

## Символьно-численные расчёты нормальной формы, интеграла движения и сечений Пуанкаре для консервативных двумерных гамильтоновых систем

В. Е. БОГАЧЁВ, Н. А. ЧЕКАНОВ

*Белгородский государственный национальный  
исследовательский университет, Россия*

e-mail: jancoov@gmail.com, chekanov@bsu.edu.ru

Представлено краткое описание разработанных в среде Maple 8 алгоритмов для символьно-численных расчётов нормальных форм и формальных (приближённых) интегралов движения по методу Биркгофа — Густавсона для гамильтоновых систем с произвольным числом степеней свободы. Приведены результаты расчётов сечений Пуанкаре, полученные при данном подходе с помощью приближённого интеграла движения, и их сравнение с точными вычислениями в случае гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Показано, что имеется хорошее согласие результатов расчётов в области энергий, где классическое движение является регулярным.

*Ключевые слова:* классическая механика, функция Гамильтона, нормализация, сечения Пуанкаре, динамический хаос, интегралы движения, математическое моделирование.

### Введение

Поскольку большинство динамических задач классической механики не могут быть представлены в явном виде (см., например, [1–3]), то продолжают разрабатываться как различные приближённые аналитические методы [4–8], так и методы непосредственных прямых численных расчётов [9–11]. На сегодня перспективным направлением является создание гибридных, или комбинированных, методов, в которых вначале производятся аналитические вычисления, затем — численные расчёты с использованием современных математических пакетов прикладных программ, например MAPLE, REDUCE, MATHEMATICA и др. [12–14].

В настоящей работе представлены результаты символьно-численных расчётов нормальной формы, интеграла движения и сечений Пуанкаре для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Проведено сравнение сечений Пуанкаре, полученных с помощью интегралов движения по методу Биркгофа — Густавсона, с их прямыми численными расчётами. Сечения Пуанкаре для неинтегрируемых гамильтоновых систем, вычисленные с помощью полученных интегралов движения, достаточно хорошо воспроизводят результаты прямых численных расчётов для энергий, при которых доля фазового пространства, занятого хаотическими траекториями, небольшая. Для энергий выше критических при сильно развитом динамическом хаосе согласие не имеет место.

## 1. Метод Биркгофа — Густавсона

Пусть дана классическая система с  $n$  степенями свободы, гамильтониан которой можно записать в виде разложения

$$H = \sum_{k=1}^n \frac{\omega_k}{2} (p_k^2 + q_k^2) + \sum_{S=3}^{\infty} \sum_{\substack{l_1+\dots+l_n+ \\ m_1+\dots+m_n=S}} C_{l_1,\dots,l_n,m_1,\dots,m_n} p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_n^{l_n} \cdot q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_n^{m_n}, \quad (1)$$

где  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  — канонически сопряжённые переменные,  $C_{l_1,\dots,l_n,m_1,\dots,m_n}$  — известные коэффициенты. Частоты  $\omega_k$  могут быть как несоизмеримыми (нерезонансными), так и соизмеримыми (резонансными), для которых имеется  $r$  независимых соотношений

$$\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} \omega_k = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, r, \quad (2)$$

где матричные элементы  $a_{ik}$  — целые числа. Для приведения исходного гамильтониана (1) к нормальной форме необходимо выполнить весьма трудоёмкие канонические преобразования  $(q, p) \rightarrow (\xi, \eta)$ . Как известно [15, 16], функция Гамильтона  $H(q, p)$  находится в нормальной форме, если выполняется условие

$$D G(\xi, \eta) = 0, \quad (3a)$$

$$D = \sum_{k=1}^n \omega_k \left( \eta_k \frac{\partial}{\partial \xi_k} - \xi_k \frac{\partial}{\partial \eta_k} \right). \quad (3b)$$

$D$  — так называемый дифференциальный оператор нормальной формы.

Как показано в работах [15, 16], для выполнения процедуры нормализации необходимо решить основное уравнение

$$D(q, \eta) W^{(S)}(q, \eta) = -H^{(S)}(q, \eta) + \Gamma^{(S)}(q, \eta), \quad (4)$$

где  $W^{(S)}$  — однородный полином степени  $S$  в производящей функции

$$F(q, \eta) = q \cdot \eta + W^{(3)}(q, \eta) + \dots + W^{(S)}(q, \eta) + \dots, \quad (5)$$

которая приводит к нормальной форме полиномиальные члены исходного гамильтониана (1) степени  $S$ . Слагаемые функции Гамильтона более высокой чем  $S$  степени вычисляются по формуле

$$\Gamma^{(i)}(\xi, \eta) = H^{(i)}(\xi, \eta) + \sum_{|k|} \frac{1}{k!} \left( \left( \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \xi} \right)^k \left( \frac{\partial^{|k|} H^{(l)}}{\partial \eta^k} \right) - \left( \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \eta} \right)^k \left( \frac{\partial^{|k|} \Gamma^{(l)}}{\partial \xi^k} \right) \right), \quad (6)$$

где  $i = S + 1, S + 2, \dots$  и  $l - |k| + |k| (S - 1) = i$ ,  $1 \leq |k| \leq l < i$ ,  $l \geq 2$ ,  $s \geq 3$ ,  $|k| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|$ ,  $k! = k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!$ .

