

## Применение алгоритма адаптации расчётной сетки к решению уравнений Эйлера\*

С. А. Вальгер, Н. Н. Фёдорова

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
Россия*

e-mail: swetla-ya@mail.ru, nfed@itam.nsc.ru

Алгоритмы адаптации расчётной сетки применены к решению 1D- и 2D-уравнений Эйлера. Показано, что использование адаптивной сетки к решению задач газовой динамики приводит к сокращению погрешности решения и уменьшению времени расчёта.

*Ключевые слова:* адаптация сетки, метод эквираспределения, ударные волны, контактные разрывы, уравнения Эйлера.

### Введение

В настоящее время вычислительный эксперимент является актуальным методом решения задач механики сплошной среды. Не имея возможности провести в полном объёме сложный натурный эксперимент, исследователи используют математическое моделирование физических процессов и явлений на ЭВМ. Основным методом моделирования сегодня остаются численные методы. Их реализация в виде программных комплексов, с одной стороны, приводит к получению мощных средств расчёта, но с другой — является весьма ограниченной и зависимой от мощности вычислительных ресурсов. Одной из важнейших проблем численного моделирования является поиск оптимума между “качеством” расчётной сетки и вычислительными ресурсами, необходимыми для расчёта.

Построение качественной расчётной сетки особенно важно при моделировании задач газовой динамики, решение которых может содержать разрывы (ударные волны, контактные разрывы), а также области с быстрым изменением газодинамических переменных (волны разрежения, пограничные слои). Для качественного разрешения таких зон, а также для оптимизации времени расчёта следует использовать адаптивные расчётные сетки. Адаптация сетки дает возможность перераспределять исходные узлы в зависимости от особенностей решения и является частью процесса нахождения решения, что позволяет при расчёте максимально эффективно учитывать особенности его поведения.

Адаптивные расчётные сетки можно классифицировать по выполняемым функциям и по методам построения. Например, при решении задач с пограничными слоями, в которых необходимо сгущать сетку у твёрдых стенок, или задач, где границы области расчёта изменяют свое положение в пространстве и во времени, используется геометрически адаптивная сетка. Построение такой сетки осуществляется согласованно с гео-

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала ВШ” (грант № 2.1.1/11316).

метрией расчётной области. Если же необходимо адаптировать сетку к особенностям физического решения задачи (например, в областях разрывов, быстрых изменений параметров), то применяются динамически адаптивные сетки. Динамически адаптивная сетка в зависимости от метода ее построения может быть адаптивно-встраивающейся или адаптивно-подвижной. Подробное описание преимуществ и недостатков обоих методов приведено в [1].

В настоящей работе исследуется класс адаптивно-подвижных расчётных сеток, состоящих из фиксированного числа узлов, которые по ходу решения перераспределяются и собираются в зонах с быстрым изменением газодинамических переменных. Среди наиболее распространённых подходов в области динамической адаптации сеток можно выделить вариационный метод [2], который базируется на идее минимизации функционала, включающего меры гладкости, ортогональности линий сетки и объёма ячеек сетки, и подразумевает решение специальных уравнений для генерации сетки на каждом расчётном шаге одновременно с поиском самого решения. Основное преимущество метода заключается в возможности получения невырожденной гладкой почти ортогональной сетки со сгущением узлов в тех областях, где необходимо высокое разрешение. В работе использован вариант вариационного метода, реализующий принцип эквираспределения: произведение объёма ячейки на значение некоторой управляющей функции-монитора в центре ячейки постоянно, т. е.

$$\omega(x(\xi))J(\xi) = C = \text{const.} \quad (1)$$

Здесь  $x = x(\xi)$  — преобразование, задающее соответствие между исходной и адаптивной сетками,  $J(\xi)$  — его якобиан,  $\omega(x(\xi))$  — управляющая функция-монитор. Выбор функции  $\omega(x(\xi))$  существенно влияет на точность численного решения. В большинстве случаев необходимо производить ее сглаживание. Некоторые методики сглаживания функции-монитора описаны в [3].

