), (4) вблизи линии $x = a(t)$. Вместе с тем он не позволяет эффективно строить фронт фильтрации, т.е. линию $x = b(t)$, разделяющую на плоскости Oxt области возмущенного и фонового тривиального решений. В самом деле, уравнение $u = 0$ в случае, когда функция $u(t, x)$ представлена в виде ряда с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами,

решать затруднительно. В данном разделе предлагается процедура, позволяющая построить функцию $b(t)$ в виде степенного ряда.

Сделаем в уравнении (3) замену переменных

$$\begin{cases} s = t, \\ y = x - b(t), \end{cases} \quad (15)$$

аналогичную (9) с той разницей, что функция $b(t)$ пока неизвестна, однако из (4) следует, что $b(0) = 0$. Подобного рода замены нередко применяются при исследовании краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными [6, 9]. В результате задача (3), (4) примет вид

$$\begin{cases} u_s = b'(s)u_y + uu_{yy} + \frac{1}{\sigma}u_y^2, \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=a(s)-b(s)} = f(s), \quad b(0) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Решение задачи (16) будем искать в виде

$$u(s, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} v_{k,l} \frac{s^k y^l}{k! l!}, \quad v_{k,l} = \left. \frac{\partial^{k+l} u}{\partial s^k \partial y^l} \right|_{s=0, y=0}, \quad b(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{s^n}{n!}, \quad b_n = \left. \frac{d^n b}{ds^n} \right|_{s=0}. \quad (17)$$

Коэффициенты рядов (17) определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования $n = k + l$.

Из граничных условий имеем $b_0 = 0$, $v_{k,0} = 0$, $k = 0, 1, \dots$, в том числе $v_{0,0} = 0$, $v_{1,0} = 0$. Для определения $v_{0,1}, b_1$, положив в (16) $s = y = 0$, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b_1 v_{0,1} + \frac{1}{\sigma} v_{0,1}^2 = 0, \\ v_{0,1}(a_1 - b_1) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

При $v_{0,1} \neq 0$ решение (18) запишется как

$$b_1 = a_1, \quad v_{0,1} = -\sigma a_1.$$

Можно убедиться, что случай $v_{0,1} = 0$ приводит к тривиальному решению.

Для определения коэффициентов

$$b_n, v_{n-1,1}, v_{n-2,2}, \dots, v_{0,n} \quad (19)$$

при каждом n решается система линейных алгебраических уравнений с двухдиагональной матрицей и ненулевым определителем. Отыскание коэффициентов (19) соответствует построению рядов (17), в том числе функции $b(t)$.

Замечание 2. Из равенства $a_1 = b_1$ следует, что кривые $x = a(t)$ и $x = b(t)$ при условии $f'(0) = 0$ имеют общую касательную.

4. Вычислительный эксперимент

В ходе вычислительного эксперимента решено значительное число задач вида (10). Приведем одну из них в качестве примера. Константа σ везде выбиралась $\sigma = 3$, что равно показателю адиабаты для воды, а также соответствует для кристаллических диэлектриков при низких температурах так называемому режиму Казимира [10].

Пример 1. Рассматривается задача вида (10) при $a(\tau) = 2\tau$, $f(\tau) = \tau^2$, $\tau, z \in [0, 0.5]$, т. е.

$$\begin{cases} u_\tau = uu_{zz} + \frac{1}{\sigma}u_z^2 + 2u_z, \\ u|_{z=0} = \tau^2. \end{cases}$$

Решение, соответствующее случаю $u_{0,1} \neq 0$, будем строить с помощью отрезков ряда (12). В табл. 1 приведены относительные погрешности при использовании различного числа членов ряда и разного шага по независимым переменным. Погрешность вычисляется относительно приближенного решения, полученного с помощью отрезка ряда со слагаемыми до пятой степени включительно. Здесь под старшей степенью понимается наибольшая степень слагаемых, используемых при суммировании, а шаг по τ и z выбирается одинаковым. Видно, что относительная погрешность уменьшается при измельчении сетки и увеличении старшей степени.

