

## Численное моделирование устойчивости локализованных возмущений в течении Пуазейля\*

А. В. ПРОСКУРИН, А. М. САГАЛАКОВ

*Алтайский государственный университет, Барнаул, Россия*

e-mail: k210@list.ru

Предложен численный метод исследования устойчивости течений по отношению к локализованным возмущениям. Метод основан на решении задачи на собственные значения для линейных уравнений в частных производных. Аппарат  $R$ -функций позволяет строить приближённые решения для областей почти произвольной геометрии, точно удовлетворяющие граничным условиям. Алгебраическая задача на собственные значения решалась итерационными методами.

*Ключевые слова:* гидродинамическая устойчивость, течение Пуазейля, уравнения с частными производными.

### Введение

Исследование устойчивости и бифуркаций течений представляет собой сложную проблему. Распространённые методы прямого численного моделирования течений дают результаты, близкие к экспериментальным. Такие вычисления сложны, а их результаты не всегда надёжны. Анализ устойчивости течений дополняет методы прямого численного моделирования и часто бывает полезен для изучения переходных процессов в течениях.

Классическая постановка задачи устойчивости течений вязкой жидкости приводит к задаче Орра — Зоммерфельда [1] — краевой для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это возможно благодаря наличию однородных направлений, относительно которых возмущение можно представить в виде элементарных волновых решений с определённым набором волновых чисел, например, для течения в плоском канале, в круглой трубе, между коаксиальными цилиндрами. С другой стороны, есть много течений, в которых картина развития возмущений вдоль или поперек потока неоднородна: течение в прямоугольной трубе, обтекание крыла и цилиндра и др. В таких случаях задача устойчивости сводится к краевой задаче для уравнений с частными производными.

Многолетние исследования показали [1, 2], что эффективное решение задач устойчивости течений вязкой жидкости возможно только численно. Для решения задач устойчивости, как правило, необходимо использовать численные методы высокого порядка точности. В одномерном случае можно также применять методы низкого порядка, достигая высокой точности за счёт измельчения расчётной сетки. В двумерном случае это уже затруднительно. Например, в работе [3] показаны преимущества метода конечных элементов высокого порядка по сравнению с обычным методом конечных элементов.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”, контракт 14.740.11.0355.

Решение краевой задачи для уравнений в частных производных существенно зависит от формы области и граничных условий, поэтому численный метод должен учитывать геометрическую информацию о задаче. В методе конечных элементов исследуемая область задается множеством меньших областей — конечных элементов. В работе [4] обсуждается принципиально иной подход. При помощи аппарата  $R$ -функций строится уравнение границ исследуемой области. Это уравнение используется для построения некоторой структуры (пучка функций), которая приближённо представляет решение краевой задачи с учётом граничных условий. Неизвестные параметры данной структуры можно найти стандартными численными методами: методом коллокаций, Бубнова — Галеркина, наименьших квадратов.

Рассмотрим бесконечно малое возмущение течения Пуазейля, локализованное по длине канала. Если амплитуда возмущения нарастает в фиксированной точке, неустойчивость течения называют абсолютной (см. [5]). Возможны случаи, когда возмущение нарастает, смещаясь вниз по потоку, а его амплитуда в неподвижной точке убывает. Такую неустойчивость называют конвективной. Кроме того, могут образовываться “турбулентные клубы” — локализованные в пространстве турбулентные структуры. В работе [6] при некоторых числах Рейнольдса в круглой трубе наблюдались перемежаемые течения, “в которых локализованные турбулентные структуры, окружённые практически ламинарными участками течения, сносятся вниз по потоку, сохраняя свои пространственные размеры”. В связи с вышеизложенным представляет интерес исследование устойчивости локализованных возмущений в течении Пуазейля, что и является целью настоящей работы.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим плоское течение Пуазейля: течение вязкой жидкости между бесконечными параллельными плоскостями. Под действием постоянного градиента давления жидкость движется с постоянной скоростью. Направим ось  $x$  вдоль направления движения жидкости, а ось  $y$  — перпендикулярно плоскостям (рис. 1).

