Базовая нелинейно-дисперсионная модель гидродинамики длинных поверхностных волн*

З. И. Федотова[1], Г. С. Хакимзянов[1]

Из уравнений Эйлера невязкой несжимаемой жидкости без предположения о потенциальности течения выведена универсальная нелинейно-дисперсионная модель гидродинамики длинных поверхностных волн, содержащая в качестве параметра вектор-функцию, соответствующий выбор которой позволяет получить все наиболее известные модели длинноволнового приближения. В связи с этим построенную модель можно рассматривать как базовую. Её достоинством является то, что она допускает запись в квазиконсервативной форме, принимающей дивергентный вид в случае ровной донной поверхности.

Ключевые слова: длинные поверхностные волны, нелинейно-дисперсионные уравнения, базовая модель.

Введение

История активного развития нелинейно-дисперсионных (НЛД) уравнений гидродинамики длинных поверхностных волн, используемых в численном моделировании, составляет около 50 лет (хотя первые модельные уравнения при упрощающих предположениях появились значительно раньше). В течение этого времени начиная с пионерных работ [1, 2] были опубликованы сотни работ, посвящённых различным аспектам изучения НЛД-моделей (построению, исследованию, применению, модификациям).

Развитие НЛД-моделей имеет два направления: первое из них связано с расширением практических приложений, в первую очередь это усложнение геометрии и учёт новых физических факторов, второе — со стремлением повысить степень адекватности и формальную точность аппроксимации трёхмерных уравнений Эйлера.

Для упорядочения и оптимизации такой работы логичным представляется описать характеристики моделей, расположив их по приоритету (шкала предпочтительности может приводить к разветвлениям), и объединить модели в группы по свойствам. Хорошее решение проблемы — применение универсального подхода к выводу моделей и разработка единообразной формы записи, что приобретает особую ценность, если это приводит к математически строгому результату. Такой подход обеспечивает иерархию моделей мелкой воды, т. е. преемственность физически содержательных свойств и вида определяющих уравнений по мере упрощения или усложнения моделей, с расположением на полюсах этой иерархии простейшей модели волнового уравнения и модели трёхмерных уравнений Эйлера на вращающемся притягивающем сфероиде.

В настоящем исследовании мы ограничимся изучением НЛД-моделей на плоскости, сосредоточившись на разработке универсального подхода к их выводу, обеспечивающему компактную по виду и содержательную по смыслу формулировку определяющих

[1] *Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, Россия*
Контактный e-mail: khak@ict.nsc.ru

*Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-17-00219).

дифференциальных уравнений. Перспектива реализации более общего случая опирается на работы [3 – 5].

Наиболее популярные в настоящее время НЛД-модели, полученные на основе метода возмущений, можно разделить на две большие группы, представители которых описаны в [2]. Первая из них характеризуется тем, что в качестве скорости модели рассматривается усреднённый по толщине жидкого слоя вектор горизонтальной скорости уравнений Эйлера (см., например, [6 – 9] и др.). Применение НЛД-уравнений для решения задач с практическим приложением началось именно с этих моделей. В другой группе искомая скорость представляет собой скорость течения жидкости на некоторой поверхности $z = z(x, y)$, либо погружённой в жидкость, либо совпадающей с границами течения (свободная или донная поверхность).

Как правило, НЛД-модели первой группы обладают набором базовых физически содержательных свойств и компактны по форме [3,4,10]. Начиная с работ [11 – 13] были получены новые НЛД-модели с расширенным диапазоном применимости за счёт лучшей аппроксимации дисперсионных характеристик уравнений. Наибольшее развитие и практическое применение получили слабонелинейные уравнения Нвогу [13], в которых скорость НЛД-модели рассматривалась в точках поверхности $z = -0.531h$, где h — глубина акватории при невозмущённом состоянии жидкости. Впоследствии рассматривались и другие варианты поверхности z (например, в [14, 15] она является нестационарной).

Позже модель Нвогу была распространена на случай произвольной амплитуды [16 – 20], а в работе [15] дополнительно учтена подвижность дна. К недостаткам известных НЛД-моделей этой группы следует отнести используемую форму их записи. Она необычайно громоздка, а связи с исходными 3D-уравнениями Эйлера завуалированы (см. ниже пример НЛД-модели из Приложения А). Тем не менее эти НЛД-модели являются актуальными и продолжают совершенствоваться. В рамках НЛД-моделей из [17, 20] разработан программный комплекс для численного исследования волновых режимов в реальных акваториях [21].

В настоящей работе показано, что НЛД-модели обеих указанных групп можно получить на основе единого подхода. Из уравнений Эйлера невязкой несжимаемой жидкости без предположения о потенциальности течения выведена универсальная НЛД-модель длинноволновой гидродинамики, содержащая вектор-функцию $\mathbf{J}(x, y, t)$, связанную с параметрами течения. Выбирая эту функцию соответствующим образом, можно получить все наиболее известные модели длинноволнового приближения, в том числе предложенные в цитированной выше литературе. Более того, в рамках данного подхода удалось рассмотреть НЛД-модели, основанные на выборе скорости, отличном от указанных способом.