На рис. 2, а представлено решение задачи (сплошными линиями показаны заданные краевые условия при $z = 0$: $u = f(\tau)$ и полученный краевой режим $u = g(\tau, -a(\tau))$, штрихом обозначена найденная линия нулевой температуры). На рис. 2, б приведен краевой режим при $x = 0$. Поскольку в данном случае функции $a(\tau)$, $1/a(\tau)$ и $f(\tau)$

Т а б л и ц а 1. Относительные погрешности приближенного решения

Шаг	Старшая степень		
	2	3	4
0.02	0.024251893	0.004150974	0.002126087
0.01	0.00803836	0.001715344	0.001056605
0.005	0.002315524	0.000300932	7.08592E-05
0.002	0.000712987	5.17148E-05	5.5437E-06
0.001	0.000304731	1.41345E-05	8.88281E-07

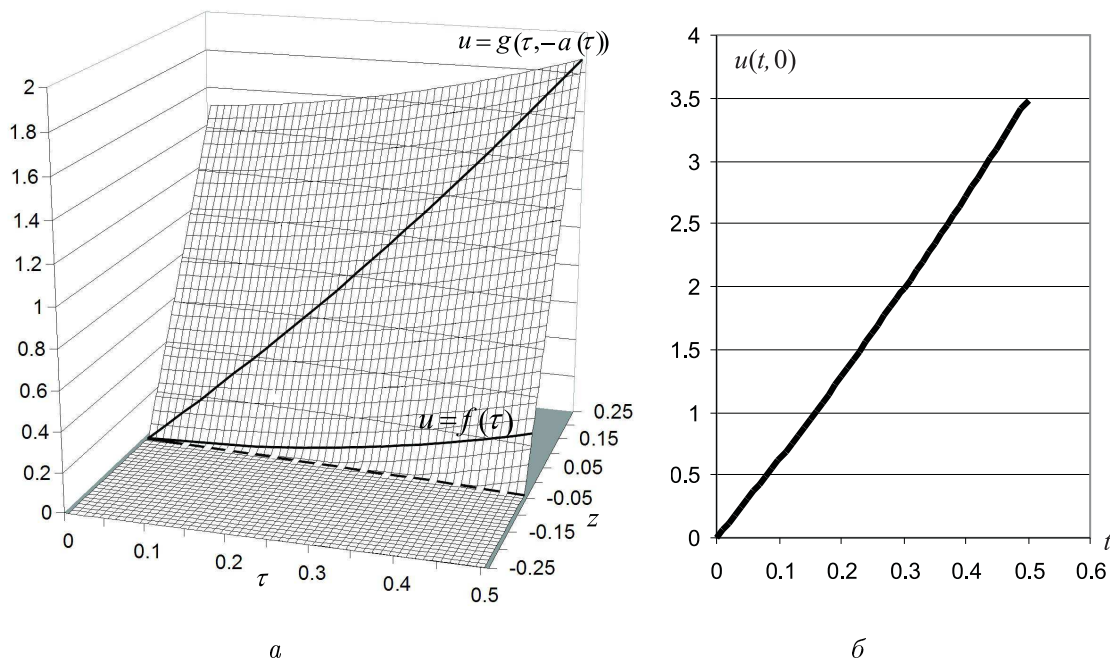


Рис. 2. Решение задачи (а), краевой режим (б)

особенностей не имеют, расчетная область лежит в области сходимости рядов (см. доказательство теоремы в разделе 2).