Уравнение Навье — Стокса для функции тока имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \Delta^2 \psi, \quad (1)$$

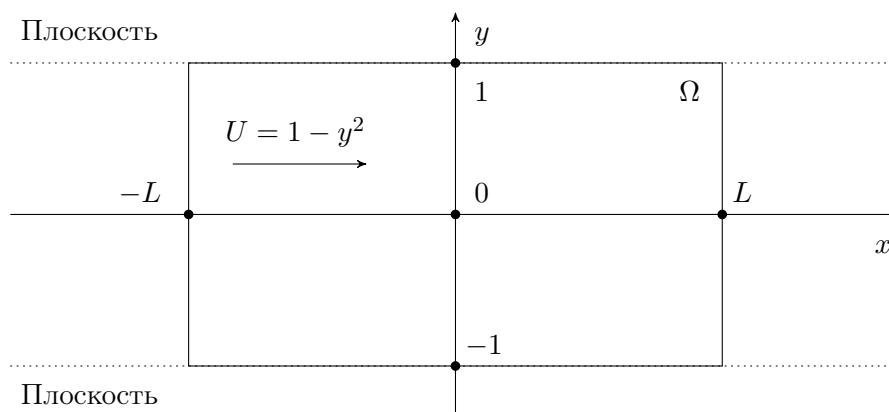


Рис. 1. Конфигурация потока

где  $\psi$  — функция тока,  $\text{Re} = V_0 d / \nu$  — число Рейнольдса,  $V_0$  — максимальная скорость течения,  $d$  — полуширина зазора между плоскостями,  $\nu$  — коэффициент вязкости.

В соответствии с методом линеаризации [7] решение (1) находим в виде

$$\psi = \psi_0 + \psi(x, y)e^{Ct}, \quad (2)$$

где  $\psi_0 = y - y^3/3$  — стационарное параболическое решение,  $\psi(x, y)e^{Ct}$  — малое возмущение (см. также [3, 8]),  $\psi(x, y)$  — амплитуда,  $C$  определяет декремент затухания возмущения. Подставляя (2) в (1), получим

$$C(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = \frac{1}{\text{Re}}(\psi_{xxxx} + 2\psi_{xxyy} + \psi_{yyyy}) - 2\psi_x - (1 - y^2)(\psi_{xxx} + \psi_{yyx}), \quad (3)$$

где нижние индексы означают производные.

Зададим условия на границе расчётной области  $\Omega$  (см. рис. 1). На неподвижных стенках возмущение скорости обращается в нуль, на входе в область  $\Omega$  возмущение задано равным нулю, на выходе из  $\Omega$ , следуя [9], примем нулевой градиент скорости вдоль оси  $x$ . В этом случае возмущение может покидать расчётную область с ненулевой амплитудой. В работах [3, 5, 8], наоборот, использовались нулевые граничные условия. Это позволило упростить вычисления. Возмущения в данном случае не могут покидать область расчётов и остаются локальными. В работе [5] сделан вывод о том, что расчётная область при использовании граничных условий второго типа должна быть длиннее. В настоящей работе использовались граничные условия

$$\psi = \psi_x = \psi_y = 0, \quad (4)$$

соответствующие обращению возмущений в нуль. Таким образом, рассматриваются возмущения, локализованные в пространстве. Считается общепринятым, что линейная теория описывает возмущения только на начальном очень коротком отрезке времени, за который возмущение не успевает покинуть расчётную область.

## 2. Численный метод

Решение (3), удовлетворяющее граничным условиям, будем искать в виде

$$\psi = \omega^2 \sum_{i,j} a_{ij} T_i(x) T_j(y), \quad (5)$$

где  $\omega(x, y)$  — функция, определяющая уравнение границы  $\omega = 0$ ,  $T(x)$ ,  $T(y)$  — многочлены Чебышёва первого рода,  $a_{ij}$  — неизвестные коэффициенты.