В работе [15] доказано, что существует  $(n - r)$  приближённых независимых интегралов движения вида

$$I(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{2} (\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad (7)$$

где  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  есть любой  $n$ -мерный вещественный вектор такой, что выполняются уравнения

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \mu_k = 0, i = 1, 2, 3, \dots, r. \quad (8)$$

Выполняя обратное преобразование  $(\xi, \eta) \rightarrow (q, p)$ , можно получить интегралы движения в исходных канонически сопряжённых переменных  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ,  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ .

## 2. Краткое описание алгоритма

Input:

$n$  — число степеней свободы;

$S_{MAX}$  — желаемый максимальный порядок нормальной формы и интегралов движения;

$j_{max}$  — максимальная степень исходного гамильтониана, квадратичная часть которого задается в нормальной форме, а  $v[2] + v[3] + \dots + v[j] + \dots + v[j_{max}]$  — его потенциальная часть;

если  $gir \neq 0$ , то нормальная форма вычисляется в переменных действие — угол;

если  $intg2 \neq 0$ , то вычисляются интегралы движения, независимые от интеграла энергии;

если  $intg2 \neq 0$  и  $test1 \neq 0$ , то скобка Пуассона  $pb = \{H, intg2\}$  не должна равняться нулю;

если  $intg2 \neq 0$  и  $test2 \neq 0$ , то  $H test2$  должен быть равен исходному гамильтониану.

Output:

$g_{S_{MAX}} = g^{(2)} + g^{(3)} + \dots + g^{(S_{MAX})}$  — нормальная форма;

$w_{S_{MAX}} = w^{(3)} + w^{(4)} + \dots + w^{(S_{MAX})}$  — производящая функция, где  $w^{(S)}$  — однородные полиномы степени  $S$  вида  $p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_n^{l_n} \cdot q_1^{m_1} q_2^{m_2} \dots q_n^{m_n}$ ,  $S = l_1 + l_2 + \dots + l_n + m_1 + m_2 + \dots + m_n$ ;

$intg[i]$  — дополнительные интегралы движения в переменных  $(p_1^{l_1}, p_2^{l_2}, \dots, p_n^{l_n})$ ,  $(q_1^{m_1}, q_2^{m_2}, \dots, q_n^{m_n})$ .

## 3. Результаты расчётов для некоторых гамильтоновых систем

Ниже представлены нормальная форма  $G_{S_{MAX}}$  и приближённые интегралы движения  $I$ , вычисленные с помощью разработанной программы, и сечения Пуанкаре, полученные как с помощью приближённого интеграла движения, так и прямыми численными расчётами для трёх консервативных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы.

1. Неинтегрируемая система с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + bq_1^2 q_2^2 + c(q_1^2 + q_2^2)^2, \quad (9)$$

для которой вычислены нормальная форма и приближённый интеграл движения до степени  $S_{MAX} = 6$ . Нормальная форма здесь и ниже представлена также в переменных

действие — угол  $(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2)$ :

$$G(I_1, I_2, \phi_2) = 2I_1 + (b + 5c)I_1^2 - \left(\frac{b-c}{4}\right)I_2^2 - \left(\frac{9b^2}{8} + \frac{21bc}{2} + 25c^2\right)I_1^3 + \\ + \frac{1}{4}\left(\frac{9b^2}{8} + \frac{21bc}{2} - 9c^2\right)I_1I_2^2 + \left(\frac{b+2c}{8}\right)(1 - 2bI_1 - 9cI_1)(4I_1^2 - I_2^2)\cos(2\phi_2), \quad (10)$$

$$G_6 = G^{(2)} + G^{(3)} + G^{(4)} + G^{(5)} + G^{(6)}, \quad (11)$$

$$G^{(2)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \xi_1^2) + \frac{1}{2}(\eta_2^2 + \xi_2^2), \quad (12)$$

$$G^{(4)} = \frac{3c}{8}\left((\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2\right) + \left(\frac{b+2c}{8}\right)(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 + \frac{3b}{8}(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)^2 + \\ + \frac{3c}{4}(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)^2, \quad (13)$$

$$G^{(6)} = \frac{17c^2}{32}\left((\xi_1^2 + \xi_2^2)^3 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)^3\right) - \frac{1}{128}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2)\left((b + 32bc + 60c^2) \times \right. \\ \left. \times (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 + 17b(b + 8c)(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)^2 + 204c^2(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)^2\right), \quad (14)$$