5. Разностная схема

Будем аппроксимировать точное решение задачи (10) решением следующих разностных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{s} = u_{i,k} \frac{u_{i,k+1} - 2u_{i,k} + u_{i,k-1}}{h^2} + \frac{1}{\sigma} \frac{(u_{i,k+1} - u_{i,k})(u_{i,k} - u_{i,k-1})}{h^2} + \\ \quad + A_i \frac{u_{i,k} - u_{i,k-1}}{h}, \\ u_{i,0} = F_i, \\ k = \overline{1, n-1}, i = \overline{0, n-k-1}. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь $\tau = is$, $z = kh$, значения искомой функции $u_{i,k} \approx u(is, kh)$, $A_i = a'(is)$, $F_i = f(is)$, $k = \overline{1, n-1}$, $i = \overline{0, n-k-1}$, s, h — шаги равномерной сетки. Из соотношений (20) можно видеть, что для аппроксимации u_{zz} необходимо знать значения функции u на двух слоях, а из краевых условий они определяются только на одном слое. Поэтому в общем случае воспользоваться данными разностными уравнениями не представляется возможным.

Однако при $f(\tau) \equiv 0$ эта проблема разрешима, так как из краевых условий имеем $u_{i,0} = 0$, и тогда на первом слое множитель, стоящий при второй производной по z , обращается в нуль. В данном случае разностные уравнения на первом слое примут вид

$$\frac{u_{i+1,0} - u_{i,0}}{s} = \frac{1}{\sigma} \frac{(u_{i,1} - u_{i,0})^2}{h^2} + A_i \frac{u_{i,1} - u_{i,0}}{h},$$

откуда, считая $u_{i,1} \neq 0$, найдем $u_{i,1} = -A_i \sigma h > 0$. Дальнейшие вычисления производятся по схеме (20) при $u_{i,0} = 0$. На рис. 3 штриховой линией показан шаблон для первого слоя, сплошной — для всех начиная со второго слоев. Движение шаблона осуществляется вдоль оси $O\tau$.

На рис. 4 представлена область построения решения в исходных (физических) переменных t, x и в новых переменных τ, z .

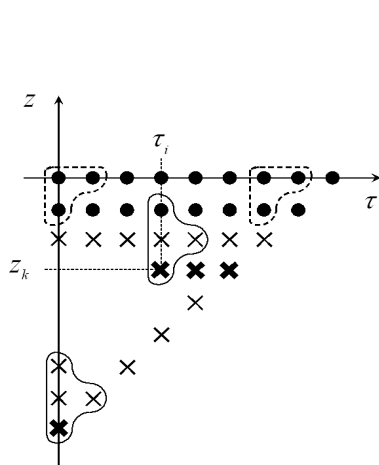


Рис. 3. Шаблон разностной схемы

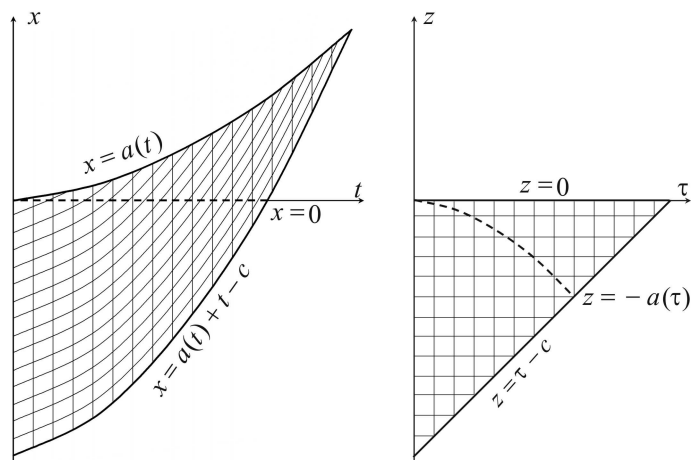


Рис. 4. Область построения решения

Пример 2. Рассматривается задача

$$\begin{cases} u_\tau = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2, \\ u|_{x=a(t)} = 0, \quad a(t) = 0.5t. \end{cases}$$

Для такой задачи известно решение $u(t, x) = -0.5\sigma(x - 0.5t)$. На рис. 5 показано решение задачи в физических t, x (а) и в новых τ, z (б) переменных. Сплошная линия — задание начальных условий, штриховая — найденный краевой режим при $x = 0$. Из рисунка следует, что решения, построенные с помощью разностной схемы и отрезка ряда (12), совпадают с точным решением.