Определив множество точек коллокации в нулях полиномов Чебышёва

$$x_i = L \cos(\pi(2i - 1)/(n + 1)), \quad i = 1, \dots, n + 1,$$

$$y_j = \cos(\pi(2j - 1)/(k + 1)), \quad j = 1, \dots, k + 1,$$

получим задачу на собственные значения

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = C\mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{v} = \{a_{00}, a_{01}, \dots, a_{n(k-1)}, a_{nk}\}$ . Матрица  $\mathbf{A}$  будет содержать  $(nk)^2$  элементов. Полагая  $n = k = 60$  — типичному значению для решения задачи Орра — Зоммерфельда, можно

оценить размер матрицы при использовании чисел двойной точности:  $(64b) \cdot 60^4 \approx 99$  мегабайт. Добавление ещё одной пространственной координаты в разложении (5) равносильно умножению на  $n^2$ , при этом необходимый для матрицы объем памяти становится слишком большим для персональных компьютеров.

Чтобы написать уравнение границы прямоугольника  $\Omega$ , рассмотрим пересечение полус  $x_1 = 1 - y^2 \geq 0$ ,  $x_2 = L^2 - x^2 \geq 0$ . Тогда искомое уравнение даётся, например,  $R$ -конъюнкцией (см. [4])

$$x_1 \wedge_o x_2 \equiv (x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2})(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{m}{2}}, \quad (7)$$

где  $m$  — натуральное число. Основные вычисления были проведены при  $m = 0$ . Подстановкой  $x_1$  и  $x_2$  в (7) получим

$$\omega(x, y) = 1 - y^2 + L^2 - x^2 - \sqrt{(1 - y^2)^2 + (L^2 - x^2)^2}. \quad (8)$$

Производные от  $\omega$  находим при помощи системы компьютерной алгебры Maxima. Выбор функции  $\omega$  неоднозначен. Для проверки численного метода задачу (6) можно решать с использованием разных функций  $\omega$ . В нашем случае применялись уравнение (7) при  $m > 0$  и выражение

$$\omega(x, y) = (L^2 - x^2)(1 - y^2). \quad (9)$$

Первоначально задача на собственные значения (6) решалась с использованием  $QZ$ -алгоритма из библиотеки LAPACK, который успешно применялся нами в одномерном случае [10]. Однако вычислительные затраты этого метода оказались очень велики, а данный алгоритм применительно к нашей задаче иногда приводил к ошибочным результатам, поэтому для расчётов были использованы методы Крылова [11, 12], реализованные библиотеками ARPACK и SLEPC. Обобщённая задача на собственные значения (6) при помощи функций из библиотеки LAPACK сводилась к задаче  $\mathbf{AB}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{Cv}$ . Вычислялась часть спектра матрицы  $\mathbf{AB}^{-1}$  с наибольшей действительной частью. Численные эксперименты показали эффективность обратных итераций с нулевым действительным сдвигом.

### 3. Результаты вычислений

Рассмотрим течение с  $L = 1.0$  и  $n = k = 50$ . В табл. 1 приведены действительные части собственных значений  $C$  с наибольшей действительной частью при числах Рейнольдса от 10 до 1000, рассчитанные с помощью библиотеки LAPACK, SLEPC с использованием арифметики двойной точности и с помощью библиотеки Nektar++, которая реализует метод спектральных элементов. Расчётная сетка для Nektar++ была подобрана так, что погрешность приведённых в табл. 1 значений оценивалась величиной порядка  $10^{-4}$  при  $Re = 1000$ . Для  $Re = 10$  все три собственные значения совпадают, но с увеличением числа Рейнольдса число совпадающих цифр уменьшается. При этом собственные значения, вычисленные с помощью LAPACK и SLEPC, близки друг к другу и отклоняются от значений, вычисленных с помощью Nektar++. При  $Re = 700$  и  $Re = 1000$  LAPACK определяет собственные значения, резко выделяющиеся из ряда и, по-видимому, не имеющие отношения к спектру задачи.