В связи с этим построенную в рамках представленных исследований НЛД-модель можно рассматривать как базовую. Её достоинство состоит в том, что она может быть записана в квазиконсервативной форме, переходящей для ровного дна в консервативную форму. Кроме того, запись определяющей системы нелинейно-дисперсионных уравнений является компактной и физически содержательной. Исходя из представления базовой модели, определяющим НЛД-уравнениям второй группы удалось придать компактный вид, аналогичный разработанному для НЛД-уравнений первой группы [3, 22].

Полученные результаты способствуют построению современных конечно-разностных и конечно-объёмных методов для решения системы НЛД-уравнений.

1. Уравнения базовой НЛД-модели

Введём основные обозначения и сформулируем задачу. Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости в слое, ограниченном снизу подвижным дном, заданным функцией $z = -h(x, y, t)$, а сверху — свободной границей, описываемой функцией $z = \eta(x, y, t)$, где t — время, x, y, z — координаты точки в декартовой системе координат $Oxyz$, ось Oz которой направлена вертикально вверх, а координатная плоскость Oxy совпадает с невозмущённой свободной поверхностью. Считаем, что ускорение свободного падения g и плотность жидкости ρ постоянны во всем слое. Кроме того, для упрощения выкладок не будем рассматривать другие внешние силы, обусловленные, например, трением.

В трёхмерной постановке задачи требуется найти вектор скорости $\mathbf{U} = (u, v, w)$, давление p и функцию η, которые удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + w_z = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + w\mathbf{u}_z + \nabla p = 0, \tag{2}$$

$$w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w + ww_z + p_z = -g \tag{3}$$

и краевым условиям на свободной границе и дне

$$(\eta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla\eta - w)\big|_{z=\eta} = 0, \quad p\big|_{z=\eta} = 0, \quad (h_t + \mathbf{u} \cdot \nabla h + w)\big|_{z=-h} = 0, \tag{4}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$, $\mathbf{u} = (u, v)$ — вектор горизонтальной составляющей скорости, w — вертикальная составляющая скорости, $\nabla \cdot \mathbf{u} = u_x + v_y$. В уравнениях (1)–(3), а также во всех последующих формулах, в том числе в уравнениях обезразмеривания, символ плотности воды ρ опущен (т. е. $\rho \equiv 1$).

Для изучения длинноволновых приближений введём характерные масштабы и перейдём к безразмерным переменным. Если L — характерный размер по горизонтали, h_0, a_0 — характерные глубина и амплитуда волны, то безразмерные переменные можно определить следующим образом:

$$\overline{x} = \frac{x}{L}, \quad \overline{y} = \frac{y}{L}, \quad \overline{z} = \frac{z}{h_0}, \quad \overline{t} = \frac{t\sqrt{gh_0}}{L}, \quad \overline{h} = \frac{h}{h_0}, \quad \overline{\eta} = \frac{\eta}{a_0}, \quad \overline{p} = \frac{p}{gh_0}, \tag{5}$$

$$\overline{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{gh_0}}, \quad \overline{w} = \frac{Lw}{h_0\sqrt{gh_0}}. \tag{6}$$

Из формул (5), (6) следуют соотношения для обезразмеривания компонент вектора вихря $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot}\mathbf{U} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$$\overline{\omega}_1 = \frac{h_0}{\sqrt{gh_0}}\omega_1, \quad \overline{\omega}_2 = \frac{h_0}{\sqrt{gh_0}}\omega_2, \quad \overline{\omega}_3 = \frac{L}{\sqrt{gh_0}}\omega_3.$$

В новых переменных задача (1)–(4) примет вид (для упрощения обозначений черту над безразмерными переменными здесь и далее опускаем)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + w_z = 0, \tag{7}$$

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + w\mathbf{u}_z + \nabla p = 0, \tag{8}$$

$$\mu^2\left(w_t+\mathbf{u}\cdot\nabla w+ww_z\right)+p_z+1=0, \tag{9}$$

$$\left(\alpha\eta_t+\alpha\mathbf{u}\cdot\nabla\eta-w\right)\Big|_{z=\alpha\eta}=0, \tag{10}$$

$$p\Big|_{z=\alpha\eta}=0, \tag{11}$$

$$\left(h_t+\mathbf{u}\cdot\nabla h+w\right)\Big|_{z=-h}=0, \tag{12}$$

где $\alpha=a_0/h_0$ — параметр нелинейности, $\mu=h_0/L$ — параметр дисперсии. Компоненты вектора вихря в безразмерных переменных определяются по формулам

$$\omega_1=\mu^2 w_y-v_z,\quad \omega_2=-\mu^2 w_x+u_z,\quad \omega_3=v_x-u_y. \tag{13}$$

Далее, пока не будет сказано иное, используются только безразмерные переменные.