$$G^{(3)} = 0, \quad G^{(5)} = 0, \quad (15)$$

$$I = \frac{3}{8}c(2p_1^2q_1^2 + p_1^4 + p_2^4 + 2p_2^2q_2^2 + q_1^4 + q_2^4) + \\ + \frac{c^2}{32}(-35p_1^6 + 13q_2^6 + 13q_1^6 - 35p_2^6 - 105p_2^4q_2^2 - 57p_2^2q_2^4 - 105p_1^4q_1^2 - 57p_1^2q_1^4) + \\ + \left(\frac{1}{8}b + \frac{1}{4}c\right)(q_1^2p_2^2 + 3q_1^2q_2^2 + p_1^2q_2^2 + 3p_1^2p_2^2 + 4p_1q_1p_2q_2) + \\ + \left(-\frac{25}{8}bc - \frac{15}{4}c^2 - \frac{5}{8}b^2\right)(p_1^3q_1p_2q_2 + p_1p_2^3q_2q_1) + \\ + \left(-\frac{17}{8}bc - \frac{1}{8}b^2 - \frac{15}{4}c^2\right)(p_1q_1^3p_2q_2 + p_1p_2q_2^3q_1) + \\ + \left(-\frac{5}{8}bc + \frac{5}{128}b^2 - \frac{45}{32}c^2\right)(p_1^4q_2^2 + q_1^2p_2^4) + \left(\frac{13}{128}b^2 + \frac{13}{16}bc + \frac{39}{32}c^2\right)(q_1^4q_2^2 + q_1^2q_2^4) + \\ + \left(-\frac{35}{128}b^2 - \frac{35}{16}bc - \frac{105}{32}c^2\right)(p_1^4p_2^2 + p_1^2p_2^4) + \left(-\frac{11}{128}b^2 - \frac{1}{8}bc + \frac{3}{32}c^2\right)(q_1^4p_2^2 + p_1^2q_2^4) + \\ + \left(-\frac{15}{64}b^2 - \frac{75}{16}c^2 - \frac{45}{16}bc\right)(p_1^2q_1^2p_2^2 + p_1^2p_2^2q_2^2) + \\ + \left(-\frac{15}{64}b^2 - \frac{21}{16}bc - \frac{27}{16}c^2\right)(p_1^2q_2^2q_1^2 + q_1^2p_2^2q_2^2). \quad (16)$$

Как видно из рис. 1,  $a$  сечения Пуанкаре, вычисленные с помощью приближённого интеграла (3), достаточно хорошо воспроизводят структуру фазового пространства для энергий, при которых в системе реализуется регулярный характер движения. По мере