В табл. 2 приведены собственные значения с наибольшей действительной частью в зависимости от количества точек коллокации  $n$  и  $k$ , рассчитанные при помощи SLEPc. С увеличением  $n$  и  $k$  соответствующие собственные значения должны образовывать последовательность, сходящуюся к точному собственному значению. На практике после достижения определённой точности на результат могут влиять другие ошибки, свойственные конкретной реализации алгоритма. Как следует из результатов, приведённых в табл. 2, при  $Re = 1000$  действительные части собственных чисел сходятся по крайней

Т а б л и ц а 1. Зависимость действительной части  $C$  собственных значений от числа Рейнольдса при  $n = 50$ ,  $k = 50$ ,  $L = 1.0$

Re	$C$	Библиотека	Re	$C$	Библиотека
10	-3.1786	LAPACK	400	-1.5169	LAPACK
	-3.1786	SLEPc		-1.5169	SLEPc
	-3.1786	Nektar++		-1.5156	Nektar++
50	-2.1144	LAPACK	500	-1.4495	LAPACK
	-2.1144	SLEPc		-1.4492	SLEPc
	-2.1144	Nektar++		-1.4429	Nektar++
100	-1.9808	LAPACK	600	-1.4048	LAPACK
	-1.9808	SLEPc		-1.4039	SLEPc
	-1.9806	Nektar++		-1.3850	Nektar++
200	-1.7517	LAPACK	700	-0.3952	LAPACK
	-1.7517	SLEPc		-1.3802	SLEPc
	-1.7515	Nektar++		-1.3372	Nektar++
300	-1.6121	LAPACK	1000	2.78053	LAPACK
	-1.6121	SLEPc		-1.2963	SLEPc
	-1.6120	Nektar++		-1.2306	Nektar++

Т а б л и ц а 2. Зависимость собственных значений с наибольшей действительной частью от  $n$  и  $k$  при  $Re = 1000$ ,  $Re = 5000$ ,  $L = 1.0$ . Строки {1}, {2} соответствуют вычислениям с помощью  $R$ -конъюнкции (7) при  $m = 1$  и (9)

$n$	$k$	Re = 1000		Re = 5000		
		Действительная часть $C$	Мнимая часть $C$	Действительная часть $C$	Мнимая часть $C$	
50	50	-1.293264539871856	1.087462148640639	1.942701048	1.559147236	
60	60	-1.255768395039908	0.8781136507171899	0.6587661583	2.010687635	
80	60	-1.230050190635487	0.8971942939279334	-0.4974945838	2.022046912	
100	60	-1.230568610422895	0.8984693511654026	-0.8625281770	0.8222072725	
100	70	-1.230568610049606	0.8984693516468647	-0.8625283592	0.8222064175	
120	60	-1.230610310568465	0.8984959713463586	-0.8264486429	0.5237272589	
140	60	-1.230611498906538	0.8984963168534776	-0.8244197295	0.5401157092	
160	60	-1.230611522477419	0.8984963191778784	-0.8263675375	0.5437300819	
180	60	-1.230611522273824	0.8984963207949902	-0.8272114112	0.5444320117	
220	60	-1.230611522084476	0.8984963194842599	-0.8275200538	0.5445807151	
220	70	-1.230611522758129	0.8984963207076385	-0.8275200601	0.5445807080	
400	60	-1.230611518844661	0.8984963165508606	-0.8275373812	0.5445849618	
{1}	220	60	-1.230613806678481	0.8985043165368143	-0.8275117537	0.5446018155
{2}	220	60	-1.230611536609566	0.8984964473559163	-0.8275529056	0.5445946517

мере до седьмого знака, а при  $Re = 5000$  — до четвёртого знака после запятой. Для контроля приведены также собственные числа, полученные вычислением с использованием  $R$ -конъюнкции (7) при  $m = 1$  и (9) (см. две последние строки в таблице).