В НЛД-модели искомыми величинами являются полная глубина $H=h+\alpha\eta$ и некоторая приближающая горизонтальную скорость $\mathbf{u}$ вектор-функция $\mathbf{u}_\sigma(x,y,t)$, которую будем называть скоростью приближённой модели. Во многих работах [6–8, 9, 14, 15] принимается, что $\mathbf{u}_\sigma$ — горизонтальная скорость течения 3D-модели на некоторой поверхности $z=z_\sigma(x,y,t)$, т. е.

$$\mathbf{u}_\sigma(x,y,t)=\mathbf{u}(x,y,z_\sigma(x,y,t),t). \tag{14}$$

Другой распространённый подход к выбору скорости модели в виде усреднённой по глубине горизонтальной составляющей скорости $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}_\sigma=\frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\mathbf{u}\,dz \tag{15}$$

после формального применения теоремы о среднем на отрезке $[-h,\alpha\eta]$ также приводит к формуле (14). Способы задания (14) и (15) различаются тем, что в первом из них поверхность $z=z_\sigma(x,y,t)$ задаётся изначально, а во втором её явное описание в общем случае отсутствует.

Далее будем рассматривать длинноволновые приближения уравнений Эйлера и считать, что $\mathbf{u}_\sigma$ приближает скорость $\mathbf{u}$ 3D-модели с точностью до членов порядка $O(\mu^2)$:

$$\mathbf{u}(x,y,z,t)=\mathbf{u}_\sigma(x,y,t)+\mu^2\mathbf{u}_1(x,y,z,t). \tag{16}$$

Интегрируя по полной глубине жидкости уравнение неразрывности (7) с учётом граничных условий (10), (12), получим уравнение неразрывности приближённой модели

$$H_t+\nabla\cdot(H\mathbf{u}_\sigma)=-\mu^2\nabla\cdot(H\mathbf{J}), \tag{17}$$

где

$$\mathbf{J}=\frac{1}{H}\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\mathbf{u}_1 dz. \tag{18}$$

Если скорость приближённой модели выбирается в виде (15), то $\mathbf{J}\equiv 0$, поэтому уравнение неразрывности (17) примет вид

$$H_t+\nabla\cdot(H\mathbf{u}_\sigma)=0. \tag{19}$$

Интегрируя то же уравнение (7) по z в пределах от $-h$ до z с учётом граничного условия на дне (12), получим выражение для вертикальной компоненты скорости трёхмерного течения

$$w(z) = -Dh - (z+h)\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma + O(\mu^2), \tag{20}$$

где $D = \partial/\partial t + \mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla$.

Для вывода формулы, выражающей давление в 3D-модели через переменные НЛД-модели, т. е. через полную глубину H и скорость $\mathbf{u}_\sigma$, проинтегрируем уравнение (9) по вертикальной координате в пределах от z до $\alpha\eta$ с учётом условия (11) и, привлекая формулу (16), запишем результат в виде соотношения

$$p(z) = \mu^2\int\limits_z^{\alpha\eta}\Big(Dw + ww_\zeta + O(\mu^2)\Big)d\zeta - z + \alpha\eta. \tag{21}$$

Преобразуем подынтегральное выражение, применяя формулу (20) для w:

$$Dw + ww_z = -D^2h - (z+h)D\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma\right) + (z+h)\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma\right)^2 + O(\mu^2) =$$

$$= -R_2 - (z+h)R_1 + O(\mu^2).$$

Здесь

$$R_1 = D\left(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma\right) - \left(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma\right)^2, \quad R_2 = D^2h. \tag{22}$$

Подставляя полученное выражение в соотношение (21), получим формулу распределения давления по координате z:

$$p = H - (z+h) - \mu^2\left[\Big(H-(z+h)\Big)R_2 + \left(\frac{H^2}{2} - \frac{(z+h)^2}{2}\right)R_1\right] + O(\mu^4). \tag{23}$$

Отметим, что эта формула не зависит от вида выражения для $\mathbf{u}_1$ в представлении (16).

Для вывода уравнения движения НЛД-модели проинтегрируем уравнение (8) по переменной z:

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\left(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + w\mathbf{u}_z\right)dz + \nabla\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}p\,dz - p\big|_{z=-h}\nabla h = 0. \tag{24}$$

Исключим члены, содержащие давление, применив формулу (23):

$$\nabla\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}p\,dz - p\big|_{z=-h}\nabla h =$$

$$= \alpha H\nabla\eta - \mu^2\left[\nabla\Big(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\Big) - H\nabla h\Big(\frac{H}{2}R_1 + R_2\Big)\right] + O(\mu^4).$$

Далее используя формулы (16), (20), найдём слагаемое с вертикальной компонентой скорости:

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}w\mathbf{u}_z dz = -\mu^2\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\left[Dh + (z+h)\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma\right](\mathbf{u}_1)_z dz + O(\mu^4) =$$

$$= -\mu^2\, Dh\,\mathbf{u}_1\Big|_{z=-h}^{z=\alpha\eta} - \mu^2(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(z+h)(\mathbf{u}_1)_z dz + O(\mu^4).$$

Интеграл в правой части вычислим интегрированием по частям

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(z+h)(\mathbf{u}_1)_z dz = H\mathbf{u}_1\big|_{z=\alpha\eta} - H\mathbf{J}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} w\mathbf{u}_z dz = \mu^2 Dh\,\mathbf{u}_1\big|_{z=-h} - \mu^2\Big(Dh + H(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big)\mathbf{u}_1\big|_{z=\alpha\eta} + \mu^2(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)H\mathbf{J} + O(\mu^4). \quad (25)$$

Преобразуем группу членов из уравнения (24), содержащую горизонтальные компоненты скорости:

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u})\,dz = \int\limits_{-h}^{\alpha\eta} D\mathbf{u}_\sigma dz + \mu^2\int\limits_{-h}^{\alpha\eta} D\mathbf{u}_1 dz + \mu^2\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(\mathbf{u}_1\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma dz + O(\mu^4) =$$

$$= HD\mathbf{u}_\sigma + \mu^2\Big[D(H\mathbf{J}) - D(\alpha\eta)\mathbf{u}_1\big|_{z=\alpha\eta} - Dh\,\mathbf{u}_1\big|_{z=-h} + H\,(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma\Big] + O(\mu^4).$$

Эти формулы вместе с (25) позволяют получить соотношение

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + w\mathbf{u}_z)\,dz = HD\mathbf{u}_\sigma - \mu^2\Big[DH + H(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big]\mathbf{u}_1\big|_{z=\alpha\eta} +$$

$$+\mu^2\Big[D(H\mathbf{J}) + H\,(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)H\mathbf{J}\Big] + O(\mu^4),$$

в правой части которого выражение в первой квадратной скобке, имеющее в силу уравнения неразрывности (17) порядок $O(\mu^2)$, может быть записано в эквивалентной форме

$$DH + H\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma = -\mu^2\nabla\cdot(H\mathbf{J}). \quad (26)$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + w\mathbf{u}_z)\,dz = HD\mathbf{u}_\sigma + \mu^2\Big[D(H\mathbf{J}) + H\,(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)H\mathbf{J}\Big] + O(\mu^4).$$

Возвращаясь к уравнению (24) и делая соответствующие подстановки согласно выполненным преобразованиям, а также отбрасывая члены порядка $O(\mu^4)$, получим уравнение движения НЛД-модели

$$D\,\mathbf{u}_\sigma + \alpha\nabla\eta = -\frac{\mu^2}{H}\Big[D(H\mathbf{J}) + H\,(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)H\mathbf{J}\Big] +$$

$$+\frac{\mu^2}{H}\left[\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1+\frac{H^2}{2}R_2\right)-H\nabla h\left(\frac{H}{2}R_1+R_2\right)\right]. \tag{27}$$

Далее придадим уравнению (27) более содержательную форму. Перепишем формулу (23) в виде

$$p=\tilde{p}+O(\mu^4)$$

и по аналогии с работой [4] введём проинтегрированное по глубине жидкости давление $\tilde{p}$ НЛД-модели:

$$P=\int\limits_{-h}^{\alpha\eta}\tilde{p}\,dz=\frac{H^2}{2}-\mu^2\left(\frac{H^3}{3}R_1+\frac{H^2}{2}R_2\right),$$

а через p_0 обозначим давление на дне:

$$p_0=\widetilde{p}\Big|_{z=-h}=H-\mu^2\left(\frac{H^2}{2}R_1+HR_2\right).$$

Тогда система НЛД-уравнений может быть записана в следующем виде:

$$H_t+\nabla\cdot\Big[H\left(\mathbf{u}_\sigma+\mu^2\mathbf{J}\right)\Big]=0, \tag{28}$$

$$(\mathbf{u}_\sigma)_t+(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma+\frac{\nabla P}{H}=\frac{p_0\nabla h}{H}-$$

$$-\frac{\mu^2}{H}\Big[(H\mathbf{J})_t+(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)(H\mathbf{J})+H\left(\mathbf{J}\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_\sigma+(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)H\mathbf{J}\Big]. \tag{29}$$

В этой системе зависимыми переменными являются полная глубина H и скорость приближённой модели $\mathbf{u}_\sigma$. Для замыкания системы необходимо задать связь с этими переменными величины $\mathbf{J}$, связанной с отклонением $\mathbf{u}_\sigma$ от горизонтальной составляющей $\mathbf{u}$ скорости трёхмерного течения (16). Как уже отмечалось, при выборе в качестве скорости приближённой модели усреднённой по толщине слоя составляющей $\mathbf{u}$, т. е. при использовании формулы (15), величина $\mathbf{J}$ обращается в нуль, поэтому уравнение движения (29) существенно упрощается и принимает вид

$$(\mathbf{u}_\sigma)_t+(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma+\frac{\nabla P}{H}=\frac{p_0\nabla h}{H}. \tag{30}$$

В следующем разделе будут приведены другие условия вывода НЛД-уравнений, при использовании которых для замыкания базовой модели (28), (29) получаются известные НЛД-модели второго гидродинамического приближения.