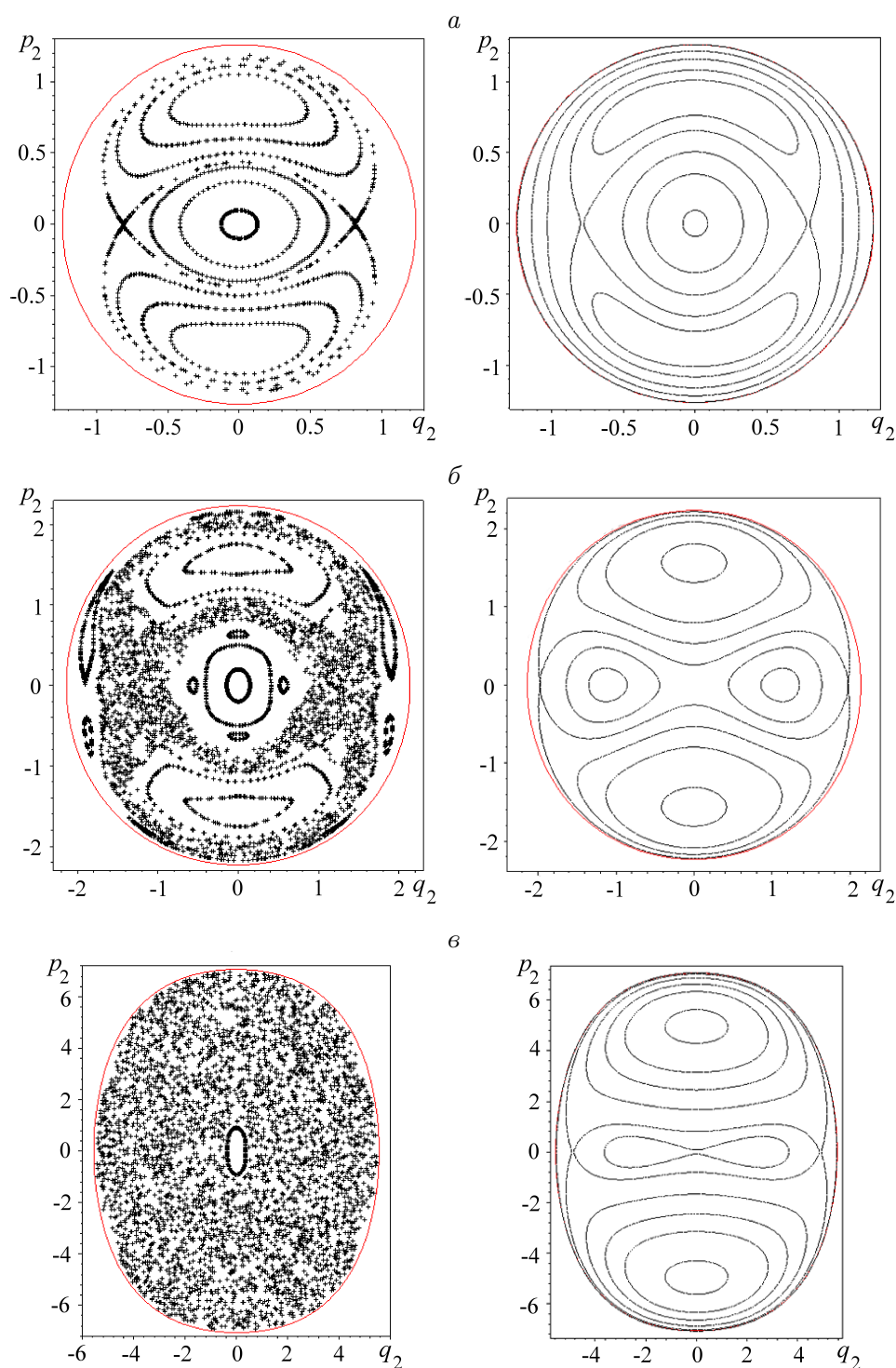


Рис. 1. Сечения Пуанкаре, полученные прямым численным решением уравнений движения (слева) и при помощи интеграла движения (справа); *a* — полная энергия  $E = 0.8$ , начальные данные:  $b = 0.5$ ,  $c = 0.01$ ,  $(p_1, p_2, q_1, q_2) = (0, 0.1, 0, 0)$ ,  $(0, 0.3, 0, 0)$ ,  $(0, 0.4, 0, 0)$ ,  $(0, 0.5, 0, 0)$ ,  $(0, 0.7, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, -0.812)$ , значение интеграла  $I = 0.01, 0.02, 0.03, 0.0396, 0.045$ ; *б* — полная энергия  $E = 2.5$ , начальные данные:  $b = 0.5$ ,  $c = 0.01$ ,  $(p_1, p_2, q_1, q_2) = (0, 0.2, 0, 0)$ ,  $(0, 0.5, 0, 0)$ ,  $(0, 0.6, 0, 0)$ ,  $(0, -0.45, 0, -1.85)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 1.2, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 0, -1.9)$ ,  $(0, 1.38, 0, 0)$ , значение интеграла  $I = -1.1, -0.5, -0.2, 0.0123, 0.16, 0.3, 0.4$ ; *в* — полная энергия  $E = 2.5$ , начальные данные:  $b = 0.5$ ,  $c = 0.01$   $(p_1, p_2, q_1, q_2) = (0, 0.6, 0, 0.3)$ ,  $(0, 0, 0, -4)$ ,  $(0, 3.6, 0, -4.5)$ ,  $(0, 1.6, 0, 0)$ ,  $(0, -2.6, 0, -4.9)$ ,  $(0, -3.4, 0, 2.55)$ ,  $(0, -2.1, 0, -3)$ , значение интеграла  $I = -2200, -1500, -1000, -500, -125, -6$

увеличения энергии в системе развивается динамический хаос, что приводит к разрушению приближённого интеграла движения. В этом случае формальный интеграл движения (3) не приводит к истинным сечениям Пуанкаре (рис. 1, б, в).

2. Система с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1, q_2), \quad (17)$$

где  $V(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + b \left( q_1^2 q_2 + \frac{1}{3} q_2^3 \right) + 4c q_1^2 q_2^2 + c (q_1^2 + q_2^2)^2$ , является интегрируемой. В самом деле, замена переменных  $x = q_1 - q_2$ ,  $y = q_1 + q_2$ , как легко проверить, приводит к разделению переменных. Поверхность потенциальной энергии  $V(q_1, q_2)$  при значениях параметров  $b = 1/4$ ,  $c = 1/288$  имеет пять локальных минимумов и четыре седловых точки, изолинии которой показаны на рис. 2. Были вычислены нормальные формы, в том числе и в переменных угол — действие до степени  $S_{MAX} = 8$ :

$$\begin{aligned} G(I_1, I_2, \phi_2) = & 2I_1 + \left( -\frac{5}{2}b^2 + 9c \right) I_1^2 + \left( \frac{5}{24}b^2 - \frac{3}{4}c \right) I_2^2 + \left( \frac{235}{144}b^4 + \frac{51}{4}c^2 - \frac{75}{4}cb^2 \right) I_2^2 I_1 + \\ & + \left( -\frac{1175}{108}b^4 + 125cb^2 - 85c^2 \right) I_1^3 + \left( \frac{1125}{128}c^3 + \frac{12925}{1536}cb^4 - \frac{38585}{82944}b^6 - \frac{8315}{256}c^2 b^2 \right) I_2^4 + \\ & + \left( \frac{192925}{10368}b^6 - \frac{5625}{16}c^3 + \frac{41575}{32}c^2 b^2 - \frac{64625}{192}cb^4 \right) I_2^2 I_1^2 + \\ & + \left( -\frac{291025}{48}c^2 b^2 + \frac{452375}{288}cb^4 + \frac{13125}{8}c^3 - \frac{1350475}{15552}b^6 \right) I_1^4 + \left( 3c - \frac{5}{6}b^2 \right) \cos(2\phi_2) I_1^2 + \\ & + \left( \frac{5}{24}b^2 - \frac{3}{4}c \right) \cos(2\phi_2) I_2^2 + \left( -51c^2 + 75cb^2 - \frac{235}{36}b^4 \right) \cos(2\phi_2) I_1^3 + \end{aligned}$$