На основе изложенного в [4] подхода, основанного на решении дифференциальных уравнений для сетки на каждом итерационном шаге по времени, были построены и программно реализованы алгоритмы адаптации расчётной сетки в случае одной (1D) и двух (2D) пространственных переменных. В [4] эффективность метода адаптации сетки продемонстрирована на решении нелинейного 2D-уравнения теплопроводности и вязких несжимаемых уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска. В настоящей работе приведены результаты решения системы уравнений Эйлера с использованием адаптивных сеток в 1D- и 2D-постановках. Эта работа является продолжением [5], в которой алгоритм адаптации был применён к решению одномерных линейного и нелинейного уравнений переноса.

## 1. Описание метода

Рассмотрим 1D-систему уравнений Эйлера, представленную в дивергентном виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \cdot u \\ \rho \cdot E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho \cdot u \\ \rho \cdot u^2 + p \\ \rho \cdot u \cdot H \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $u$  — скорость,  $p$  — давление,  $E$  — удельная полная энергия,  $H$  — полная энтальпия. Уравнения (2) дополнены уравнением состояния идеального газа

$$p = \rho \cdot R \cdot T, \quad (4)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная (для воздуха  $R = 287$  Дж/(кг·град)),  $T$  — абсолютная температура.

На равномерной расчётной сетке приближённое решение (2)–(4) можно получить с помощью консервативной разностной схемы

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n}{h} = 0. \quad (5)$$

Запишем консервативную разностную схему на подвижной сетке для системы уравнений (2)–(4):

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} = \frac{1}{J_i} \left[ \dot{x}_i A - \frac{F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n}{h} \right], \quad (6)$$

где

$$A = \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{h} \quad \text{при } \dot{x} > 0, \quad A = \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{h} \quad \text{при } \dot{x} \leq 0. \quad (7)$$

Устойчивость схемы будет зависеть от способа вычисления  $F_{i\pm\frac{1}{2}}^n$  — потоков на границах расчётных ячеек. В настоящей работе использованы два варианта метода расщепления невязких потоков (FVS), а именно, с учетом физических процессов конвекции и давления [6] и метод ван Лира [7]. Для повышения точности численного решения была применена TVD-схема третьего порядка аппроксимации [8].

В (7) символ  $\dot{x}$  отображает изменение сетки и определяется из уравнения

$$x_t = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \omega \frac{\partial x}{\partial \xi} \right), \quad (8)$$

где

$$\omega = \sqrt{1 + \sigma |\nabla' G|^2} - \quad (9)$$

управляющая функция, зависящая от коэффициента сгущения сетки  $\sigma$  и модуля градиента функции  $|\nabla' G|$ . Функцией  $G$  может быть любая из искомым газодинамических переменных. В настоящей работе в качестве такой функции выбрана плотность как наиболее чувствительный параметр задачи.

## 2. Результаты

Алгоритм решения одномерных уравнений Эйлера на адаптивной сетке был реализован в виде программного расчётного модуля в среде Borland C++ Builder 6 и использован для решения задачи о распаде произвольного разрыва, которая имеет точное аналитическое решение [9]. В работе исследовано три теста с различным соотношением параметров слева и справа от разрыва: тест Сода (10), тест Лакса (11) и сверхзвуковой тест (МЗ)(12) [9]:

$$\rho_1 = 1, \quad p_1 = 1, \quad u_1 = 0, \quad \rho_2 = 0.125, \quad p_2 = 0.1, \quad u_2 = 0, \quad (10)$$

$$\rho_1 = 0.445, \quad p_1 = 3.528, \quad u_1 = 0.698, \quad \rho_2 = 0.5, \quad p_2 = 0.571, \quad u_2 = 0, \quad (11)$$

$$\rho_1 = 3.857, \quad p_1 = 10.333, \quad u_1 = 0.92, \quad \rho_2 = 1, \quad p_2 = 1, \quad u_2 = 3.55, \quad (12)$$

В (10)–(12) величины обезразмерены с помощью параметров набегающего потока:

$$\bar{u} = u/U_\infty, \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_\infty, \quad \bar{p} = p/(\rho_\infty U_\infty^2). \quad (13)$$

В качестве  $U_\infty$  в (13) можно использовать скорость звука  $c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ .

На рис. 1 изображены графики плотности (1), давления (2) и скорости (3) для теста Сода на момент времени  $t = 0.2$ , количество узлов расчётной сетки  $N = 100$ , расчётная область  $L = 1$ . Графики представляют результат приближённого решения задачи на адаптивной сетке (сплошные линии) и точное решение задачи (штрихпунктирные линии) и позволяют отследить характерные особенности решения 1D-уравнений Эйлера: волну разрежения (ВР), контактный разрыв (КР), ударную волну (УВ).

В таблице приведены среднеквадратичная погрешность для различного количества узлов и время работы модуля на компьютере (Intel Core 2 Duo, 3.16 GHz) при использовании двух видов сеток: фиксированной ( $\sigma = 0$ ) и адаптивной ( $\sigma = 20$ ). Численное решение, полученное при сравнительно небольшом количестве узлов на адаптивной сетке ( $N = 50$ ), имеет более высокую точность по сравнению с расчётом на фиксированной сетке при аналогичном шаге по пространству. Анализируя время работы программы, можно говорить об эффективности алгоритма адаптации: применение адаптивной сетки позволяет получить более точное решение при меньшем количестве узлов, а следовательно, сократить время расчёта. Из таблицы видно, что при расчёте на достаточно большом количестве узлов ( $N = 200$ ) для данной тестовой задачи использование адаптивной сетки не эффективно, так как и простая сетка даёт достаточно реальную картину решения с меньшими временными затратами. Отсюда следует вывод, что размерность расчётной сетки, необходимость адаптации к особенностям решения и значение коэффициента адаптации для каждой задачи устанавливаются индивидуально исходя из условий эффективности применения адаптивной сетки.

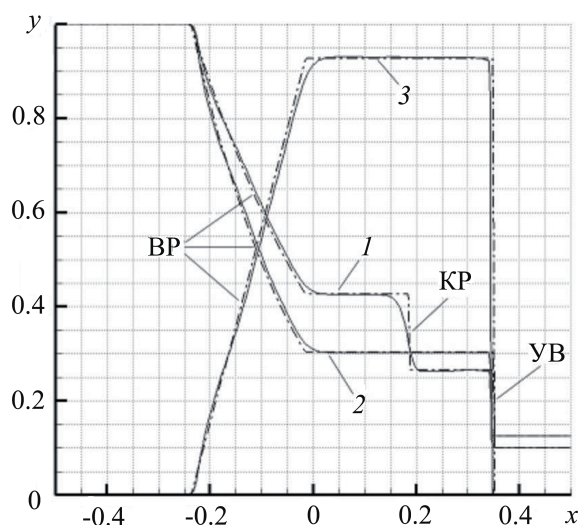


Рис. 1. Точное решение теста Сода и приближённое решение, полученное на адаптивной сетке на момент времени  $t = 0.2$

Среднеквадратичная погрешность решения и время расчёта для теста Сода

Коэффициент адаптации	Среднеквадратичная погрешность	Время выполнения расчёта, с
$N = 25$		
$\sigma = 0$	5.52E-03	0.032
$\sigma = 20$	3.56E-03	0.032
$N = 50$		
$\sigma = 0$	1.07E-03	0.062
$\sigma = 20$	3.24E-04	0.094
$N = 100$		
$\sigma = 0$	2.92E-04	0.157
$\sigma = 20$	1.26E-04	0.261
$N = 200$		
$\sigma = 0$	1.37E-04	0.281
$\sigma = 5$	9.94E-05	0.51

На рис. 2 представлены графики плотности точного (1) и приближённого (на простой (2) и адаптивной (3) расчётных сетках при  $\sigma = 5$ ) решений для теста Лакса на момент времени  $t = 0.2$  при одинаковом количестве узлов  $N = 100$ . Особенностью данного теста является более интенсивная, чем в тесте Сода, ударная волна. Из рисунка видно, что приближённое решение, полученное на адаптивной сетке, успешно разрешает характерные газодинамические особенности: волну разрежения, контактный разрыв, ударную волну. Решение, полученное на адаптивной сетке, дает меньшую погрешность по сравнению с решением на фиксированной сетке.