Отметим также, что уравнения (28), (29) допускают дивергентную форму записи с источниковым членом в правой части уравнения движения, обусловленным неровностью поверхности дна:

$$H_t+\nabla\cdot(H\mathbf{U}_\sigma)=0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial H\mathbf{U}_\sigma}{\partial t}+\frac{\partial Hu_\sigma\mathbf{U}_\sigma}{\partial x}+\frac{\partial Hv_\sigma\mathbf{U}_\sigma}{\partial y}+\nabla P+\mu^2\left[\frac{\partial HJ_u\mathbf{u}_\sigma}{\partial x}+\frac{\partial HJ_v\mathbf{u}_\sigma}{\partial y}\right]=p_0\nabla h. \tag{32}$$

где

$$\mathbf{U}_\sigma=\mathbf{u}_\sigma+\mu^2\mathbf{J},\quad \mathbf{u}_\sigma=\begin{pmatrix}u_\sigma\\ v_\sigma\end{pmatrix},\quad \mathbf{J}=\begin{pmatrix}J_u\\ J_v\end{pmatrix}. \tag{33}$$

2. Известные модели как частные случаи базовой НЛД-модели

При выводе уравнений Грина — Нагди [23,24] предполагается, что $\mathbf{u}_1 \equiv 0$. В этом случае

$$\mathbf{J} \equiv 0 \tag{34}$$

и уравнения (28), (29) базовой НЛД-модели принимают вид (19), (30). Последние уравнения, как показано в [10], эквивалентны уравнениям Грина — Нагди [24].

Если скорость приближённой модели задается формулой (15), то снова $\mathbf{J} \equiv 0$ и уравнения базовой модели вновь переходят в (19), (30). Точно такая система НЛД-уравнений с учётом подвижности дна и без предположения о потенциальности исходного 3D-течения была выведена в работах [4, 22], где также было показано, что она допускает квазиконсервативную форму записи и для неё выполнено уравнение баланса полной энергии.

В случае, когда скорость приближённой модели определяется по формуле (14), известные выводы НЛД-уравнений существенно опираются на предположение о потенциальности трёхмерного течения [13,16,17]. Для подвижного дна соответствующая модель получена в [15]. Вместе с тем для вывода НЛД-уравнений полное условие потенциальности течения не требуется. Покажем, что базовую модель (28), (29) можно замкнуть, если предположить, что только две первые компоненты (13) вектора вихря равны нулю, т. е. выполнено соотношение

$$\mathbf{u}_z = \mu^2 \nabla w. \tag{35}$$

Интегрируя это равенство и используя формулы (20), (16), получим

$$\mathbf{u}_1(z) = -(z+h)\Big[\nabla Dh + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla h\Big] - \frac{(z+h)^2}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma) + \mathbf{u}_1\big|_{z=-h} + O(\mu^2).$$

Следовательно,

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}_\sigma + \mu^2\Big\{(z+h)\mathbf{A} + \frac{(z+h)^2}{2}\mathbf{B} + \mathbf{C}\Big\} + O(\mu^4), \tag{36}$$

где

$$\mathbf{A} = -\nabla Dh - (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla h, \quad \mathbf{B} = -\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma), \quad \mathbf{C} = \mathbf{u}_1\big|_{z=-h}. \tag{37}$$

Рассмотрим выражение (36) при $z = z_\sigma$. Согласно определению (14) имеет место равенство $\mathbf{u}(z_\sigma) = \mathbf{u}_\sigma$, поэтому с необходимостью получаем, что при $z = z_\sigma$ выражение в фигурной скобке должно быть равно нулю, т. е.

$$\mathbf{C} = -(z_\sigma + h)\mathbf{A} - \frac{(z_\sigma+h)^2}{2}\mathbf{B},$$

в силу чего

$$\mathbf{u}(z) = \mathbf{u}_\sigma + \mu^2\Big\{(z - z_\sigma)\mathbf{A} + \frac{(z+h)^2 - (z_\sigma+h)^2}{2}\mathbf{B}\Big\} + O(\mu^4),$$

$$\mathbf{u}_1 = (z - z_\sigma)\mathbf{A} + \frac{(z+h)^2 - (z_\sigma+h)^2}{2}\mathbf{B} + O(\mu^2).$$

Подставляя последнее выражение в формулу (18), получим

$$\mathbf{J} = \Big[\frac{H}{2} - (z_\sigma + h)\Big]\mathbf{A} + \Big[\frac{H^2}{6} - \frac{(z_\sigma+h)^2}{2}\Big]\mathbf{B} + O(\mu^2). \tag{38}$$

Таким образом, при определении (14) и в предположении (35) базовая модель (28), (29) замыкается соотношением (38) с отброшенным слагаемым порядка $O(\mu^2)$. После такого замыкания и в предположении потенциальности исходного трёхмерного течения базовую модель удается свести к НЛД-модели, выведенной в работе [15] (см. Приложение А).