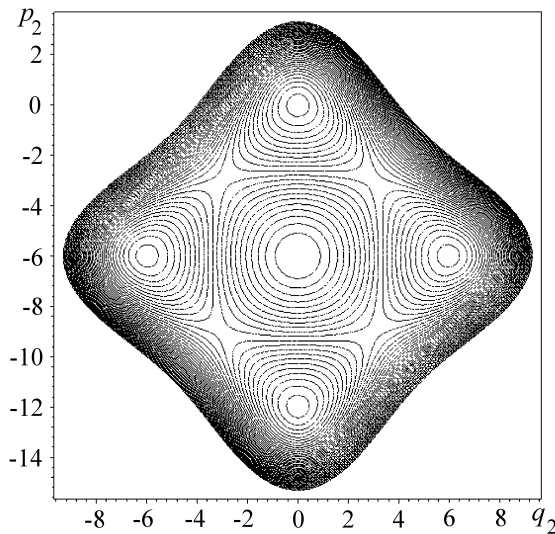


Рис. 2. Изолинии поверхности потенциальной энергии (17) при  $b = 1/4$ ,  $c = 1/288$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{235}{144}b^4 + \frac{51}{4}c^2 - \frac{75}{4}cb^2 \right) \cos(2\phi_2) I_2^2 I_1 + \\
& + \left( \frac{8315}{6}c^2 b^2 + \frac{38585}{1944}b^6 - \frac{12925}{36}cb^4 - 375c^3 \right) \cos(2\phi_2) I_2^2 I_1^2 + \\
& + \left( -\frac{375}{16}c^3 + \frac{8315}{96}c^2 b^2 - \frac{12925}{576}cb^4 + \frac{38585}{31104}b^6 \right) \cos(4\phi_2) I_2^2 I_1^2 + \\
& + \left( -\frac{58205}{12}c^2 b^2 + \frac{90475}{72}cb^4 - \frac{270095}{3888}b^6 + \frac{2625}{2}c^3 \right) \cos(2\phi_2) I_1^4 + \\
& + \left( -\frac{8315}{48}c^2 b^2 - \frac{38585}{15552}b^6 + \frac{12925}{288}cb^4 + \frac{375}{8}c^3 \right) \cos(4\phi_2) I_1^4 + \\
& + \left( \frac{12925}{1152}cb^4 - \frac{38585}{62208}b^6 - \frac{8315}{192}c^2 b^2 + \frac{375}{32}c^3 \right) \cos(2\phi_2) I_2^4 + \\
& + \left( -\frac{38585}{248832}b^6 + \frac{12925}{4608}cb^4 - \frac{8315}{768}c^2 b^2 + \frac{375}{128}c^3 \right) \cos(4\phi_2) I_2^4, \tag{18}
\end{aligned}$$

$$G_8 = G^{(2)} + G^{(3)} + G^{(4)} + G^{(5)} + G^{(6)} + G^{(7)} + G^{(8)}, \tag{19}$$

$$G^{(2)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \xi_1^2) + \frac{1}{2}(\eta_2^2 + \xi_2^2), \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
G^{(4)} = \left( \frac{3}{8}c - \frac{5}{48}b^2 \right) & \left( (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 + 4(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)^2 + \right. \\
& \left. + 2(\xi_1^2 + \xi_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2) \right), \tag{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{(6)} = \left( \frac{75}{96}b^2c - \frac{51}{96}c^2 - \frac{235}{3456}b^4 \right) & \left( (\xi_1^2 + \xi_2^2)^3 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)^3 + \right. \\
& \left. + 3(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2)(4(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)^2 + (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2)) \right), \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G^{(8)} = \left( -\frac{38585}{497664}b^6 - \frac{8315}{1536}c^2 b^2 + \frac{12925}{9216}cb^4 + \frac{375}{256}c^3 \right) & \left( (\xi_1^2 + \xi_2^2)^4 + (\eta_1^2 + \eta_2^2)^4 + \right. \\
& + 16(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)^4 + 2(\xi_1^2 + \xi_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2) \left( 3(\xi_1^2 + \xi_2^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2) + 2(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 + \right. \\
& \left. \left. + 2(\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 \right) + 24(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)^2(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2)^2 \right), \tag{23}
\end{aligned}$$

$$G^{(3)} = 0, \quad G^{(5)} = 0, \quad G^{(7)} = 0. \tag{24}$$

Ниже приведён интеграл движения до степени  $S_{MAX} = 6$  (интеграл до  $S_{MAX} = 8$  не приводится из-за громоздкости, хотя на его основе были проведены расчёты сечений Пуанкаре) (рис. 3):

$$\begin{aligned}
I = -\frac{35}{3456} (11b^4 - 108b^2c + 108c^2) & (p_2^6 + 15p_1^2 p_2^4 + 15p_1^4 p_2^2 + p_1^6 + 3q_2^2 p_2^4 + 18q_2^2 p_1^2 p_2^2 + 3q_2^2 p_1^4 + \\
& + 24q_1 q_2 p_1 p_2^3 + 24q_1 q_2 p_1^3 p_2 + 3q_1^2 p_2^4 + 18q_1^2 p_1^2 p_2^2 + 3q_1^2 p_1^4) - \frac{1}{1152} (2052c^2 + 385b^4 - 3300b^2c) + \\
& + (q_2^4 p_2^2 + q_2^4 p_1^2 + 8q_1 q_2^3 p_1 p_2 + 6q_1^2 q_2^2 p_2^2 + 6q_1^2 q_2^2 p_1^2 + 8q_1^3 q_2 p_1 p_2 + q_1^4 p_2^2 + q_1^4 p_1^2) -
\end{aligned}$$