Оценим затраты времени, необходимые для выполнения алгоритма решения. Результаты расчёта на фиксированной сетке при  $N = 100$  для теста Лакса были получены за 0.172 с, а на адаптивной сетке с коэффициентом адаптации  $\sigma = 15$  и аналогичным

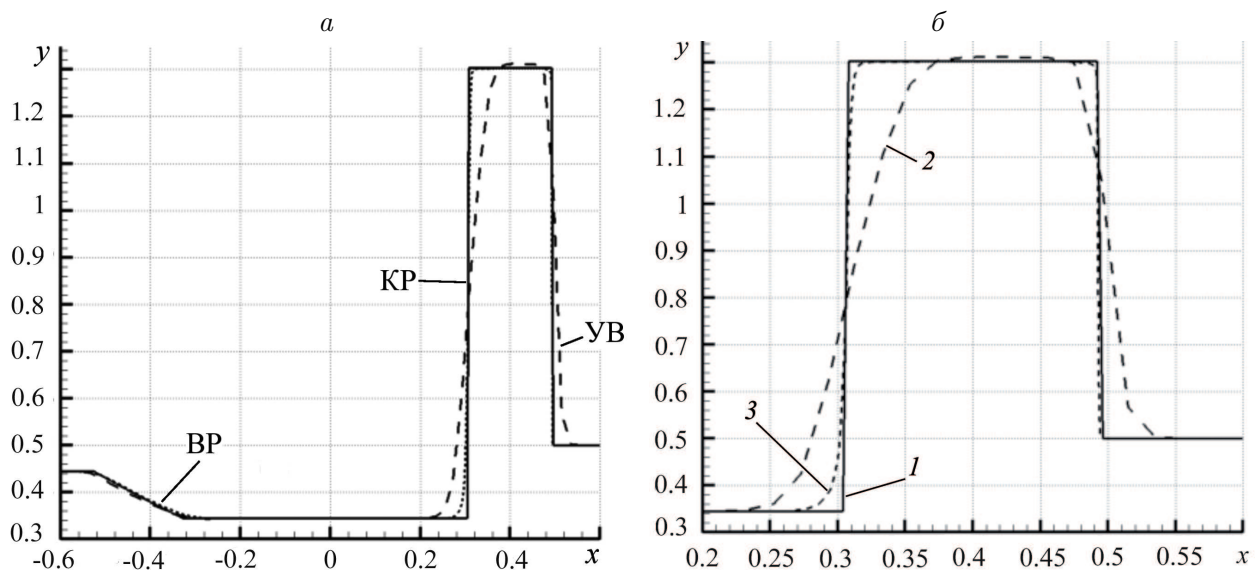


Рис. 2. График плотности для теста Лакса на момент времени  $t = 0.2$ : точное решение (1), решение на простой сетке (2), решение на адаптивной сетке (3); а — график плотности на отрезке  $[-0.6; 0.6]$ , б — график плотности на отрезке  $[0.2; 0.6]$

числом узлов — за 0.875 с. При решении задачи на фиксированной сетке для достижения порядка точности, сопоставимого с точностью решения, полученного на адаптивной сетке, необходимо измельчить пространственный шаг равномерной сетки до  $N = 400$ , а затраты времени на такой расчёт составляют 1.359 с.

Для теста МЗ со сверхзвуковым течением (на рис. 3 показано решение в области размерностью  $L = 4$  и количеством узлов  $N = 200$ ) также были получены хорошие результаты, указывающие на эффективность применения адаптивных расчётных сеток к решению задач с разрывами. Приближенное решение хорошо разрешает сложные газодинамические особенности задачи и является монотонным и устойчивым.

Таким образом, для всех рассмотренных тестов использование нестационарных адаптивных сеток позволило сократить время расчёта за счет получения более точного решения на сравнительно небольшом количестве пространственных шагов.

Далее алгоритм адаптации расчётной сетки был обобщен на случай двух пространственных переменных и реализован в виде программного расчётного модуля. В качестве уравнений для сетки в работе использованы предложенные в [4] уравнения

$$x_t = \nabla'(\omega \nabla' x), \quad (14)$$

$$y_t = \nabla'(\omega \nabla' y). \quad (15)$$

Эти уравнения аппроксимируются неявной по времени разностной схемой, имеющей второй порядок по пространственным переменным, и решаются с помощью метода продольно-поперечной прогонки [10]. Работоспособность алгоритма проверена на описанных в [4] тестовых функциях

$$u(x, y) = ce^{-c^2(x^2+y^2)}, \quad (16)$$

$$u(x, y) = 1 + 10 \cdot e^{(-50 \cdot (y-0.5-0.25 \cdot \sin(2\pi \cdot x))^2)}. \quad (17)$$