Выбор z_σ влияет на свойства НЛД-модели. Рассмотрим ряд наиболее известных моделей, определяемых выбором z_σ и, следовательно, $\mathbf{u}_\sigma$. Все эти модели получены при условии потенциальности течения. Следует также отметить, что первые варианты моделей были рассмотрены для случая, когда группа членов, описывающих частотную дисперсию, линейна относительно основных переменных модели (модели типа моделей Буссинеска). Далее будем называть их слабонелинейными НЛД-моделями.

Если предположить, что

$$z_\sigma = -h(x, y), \tag{39}$$

то получается модель из работы [1], которую можно записать в виде уравнений (28), (29) с вектор-функцией (38) вида

$$\mathbf{J} = \frac{H}{2}\mathbf{A} + \frac{H^2}{6}\mathbf{B} + O(\mu^2). \tag{40}$$

В работе [2] приведена слабонелинейная НЛД-модель при

$$z_\sigma = 0. \tag{41}$$

Полностью нелинейный аналог данной модели получается из базовой модели (28), (29) при

$$z_\sigma = \alpha\eta, \tag{42}$$

$$\mathbf{J} = -\frac{H}{2}\mathbf{A} - \frac{H^2}{3}\mathbf{B} + O(\mu^2). \tag{43}$$

Эта модель обладает интересным свойством. Если её упростить, применив условие Буссинеска, то НЛД-уравнение движения при отбрасывании членов порядка $O(\mu^4)$ примет вид

$$D\mathbf{u}_\sigma + \alpha\nabla\eta = 0, \tag{44}$$

т. е. из потенциальности исходного течения получим

$$(v_\sigma)_x - (u_\sigma)_y = 0.$$

Среди НЛД-моделей со скоростью вида (14) особо выделяется случай

$$z_\sigma = -0.531h. \tag{45}$$

При таком выборе z_σ удалось существенно улучшить дисперсионные свойства НЛД-модели. Впервые эта модель при условии слабой нелинейности выведена в работе [13], а позже была обобщена на случай произвольной амплитуды для стационарного дна в [16, 17] и подвижного дна в [15].

В более поздних работах [14, 21] рассмотрен более общий случай, когда поверхность z_σ задается между дном и свободной границей с помощью некоторого параметра β $(0 \le \beta \le 1)$ (см., например, [14]):

$$z_\sigma = -\beta h + (1 - \beta)\alpha\eta. \tag{46}$$

В этом случае имеем вариант базовой модели с вектор-функцией

$$\mathbf{J} = \Big(\beta - \frac{1}{2}\Big) H\mathbf{A} - \frac{H^2}{6}\Big(3\beta^2 - 6\beta + 2\Big)\mathbf{B} + O(\mu^2). \tag{47}$$

Выше были рассмотрены известные НЛД-модели со скоростью, определяемой по формулам (15) или (14), выбор которых приводит к выражениям (34) и (38) для $\mathbf{J}$. При использовании базовой модели (28), (29) не предполагается, что $\mathbf{u}_\sigma$ определяется исключительно этими формулами. Рассмотрим, например, представление (16) с некоторой вектор-функцией $\mathbf{u}_\sigma$ и вектором $\mathbf{u}_1$, заданным формулой

$$\mathbf{u}_1 = -(\nabla h)Dh + (z+h)\mathbf{A} + \frac{(z+h)^2}{2}\mathbf{B}. \tag{48}$$

Тогда

$$\mathbf{J} = -(\nabla h)Dh + \frac{H}{2}\mathbf{A} + \frac{H^2}{6}\mathbf{B} \tag{49}$$

и уравнения (28), (29) базовой модели принимают (см. Приложение Б) вид уравнений НЛД-модели Алешкова [26], обобщённых в [10] на случай подвижного дна:

$$H_t + \nabla\cdot(H\mathbf{u}_\sigma) = \mu^2\nabla\cdot\left\{H(\nabla h)Dh + \frac{H^2}{2}\Big[\nabla Dh + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla h\Big] + \frac{H^3}{6}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\right\}, \tag{50}$$

$$D\mathbf{u}_\sigma + \alpha\nabla\eta = \mu^2\nabla\left(HR_2 + \frac{H^2}{2}R_1 + \frac{(Dh)^2}{2}\right) + O(\mu^4). \tag{51}$$

Отметим, что в этой модели скорость приближённой модели $\mathbf{u}_\sigma$ не равна горизонтальной составляющей скорости исходного трёхмерного течения на некоторой поверхности. В [26] полагается, что $\mathbf{u}_\sigma$ есть градиент потенциала вектора скорости, вычисленного на дне, который для неровной донной поверхности не совпадает с $\mathbf{u}\big|_{z=-h}$. Одним из преимуществ модели (50), (51) является сохранение в приближённой модели свойства потенциальности течения исходной трёхмерной модели: течение, описываемое этими уравнениями, является потенциальным, если оно было таковым в начальный момент времени.