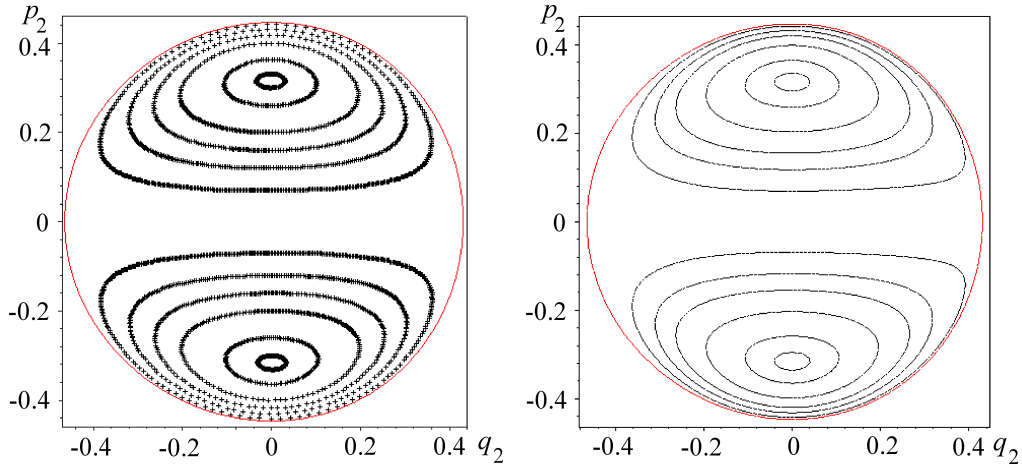


Рис. 3. Сечения Пуанкаре, полученные прямым численным решением уравнений движения (слева) и при помощи интеграла движения (справа). Полная энергия  $E = 0.1$ , начальные данные:  $b = 1/4$ ,  $c = 1/288$ ,  $(p_1, p_2, q_1, q_2) = (0, 0.07, 0, 0)$ ,  $(0, 0.12, 0, 0)$ ,  $(0, 0.16, 0, 0)$ ,  $(0, 0.2, 0, 0)$ ,  $(0, 0.26, 0, 0)$ ,  $(0, 0.3, 0, 0)$ , значение интеграла  $I = -0.00042, -0.0004, -0.00035, -0.0003, -0.000265, -0.00023$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3456} (-2916b^2c + 545b^4 - 1404c^2) (q_2^2 + q_1^2) (q_2^4 + 14q_1^2q_2^2 + q_1^4) - \frac{1}{144} (5b^2 - 18c) + \\
& + (3p_2^4 + 18p_1^2p_2^2 + 3p_1^4 + 6q_2^2p_2^2 + 6q_2^2p_1^2 + 3q_2^4 + 24q_1q_2p_1p_2 + 6q_1^2p_2^2 + 6q_1^2p_1^2 + 18q_1^2q_2^2 + \\
& + 3q_1^4 + 4bq_2^3p_2^2 + 4bq_2^3p_1^2 + 4bq_2^5 + 24bq_1q_2^2p_1p_2 + 12bq_1^2q_2p_2^2 + 12bq_1^2q_2p_1^2 + 40bq_1^2q_2^3 + \\
& + 8bq_1^3p_1p_2 + 20bq_1^4q_2). \tag{25}
\end{aligned}$$

При сложной топологии поверхности потенциальной энергии, например многих минимумов и седловых точек, согласие с точными сечениями Пуанкаре и вычислениями, полученными с помощью интеграла движения, сильно ухудшается. Это показывает, что в таких системах метод нормальных форм даёт удовлетворительное согласие с истинным движением систем только для относительно небольших энергий по сравнению со значением энергии в седловой точке.

### 3. Функция Гамильтона с сингулярностью в начале координат.

Метод нормальных форм Биркгофа — Густавсона вместе с вычислением приближённого интеграла движения можно применить к динамическим системам, которые содержат сингулярность в начале координат.

К примеру, рассмотрим так называемую плоскую ограниченную задачу трёх тел. В этой задаче движение трёх тел происходит таким образом, что массой одного из них и его влиянием на движение двух других пренебрегается, в то время как массивные тела взаимодействуют друг с другом и с этим телом. В подвижной системе координат, связанной с телом наибольшей массы, гамильтониан в безразмерных переменных имеет вид [17]

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + yp_x - xp_y - x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{26}$$



(здесь  $p_x, p_y$  и  $x, y$  — канонически сопряжённые импульсы и координаты), содержащий особенность в начале системы координат ( $x = 0, y = 0$ ), а величина  $H(x, y, p_x, p_y) = E$  есть интеграл движения.