Пример 3. Рассматривается задача

$$\begin{cases} u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2, \\ u|_{x=a(t)} = 0, \quad a(t) = \ln(t + 1), \quad \tau, z \in [0, 0.2]. \end{cases}$$

В табл. 2 приведены погрешности для краевого режима при $x = 0$, полученного с использованием разностной схемы, вычисленные относительно краевого режима, построенного с помощью отрезка ряда со слагаемыми до пятой степени включительно. Видно, что относительная погрешность незначительно уменьшается при измельчении

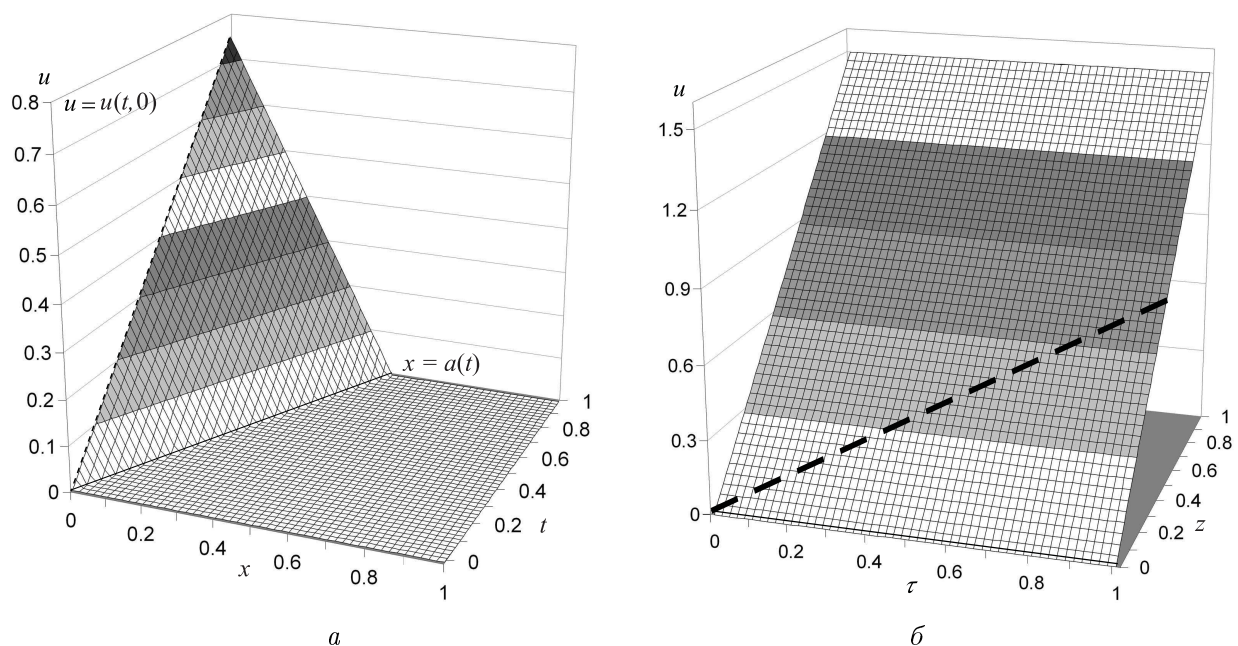
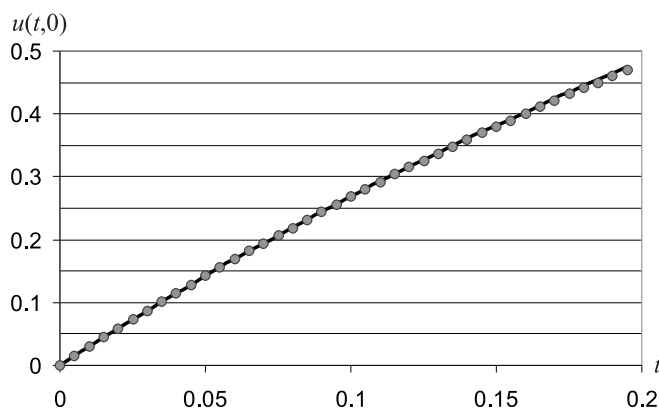