Заключение

Получена базовая модель, из которой выводятся все широко используемые в настоящее время НЛД-модели второго гидродинамического приближения, но в отличие от большинства из них уравнения базовой модели допускают консервативную и весьма лаконичную форму записи.

На основе базовой модели можно получать новые НЛД-модели с улучшенными нелинейными и дисперсионными свойствами, например, при нарушении условия (35). В этом случае для определения $\mathbf{J}$ нужно, видимо, использовать информацию о параметризации завихренности на донной поверхности (см., например, [25]).

Вместе с тем получить для выведенной базовой модели уравнение баланса энергии, согласованное с уравнением сохранения энергии трёхмерной модели, по аналогии с [22] не удалось. Предварительное исследование показало, что для вывода уравнения баланса энергии приходится манипулировать членами, имеющими порядок $O(\mu^4)$.

Предложенная базовая модель открывает путь к стандартизации хорошо зарекомендовавших себя вычислительных алгоритмов, распространяя их на конкретные системы НЛД-уравнений. Так, перспективным является подход, основанный на выделении отдельного уравнения для дисперсионной составляющей давления, как это было сделано в частном случае [27, 28], когда скорость приближённой модели определялась по формуле (15).

Приложение A

Покажем, что после замыкания базовой модели соотношением (38) и в предположении потенциальности исходного трёхмерного течения получается НЛД-модель из [15], уравнения которой при использовании принятых в настоящей работе обозначений имеют следующий вид:

$$H_t + \nabla\cdot(H\mathbf{u}_\sigma) = \mu^2\nabla\cdot\left\{H\left[\Big(\frac{\alpha^2\eta^2-\alpha\eta h+h^2}{6}-\frac{z_\sigma^2}{2}\Big)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\Big(\frac{\alpha\eta-h}{2}-z_\sigma\Big)\nabla\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big)\right]\right\}+O(\mu^4), \tag{52}$$

$$(\mathbf{u}_\sigma)_t+(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma+\alpha\nabla\eta+\mu^2\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{z_\sigma^2}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+z_\sigma\nabla\Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big]\right\}}_{1}+$$
$$+\mu^2\Big\{\Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big]\nabla\Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big]-\nabla\Big[\alpha\eta\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)_t+h_{tt}\Big)\Big]+$$
$$+\underbrace{(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla z_\sigma)\nabla\Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big]}_{2}+\underbrace{z_\sigma\nabla\Big[\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big)\Big]}_{4}+$$
$$+\underbrace{z_\sigma(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla z_\sigma)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)}_{3}+\underbrace{\frac{z_\sigma^2}{2}\nabla\left[\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\right]}_{5}\Big\}+$$
$$+\mu^2\nabla\Big\{-\frac{\alpha^2\eta^2}{2}\nabla\cdot(\mathbf{u}_\sigma)_t-\alpha\eta\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla\Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big]+$$
$$+\alpha\eta\Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big]\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma\Big\}+\mu^2\nabla\Big\{\frac{\alpha^2\eta^2}{2}\Big[(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)^2-\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big]\Big\}=O(\mu^4). \tag{53}$$

С учётом обозначений (37) и определения оператора D получаем равенства

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)=-\mathbf{B},\quad \nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t=Dh+h\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma,\quad \nabla\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big)=-\mathbf{A}-h\mathbf{B}. \tag{54}$$

Поэтому уравнение неразрывности (52) можно переписать в виде

$$H_t+\nabla\cdot(H\mathbf{u}_\sigma)+\mu^2\nabla\cdot\left\{H\left[\Big(\frac{H}{2}-(z_\sigma+h)\Big)\mathbf{A}+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{(z_\sigma+h)^2}{2}\Big)\mathbf{B}\right]\right\}=O(\mu^4).$$

Учитывая выражение (38), приходим к выводу, что уравнение (52) совпадает с точностью до $O(\mu^4)$ с уравнением неразрывности (28) базовой НЛД-модели.