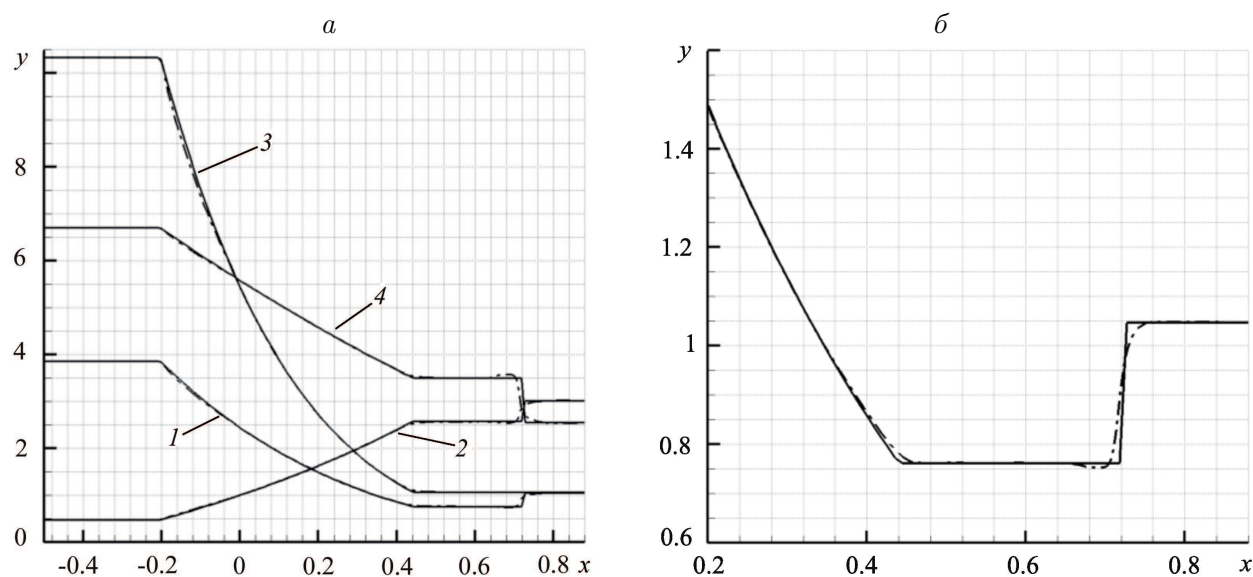


Рис. 3. Решение для теста МЗ на момент времени  $t = 0.2$ : точное (сплошная линия) и на адаптивной сетке (штрихпунктирная линия); а — график плотности (1), числа Маха (2), давления (3), энергии (4) во всей расчётной области, б — график плотности на отрезке  $[0.2; 0.8]$

Построим (16) на фиксированной сетке с размерами расчётной области  $L_x = 1, L_y = 1$ , количеством узлов  $N_x = 40, N_y = 40$  и параметром  $c = 5$ . На рис. 4, I, *a* представлена функция (16) от двух пространственных переменных, на рис. 4, I, *б* — исследуемая функция с коэффициентом адаптации  $\sigma = 5$ , на рис. 4, II, *a, б* — соответственно то же для функции (17) при  $\sigma = 1$ .