Рис. 5. Решение задачи в физических t, x (а) и в новых τ, z (б) переменных

Т а б л и ц а 2. Относительные погрешности для краевого режима при $z = 0$

Шаг	Относительная погрешность
0.02	0.030537
0.01	0.030452
0.005	0.0299824
0.0025	0.0282477

Рис. 6. Краевой режим при $x = 0$

сетки. В данном случае функция $a(\tau)$ имеет особенность при $\tau = 1$. Следовательно, область существования аналитического решения является ограниченной сверху и при $\tau \geq 1$ ряд (8) заведомо расходится при всех $z > 0$ (см. доказательство теоремы в разделе 2). Проведенные расчеты позволили уточнить область сходимости. В частности, установлено, что относительная погрешность для краевого режима при $x = 0$ с ростом τ при $\tau > 0.2$ существенно возрастает. Это, по-видимому, связано с тем, что ряд при данных значениях τ становится расходящимся.

На рис. 6 показаны краевые режимы при $x = 0$, построенные с помощью разностной схемы (точки) и отрезка ряда (12) (линия).

По результатам представленного исследования можно сделать следующие выводы.

1. Для задачи (3), (4), описывающей, в том числе, нелинейную фильтрацию в пористой среде и обобщающей известную задачу о движении тепловой волны по холодному фону (фронта фильтрации по нулевому фону), построены новые решения в классе аналитических функций.

2. Построенные решения применены для численного исследования рассмотренной задачи.

3. Проведено сравнение расчетов, сделанных при помощи отрезков рядов, с расчетами, выполненными с использованием предложенной в работе разностной схемы, и с известным точным решением. Установлено хорошее совпадение результатов, полученных разными способами для одних и тех же краевых условий.

Хотя расчеты были выполнены при ограничениях (7), полагаем, что в дальнейшем данные требования удастся ослабить, в частности, отказаться от первого из них. В этом случае коэффициенты рядов (8) будут определяться при решении трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений, для которых, вообще говоря, не выполнено условие диагонального преобладания, в силу чего построение решения и доказательство сходимости рядов связаны со значительными аналитическими трудностями, преодоление которых является вопросом специального исследования.

Список литературы

- [1] БАРЕНБЛАТТ Г.И., ЕНТОВ В.М., РЫЖИК В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 220 с.

- [2] Сидоров А.Ф. Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
- [3] Сидоров А.Ф. Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 1. С. 47–51.
- [4] Титов С.С. О движении фронта нелинейной диффузии // Прикл. механика и техн. физика. 1996. Т. 37, № 4. С. 113–118.
- [5] Филимонов М.Ю. О представлении новыми конструкциями специальных согласованных рядов решений нелинейных уравнений с частными производными // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 3. С. 103–112.
- [6] Баутин С.П. Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 87 с.
- [7] Лейбензон Л.С. Собрание трудов. Т. 2. Подземная газогидродинамика. М.: Изд. АН СССР, 1953. 544 с.
- [8] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 478 с.
- [9] Казаков А.Л. Неавтомодельное безударное сжатие симметричного объема газа // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 1. С. 56–70.
- [10] CASIMIR H.V.G. Note on the conduction of heat in crystals // Physica. 1938. Vol. 5, is. 6. P. 495–500.

*Поступила в редакцию 23 сентября 2011 г.,
с доработки — 17 октября 2011 г.*