Из постановки задачи следует, что собственные функции можно разделить на монотонные ( $Y = 0$ ) и периодические ( $Y \neq 0$ ). Собственные значения ( $C = X + iY$ ), соответствующие этим двум типам, при  $Re = 1000$ ,  $L = 1$  представлены на рис. 2. На рис. 3 показаны линии уровня действительной и мнимой части собственной функции, соответствующей собственному значению  $C$  с наибольшей действительной частью, при  $Re = 1000$ ,  $L = 1$ . В данном случае наблюдаются симметричные вихри. Аналогичный график приведён на рис. 4 при  $Re = 1000$ ,  $L = 4$  в виде трёхмерной поверхности. Это монотонно затухающий вихрь с осью вблизи оси канала.

На рис. 5 представлены зависимости наибольшей действительной части собственных значений от  $L$  для разных чисел Рейнольдса от  $10^3$  до  $5 \cdot 10^3$ . Видно, что для каждой

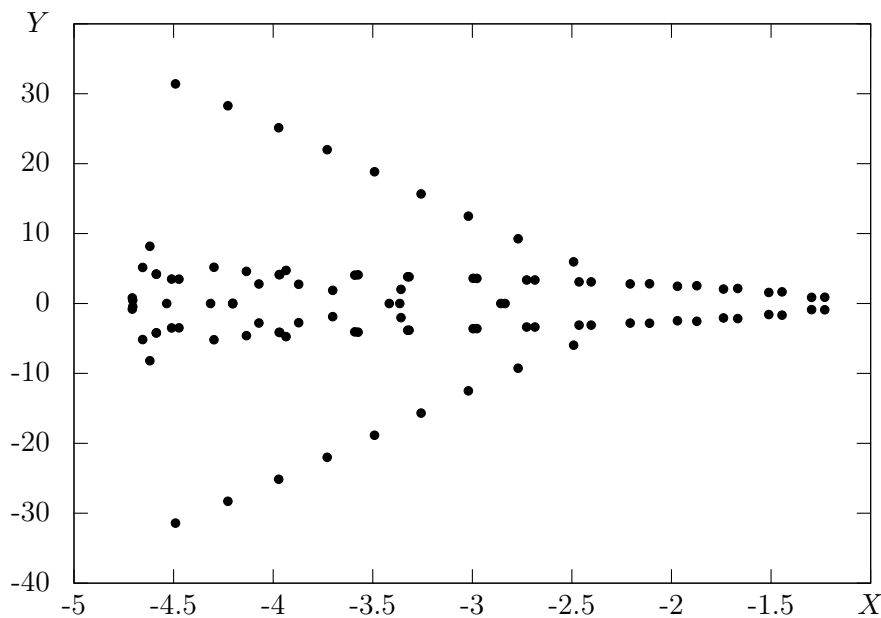