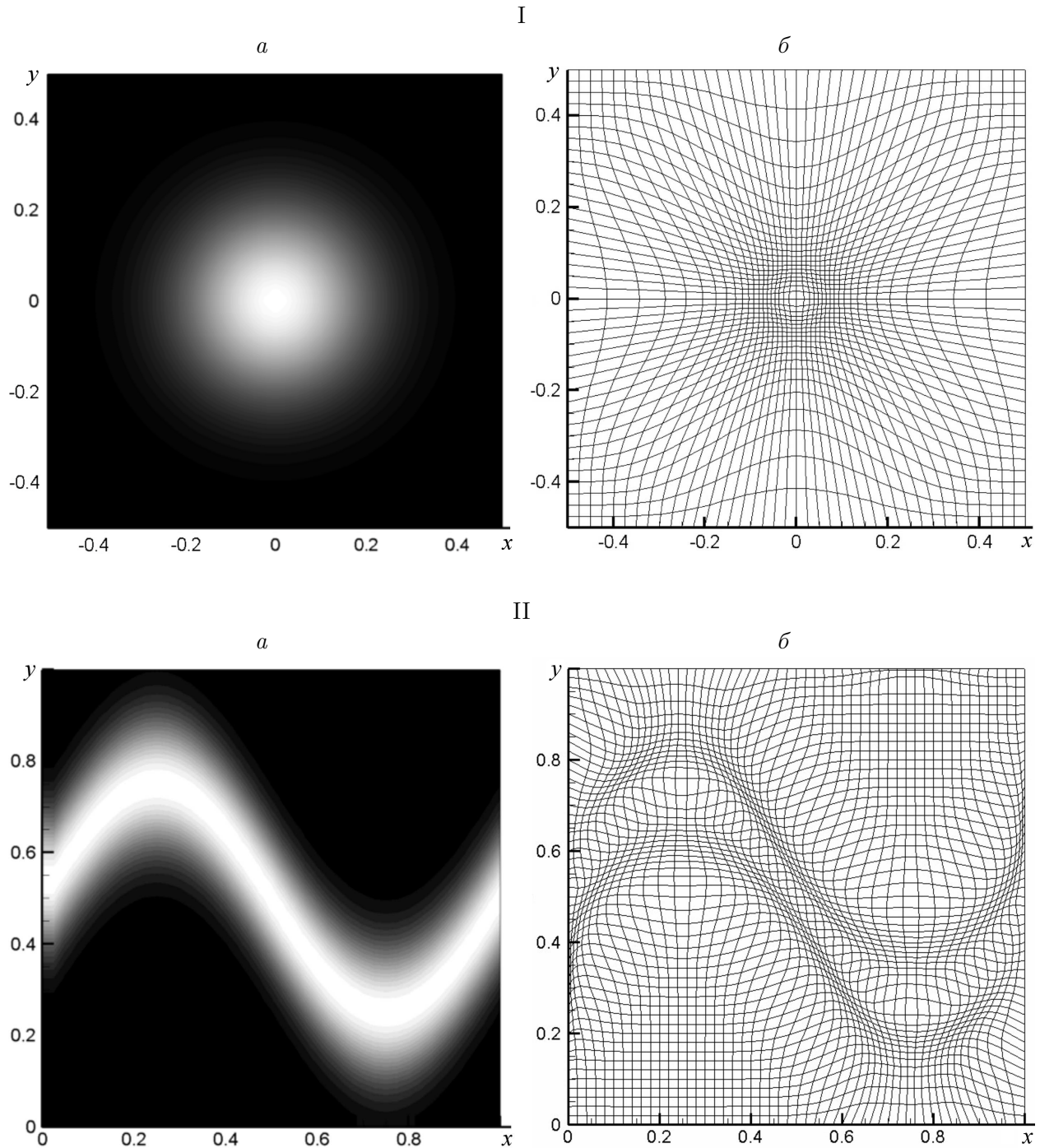


Рис. 4. Адаптация сетки к особенностям функции 16 (I), 17 (II): *a* — исследуемая функция, построенная на равномерной расчётной сетке, *б* — сетка, адаптированная к особенностям функции при  $\sigma = 5$  (I),  $\sigma = 1$  (II)

Для исследования свойств алгоритма адаптации в случае 2D разработан расчётный модуль, позволяющий получить численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Эйлера

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial G(U)}{\partial y} = 0, \quad (18)$$

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \cdot u \\ \rho \cdot v \\ \rho \cdot E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho \cdot u \\ \rho \cdot u^2 + p \\ \rho \cdot u \cdot v \\ \rho \cdot u \cdot H \end{pmatrix}, \quad G(U) = \begin{pmatrix} \rho \cdot v \\ \rho \cdot u \cdot v \\ \rho \cdot v^2 + p \\ \rho \cdot v \cdot H \end{pmatrix} \quad (19)$$

(обозначения переменных совпадают с таковыми (2)–(3), добавлена  $v$  — скорость в направлении  $y$ ).