Для устранения сингулярности произведём каноническое преобразование с помощью формул

$$\begin{aligned} x &= q_1^2 - q_2^2, & y &= 2q_1q_2, \\ p_x &= \frac{q_1p_1 - q_2p_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}, & p_y &= \frac{q_2p_1 - q_1p_2}{2(q_1^2 + q_2^2)}, \end{aligned} \quad (27)$$

а также вместо независимой переменной времени  $t$  введём новый независимый параметр  $\tau$  согласно формуле

$$dt = 4(q_1^2 + q_2^2) d\tau. \quad (28)$$

В результате получим соотношение

$$\begin{aligned} \tilde{H} - E &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - 2(q_2p_1 - q_1p_2)(q_1^2 + q_2^2) - \\ &- (q_1^2 - q_2^2)^2(q_1^2 + q_2^2) - 4E(q_1^2 + q_2^2) - 4 = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Таким образом, финитное, т. е. ограниченное, движение происходит в так называемых областях Хилла, где величина  $E$  отрицательна.

Рассматривая только ограниченное движение ( $E < 0$ ), введём новую положительную величину  $\omega = \sqrt{-8E}$ , а также новый гамильтониан  $\tilde{K}$  исходя из выражения (3):

$$\tilde{K} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) + 2(q_2p_1 - q_1p_2)(q_1^2 + q_2^2) + 4(q_1^2 - q_2^2)^2(q_1^2 + q_2^2). \quad (30)$$

При этом движение системы с новым гамильтонианом происходит с условием, что его значение равно постоянной величине  $\tilde{K} = 4$ . Произведя каноническую замену  $q_k \rightarrow q_k/\sqrt{\omega}$ ,  $p_k \rightarrow \omega \cdot p_k$  ( $k = 1, 2$ ), вводим гамильтониан

$$K = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + \frac{2}{\omega^2}(q_2p_1 - q_1p_2)(q_1^2 + q_2^2) + \frac{4}{\omega^4}(q_1^2 - q_2^2)^2(q_1^2 + q_2^2), \quad (31)$$

значение которого равно  $4/\omega$ .

Ниже представлены нормальная форма, в том числе и в переменных угол — действие, и интеграл движения до степени  $S_{MAX} = 6$ :

$$\begin{aligned} G(I_1, I_2, \phi_2) &= I_1 + \frac{4}{\omega^4}I_1^3 - \frac{11}{\omega^4}I_1I_2^2 + \frac{4}{\omega^2}\sqrt{(4I_1^2 - I_2^2)}I_1 \sin(\phi_2) + \\ &+ \frac{8}{\omega^4}(4I_1^2 - I_2^2)I_1 \cos(2\phi_2), \end{aligned} \quad (32)$$

$$G_6 = G^{(2)} + G^{(3)} + G^{(4)} + G^{(5)} + G^{(6)}, \quad (33)$$

$$G^{(2)} = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \xi_1^2) + \frac{1}{2}(\eta_2^2 + \xi_2^2), \quad (34)$$

$$G^{(4)} = \frac{1}{\omega^2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2)(\eta_1 \xi_2 - \eta_2 \xi_1), \quad (35)$$

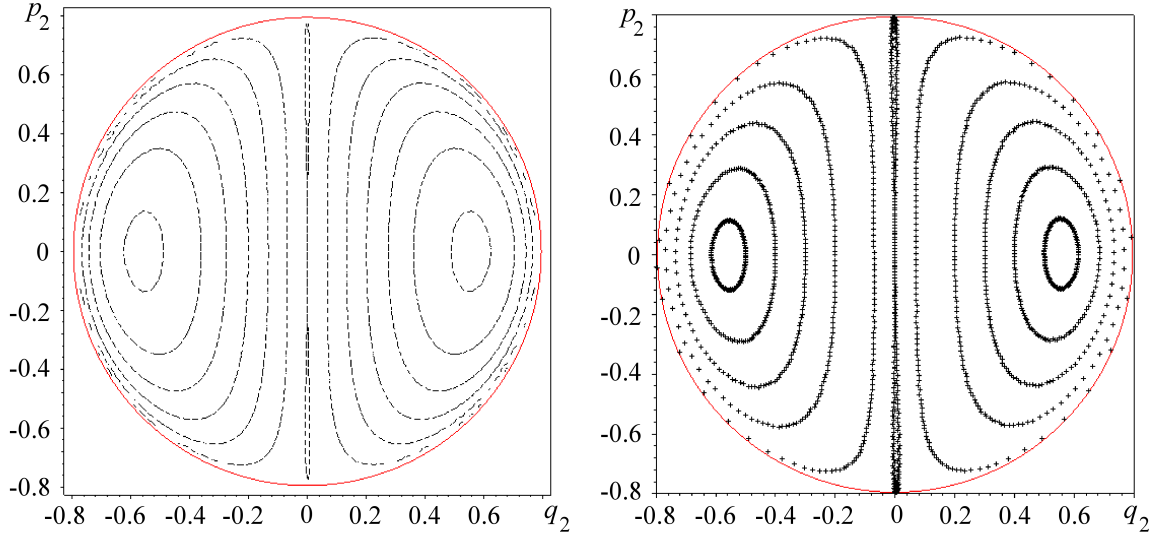


Рис. 4. Сечения Пуанкаре, полученные прямым численным решением уравнений движения (слева) и при помощи интеграла движения (справа). Полная энергия  $E = -20$ , начальные данные:  $(p_1, p_2, q_1, q_2) = (0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0.2), (0, 0, 0, 0.3), (0, 0, 0, 0.4), (0, 0, 0, 0.5), (0, 0.6, 0, 0.1)$ , значение интеграла  $I = -0.00001, 0.0002, 0.0004, 0.0006, 0.0008, 0.001, 0.0012$