Рис. 2. Зависимость  $Y$  от  $X$  при  $Re = 1000$ ,  $L = 1$

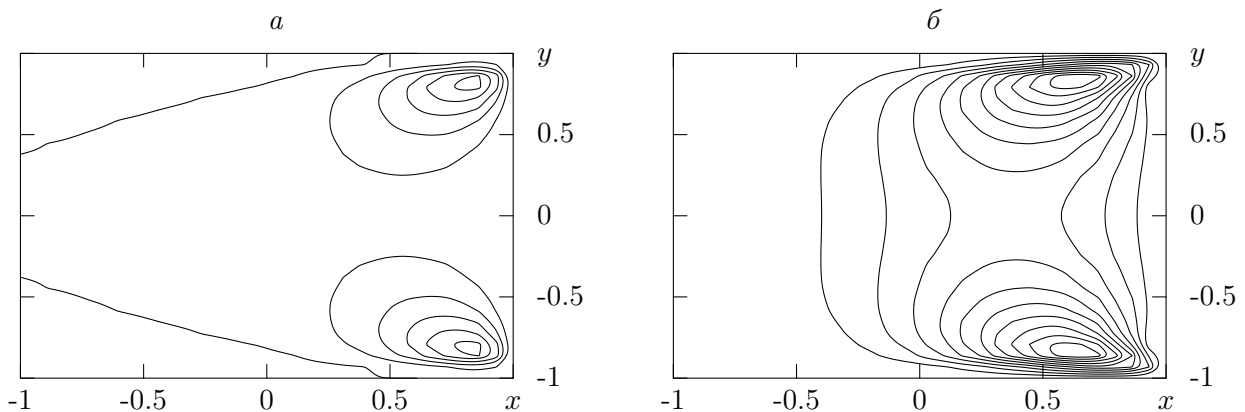


Рис. 3. Линии уровня действительной ( $a$ ) и мнимой ( $b$ ) части собственной функции при  $Re = 1000$ ,  $L = 1$ ; собственное значение  $C = (-1.230611522273843, 0.8984963207949633)$

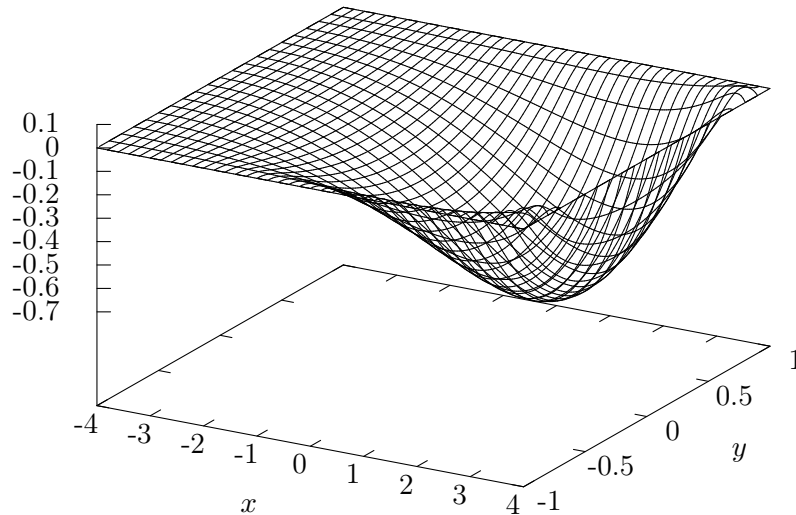


Рис. 4. Действительная часть собственной функции при  $Re = 1000$ ,  $L = 4$ ; собственное значение  $C = (-0.1786773045527003, 0)$

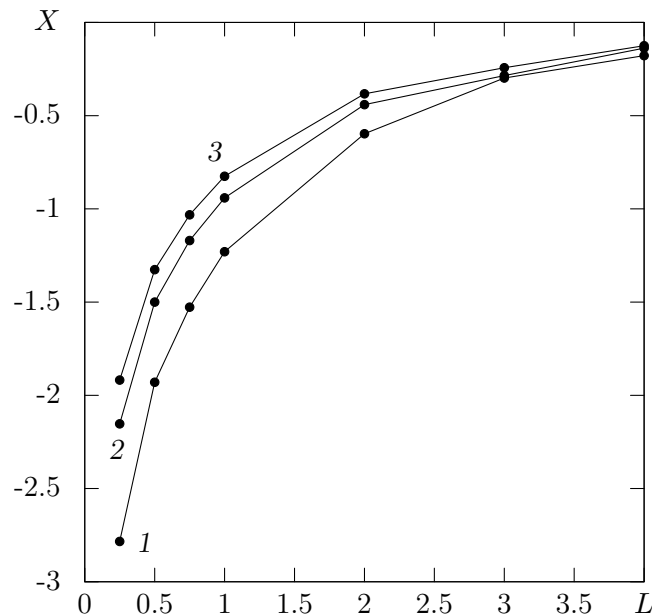


Рис. 5. Зависимости наибольшей действительной части собственных значений от  $L$  при  $Re = 10^3$  (1),  $Re = 3 \cdot 10^3$  (2),  $Re = 5 \cdot 10^3$  (3)

ветви величина  $X$  возрастает с увеличением  $L$ . В свою очередь сами ветви расположены в определённом порядке: при увеличении числа Рейнольдса значения  $X$  возрастают.