С целью построения устойчивой аппроксимации конвективных членов аналогично одномерному случаю векторы потоков  $F$  и  $G$  необходимо разложить на положительную и отрицательную составляющие, для чего, как и в одномерной задаче, используется FVS-метод Ван Лира. Для более точного разрешения всех газодинамических особенностей задачи применена TVD-схема третьего порядка аппроксимации.

Далее была рассмотрена 2D-задача о распаде произвольного разрыва (тест Сода). Разрыв начальных данных имел место на линии, соединяющей нижний левый и верхний правый углы расчётной области. На рис. 5, *а* показана адаптированная к особенностям решения расчётная сетка, на рис. 5, *б* представлено распределение плотности, полученное на адаптивной сетке на момент времени  $t = 0.2$  при количестве узлов расчётной области  $N_x = 45$ ,  $N_y = 45$ . Расчётная сетка хорошо передает особенности решения, но вблизи границ наблюдается искривление ударной волны и контактного разрыва. Это связано с несовершенством алгоритма задания граничных условий для линий сетки: для искомых функций сетки  $x(\xi, \eta)$  и  $y(\xi, \eta)$  используются мягкие граничные условия, т. е. на границу области переносятся значения функций из ближайших внутренних узлов.

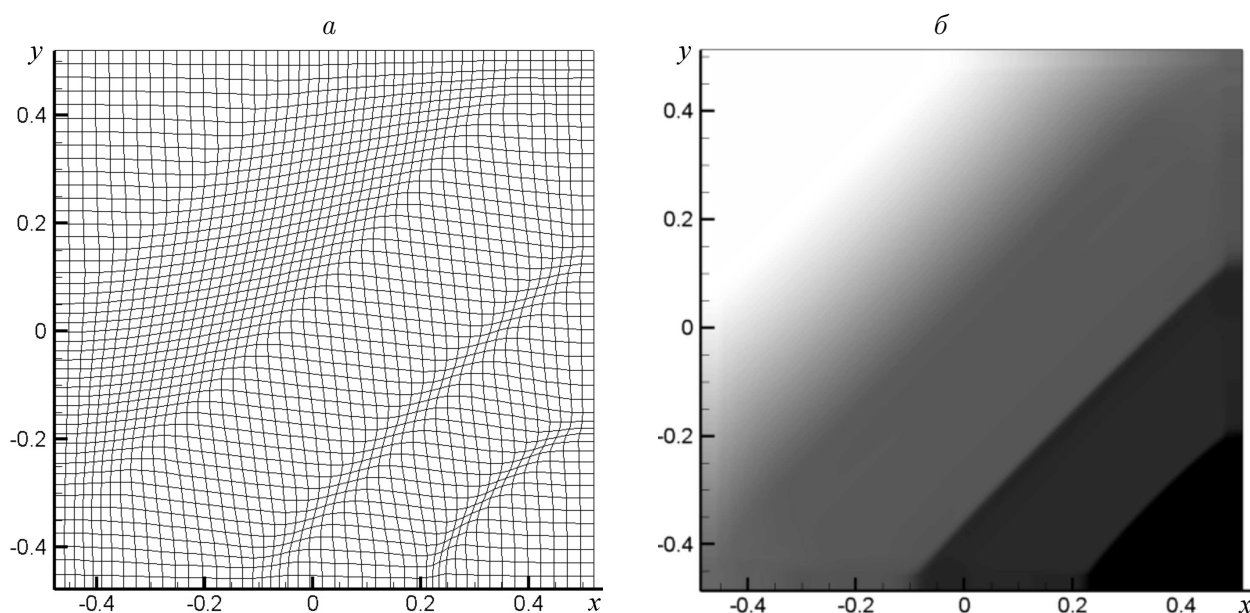


Рис. 5. 2D-задача о распаде произвольного разрыва (тест Сода): *а* — сетка, адаптированная к особенностям решения, *б* — распределение плотности