$$G^{(6)} = \frac{-5}{4\omega^4} \left( (\xi_1^2 + \eta_1^2)^3 + (\xi_2^2 + \eta_2^2)^3 - 3(\eta_2^2 + \eta_1^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2) ((\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2)^2 - (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2) \right), \quad (36)$$

$$G^{(3)} = 0, \quad G^{(5)} = 0, \quad (37)$$

$$I = \frac{1}{\omega^2} (q_2^3 p_1 + p_2^2 p_1 q_2 + q_1^2 q_2 p_1 + p_1^3 q_2 - q_1^3 p_2 - p_2^3 q_1 - p_1^2 q_1 p_2 - q_2^2 q_1 p_2) + \frac{1}{4\omega^4} (48 p_2^3 p_1 q_2 q_1 + 7 q_1^4 p_2^2 + 7 q_2^4 p_1^2 + 16 q_2^3 q_1 p_2 p_1 - 9 p_1^4 q_2^2 + 15 q_1^4 q_2^2 + 15 p_2^4 p_1^2 - 9 p_2^4 q_1^2 + 15 p_1^4 p_2^2 + 48 p_1^3 q_2 q_1 p_2 + 16 q_1^3 q_2 p_2 p_1 - 15 p_2^4 q_2^2 + 6 p_2^2 p_1^2 q_2^2 + 22 q_2^2 q_1^2 p_2^2 + 6 p_2^2 p_1^2 q_1^2 + 22 q_2^2 q_1^2 p_1^2 - 5 p_1^6 - 5 q_1^6 - 5 p_2^6 - 5 q_2^6 + 15 q_1^2 q_2^4 - 15 q_2^4 p_2^2 - 15 p_1^4 q_1^2 - 15 q_1^4 p_1^2). \quad (38)$$

На рис. 4 приведены сечения Пуанкаре, полученные в обоих подходах.

## Заключение

Созданные программы в символьно-численном виде выполняют нормализацию и вычисления интегралов движения гамильтоновых систем, в общем, с произвольным числом степеней свободы с применением математического пакета MAPLE 8. В случае гамильтоновых систем с двумя степенями свободы разработанные программы позволяют строить сечения Пуанкаре. При этом структура сечений Пуанкаре хорошо согласуется с их непосредственным прямым численным расчётом только до энергий, при которых классическое движение является регулярным. Предложенные программы могут быть применены для приближённого решения уравнений движения Гамильтона и использованы при изучение нелинейных гамильтоновых систем.

## Список литературы

- [1] АРНОЛЬД В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
- [2] ПЕРЕЛОМОВ А.М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. 238 с.
- [3] ГОРИЭЛИ А. Интегрируемость и сингулярность. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”; Институт компьютерных исследований, 2006. 316 с.
- [4] ДЖАКАЛЯ Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.
- [5] БОГОЛЮБОВ Н.Н., МИТРОПОЛЬСКИЙ Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с..
- [6] НАЙФЭ А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
- [7] НАЙФЭ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
- [8] BASIOS V., СНЕКАНОВ N.A., МАРКОВСКИ B.L. ET AL. GITA: A REDUCE program for the normalization of polynomial Hamiltonians // Comp. Phys. Commun. 1995. Vol. 90. P. 355–368.
- [9] БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П. Методы вычислений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962. 640 с.
- [10] ФОРСАЙТ ДЖ., МАЛЬКОЛМ М., МОУЛЕР К. Машинные методы математических вычислений: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 277 с.
- [11] УИЛКИНСОН ДЖ., РАЙНШ К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976. 392 с.
- [12] ДЬЯКОНОВ В.П. Maple 8 в математике, физике и образовании. М.: СОЛОН-Пресс, 2003. 656 с.
- [13] HEARN A.C. REDUCE User’s Manual. Santa Monica, CA, USA, 2004. 215 p.
- [14] АКРИТАС А. Основы компьютерной алгебры с приложениями. М : Мир, 1994. 544 с.
- [15] GUSTAVSON F.G. On construction formal integral of a Hamiltonian system near an equilibrium point // Astronom. J. 1966. Vol. 71, No. 8. P. 670–686.
- [16] МОЗЕР Ю. Лекции о гамильтоновых системах: Пер. с англ. М : Мир, 1973. 169 с.
- [17] СЕБЕХЕЙ В. Теория орбит: Ограниченная задача трёх тел. М.: Наука, 1982. 656 с.

*Поступила в редакцию 13 февраля 2012 г.,  
с доработки — 25 июня 2012 г.*