## Заключение

Результаты проведенных расчётов позволяют заключить, что локализованные возмущения устойчивы в рассмотренных диапазонах параметров  $Re$  и  $L$ .

Одна из задач данной работы — разработка численного метода для решения задачи гидродинамической устойчивости (3). Как уже отмечалось, эта задача содержит

малый параметр  $1/\text{Re}$ , что значительно усложняет её решение и требует высокого качества приближённого представления решений. Предложенный численный метод алгоритмически проще многих других методов и учитывает гладкость решения. При  $L = 4$ ,  $\text{Re} = 5000$ ,  $n = 280$ ,  $k = 60$  вычисления на процессоре Phenom 2.2 ГГц занимают около 40 мин и примерно 7 Гб оперативной памяти. Продемонстрирована работоспособность метода вплоть до  $\text{Re} = 5000$ . Для сравнения — в одномерном случае аналогичный метод позволяет работать при  $\text{Re} \simeq 10^7$  [10].

В качестве примера рассмотрена область предельно простой геометрии — прямоугольник, однако алгоритм позволяет исследовать области более сложной геометрии. При этом граничные условия удовлетворяются точно. Ограничения могут быть связаны с громоздким видом граничной функции  $\omega$ , производных от неё и с соответствующим ухудшением свойств пучка (5).

Авторы благодарят чл.-корр. РАН В.В. Пухначёва за полезные замечания.

## Список литературы

- [1] HENNINGSON D.S., SCHMID P.J. Stability and Transition in Shear Flows. New-York: Springer-Verlag, 2001.
- [2] ГОЛЬДШТИК М.А., ШТЕРН В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 368 с.
- [3] GONZALEZ L., THEOFILIS V., SHERWIN S.J. High-order methods for the numerical solution of the BiGlobal linear stability eigenvalue problem in complex geometries // Intern. J. for Numerical Methods in Fluids. 2011. Vol. 65, iss. 8. P. 923–952.
- [4] КРАВЧЕНКО В.Ф., РВАЧЕВ В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006. 416 с.
- [5] BLACKBURN H.M., BARKLEY D., SHERWIN S.D. Convective instability and transient growth in flow over a backward-facing step // J. Fluid Mech. 2008. Vol. 603. P. 271–304.
- [6] ПРИЙМАК В.Г. Волны и пространственно локализованные структуры в турбулентных течениях вязкой жидкости. Результаты расчётов // Матем. моделирование. 2010. Т. 22, № 2. С. 3–28.
- [7] ЮДОВИЧ В.И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Ростовский гос. ун-т, 1984.
- [8] THEOFILIS V. Advances in global linear instability analysis of non-parallel and three-dimensional flows // Progress in Aerospace Sci. 2003. No. 39. P. 249–315.
- [9] BARKLEY D. Confined Three-Dimensional Stability Analysis of the Cylinder Wake. 2004. (<http://arXiv.org/abs/physics/0405153v2>).
- [10] PROSKURIN A.V., SAGALAKOV A.M. Stability of the Poiseuille flow in a longitudinal magnetic field // Techn. Phys. 2012. Vol. 57, iss. 5. P. 608–614.
- [11] SAAD J. Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems. Manchester Univ. Press, 1992. 346 p.
- [12] HERNÁNDEZ V., ROMÁN J.E., TOMÁS A., VIDÁL V. Krylov-Schur Methods in SLEPC. SLEPC Technical Report STR-7. Available at: [www.grycap.upv.es/slepc/documentation/reports/str7.pdf](http://www.grycap.upv.es/slepc/documentation/reports/str7.pdf). 2007. 13 p.

*Поступила в редакцию 5 марта 2012 г.,  
с доработки — 26 февраля 2013 г.*