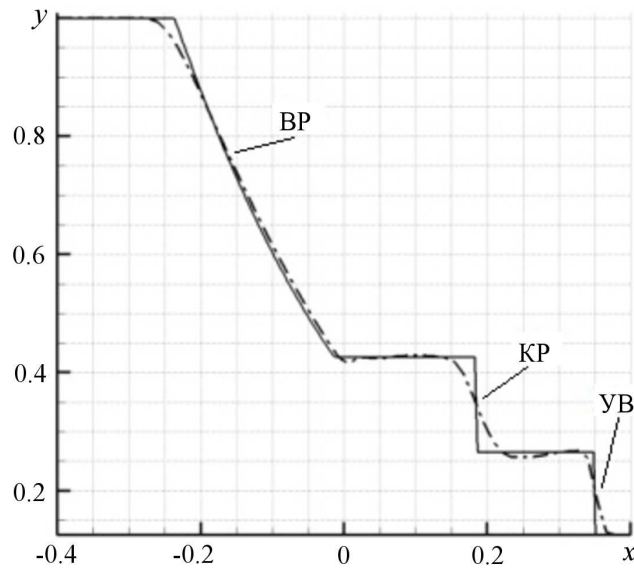


Рис. 6. Профиль плотности для теста Сода на момент времени  $t = 0.2$  при  $N = 45 \times 45$ ; сплошная линия — точное решение, штрихпунктирная — решение, полученное на адаптивной сетке

Для исследования точности решения, полученного на адаптивной сетке, построим профиль плотности, полученный при численном решении (см. рис. 5) в сечении, нормальном к линии начального разрыва (рис. 6). На профиле видно немонотонное поведение численного решения вблизи точки  $x = 0$ , не наблюдаемое при решении аналогичной задачи в одномерной постановке. Кроме того, в областях разрывов полученное решение размывается несколько сильнее по сравнению с решением в одномерной постановке.

## Заключение

Данная работа является продолжением [5] по исследованию методов адаптации расчётной сетки к решению одномерных и двумерных дифференциальных уравнений, описывающих физические процессы газовой динамики. Для построения динамической адаптивной сетки был использован метод эквираспределения. Особое внимание уделено повышению точности решения, полученного на адаптивной сетке, за счет применения схем повышенного порядка аппроксимации (TVD-схем). На основе теоретического исследования были разработаны и программно реализованы в виде расчётных модулей алгоритмы адаптации сетки в случае одной и двух пространственных переменных, а также алгоритмы решения на адаптивной сетке уравнений Эйлера в одномерной и двумерной постановках.

Работа модулей протестирована на 1D- и 2D-задачах газовой динамики, имеющих точные аналитические решения. Для всех рассмотренных случаев решения, полученные на адаптивной сетке, хорошо разрешали газодинамические особенности задач и являлись монотонными и устойчивыми. Результаты расчётов показали, что использование адаптивной сетки в сравнении с фиксированной приводит к существенному снижению среднеквадратичной погрешности решения и сокращению временных затрат на расчёт, что свидетельствует о работоспособности и эффективности предложенных алгоритмов.

## Список литературы

- [1] ГИЛЬМАНОВ А.Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Наука. Физматлит, 2000. 248 с.
- [2] BRACKBILL J.U. An adaptive computation mesh for the solution of singular perturbation problems // Numerical Grid Generation Techniques. NASA Conf. Publ. 2166, 1980. P. 193–196.
- [3] ХАКИМЗЯНОВ Г.С., ШОКИН Ю.И. Разностные схемы на адаптивных сетках. Ч. 1. Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 2005. 132 с.
- [4] SENICEROS H.D. An efficient dynamically adaptive mesh for potentially singular solutions // J. Comput. Phys. 2001. Vol. 172. P. 609–639.
- [5] БЕДАРЕВ И.А., ВАЛЬГЕР С.А., ФЕДОРОВА Н.Н. Расчеты сверхзвуковых течений с использованием адаптивных сеток // Труды НГАСУ. 2010. Т. 13, № 1(47). С. 58–63.
- [6] КОВЕНЯ В.М., ЯНЕНКО Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 303 с.
- [7] ANDERSON W.K. Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // AIAA J. 1986. Vol. 24, No. 9. P. 1453–1459.
- [8] ANDERSON W.K., THOMAS J.L., VAN-LEER B. Comparison of finite volume flux vector splittings for the Euler equations // AIAA J. 1986. Vol. 24. P. 1453–1460.
- [9] TORO E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin: Springer, 1997.
- [10] ЯНЕНКО Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 189 с.

*Поступила в редакцию 6 декабря 2011 г.,  
с доработки — 16 апреля 2012 г.*