Покажем, что уравнение движения (53) можно записать в виде уравнения (27) базовой модели. Для этого вначале в уравнении (27) преобразуем слагаемые с вектором $\mathbf{J}$:

$$\frac{\mu^2}{H}\Big[D(H\mathbf{J})+H\,(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma+(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)H\mathbf{J}\Big]=\frac{\mu^2}{H}\Big[\mathbf{J}DH+HD\mathbf{J}+H\,(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma+(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)H\mathbf{J}\Big]=$$

$$=\frac{\mu^2}{H}\Big[\mathbf{J}\left(-H\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma+O(\mu^2)\right)+HD\mathbf{J}+H\,(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma+(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)H\mathbf{J}\Big]=$$

$$=\mu^2\Big[D\mathbf{J}+(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma\Big]+O(\mu^4)=\mu^2\Big\{\mathbf{J}_t+(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\,\mathbf{J}+(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma\Big\}+O(\mu^4). \qquad (55)$$

Здесь при преобразованиях использовано уравнение неразрывности (26). Теперь преобразуем каждое слагаемое в фигурной скобке, предварительно переписав (38):

$$\mathbf{J}=\left(\frac{H}{2}-h\right)\mathbf{A}+\left(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\right)\mathbf{B}-z_\sigma\,(\mathbf{A}+h\mathbf{B})-\frac{z_\sigma^2}{2}\mathbf{B}+O(\mu^2).$$

С учётом равенств (54) получим выражение

$$\mathbf{J}_t=\frac{\partial}{\partial t}\left[\Big(\frac{H}{2}-h\Big)\mathbf{A}+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)\mathbf{B}\right]+\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{z_\sigma^2}{2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+z_\sigma\nabla\Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big]\right\}}_{1}+O(\mu^2),$$

$$(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\,\mathbf{J}=(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\left[\Big(\frac{H}{2}-h\Big)\mathbf{A}+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)\mathbf{B}\right]+\underbrace{(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla z_\sigma)\,\nabla\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big)}_{2}+$$

$$+\underbrace{z_\sigma\,(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla z_\sigma)\,\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)}_{3}+\underline{z_\sigma\,(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\,\nabla\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big)+\frac{z_\sigma^2}{2}\,(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\,\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)}+O(\mu^2),$$

$$(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma=\left(\left[\Big(\frac{H}{2}-h\Big)\mathbf{A}+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)\mathbf{B}\right]\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_\sigma+$$

$$+\underline{z_\sigma\left(\nabla\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_\sigma+\frac{z_\sigma^2}{2}\,(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma}+O(\mu^2),$$

где фигурными скобками отмечены члены, одинаковые с соответствующими членами уравнения движения (53), а подчёркнутые члены будут преобразованы ниже.

В работе [15] НЛД-уравнения выведены в предположении потенциальности трёхмерного течения. Необходимое условие потенциальности (35) использовалось нами при выводе формулы (38) для $\mathbf{J}$. Для доказательства эквивалентности уравнений движения базовой НЛД-модели и модели [15] привлечём ещё одно соотношение, вытекающее из условия потенциальности:

$$v_x-u_y=0,$$

из которого с учётом представления (16) и обозначений (33) следует

$$(v_\sigma)_x-(u_\sigma)_y=O(\mu^2). \qquad (56)$$

Это равенство является ключевым при преобразовании подчёркнутых выражений в вышеприведенных уравнениях:

$$z_\sigma\,(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\,\nabla\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big)+z_\sigma\left(\nabla\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big)\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_\sigma=$$

$$=\underbrace{z_\sigma\nabla\Big[\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)+h_t\Big)\Big]}_{4}+O(\mu^2),$$

$$\frac{z_\sigma^2}{2}\,(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\,\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+\frac{z_\sigma^2}{2}\,(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma=\underbrace{\frac{z_\sigma^2}{2}\nabla\,[\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)]}_{5}+O(\mu^2).$$

Таким образом, с точностью до $O(\mu^4)$ уравнения (27) и (53) содержат одинаковые слагаемые, в которые входит функция z_σ.

Рассмотрим теперь другие слагаемые, в которые функция z_σ не входит. Запишем вначале часть уравнения движения с вектором $\mathbf{J}$, не содержащую z_σ:

$$\mathbf{\Psi}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\Big(\frac{H}{2}-h\Big)\mathbf{A}+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)\mathbf{B}\right]+(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\left[\Big(\frac{H}{2}-h\Big)\mathbf{A}+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)\mathbf{B}\right]+$$

$$+\left(\left[\Big(\frac{H}{2}-h\Big)\mathbf{A}+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)\mathbf{B}\right]\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_\sigma=$$

$$=D\left[\Big(\frac{H}{2}-h\Big)\mathbf{A}+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)\mathbf{B}\right]+\left(\left[\Big(\frac{H}{2}-h\Big)\mathbf{A}+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)\mathbf{B}\right]\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_\sigma.$$

Преобразуем это выражение, используя уравнение неразрывности (26) и равенства

$$\nabla(\nabla f\cdot\mathbf{u}_\sigma)=(\nabla f\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma+(\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla)\nabla f+O(\mu^2),$$

$$D_\sigma(\nabla f)=\nabla(Df)-(\nabla f\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma+O(\mu^2), \qquad (57)$$

справедливые при условии (56) для любой функции f:

$$\mathbf{\Psi}=\mathbf{A}D\Big(\frac{H}{2}-h\Big)+\mathbf{B}D\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)+$$

$$+\Big(\frac{H}{2}-h\Big)\Big[D\mathbf{A}+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma\Big]+\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)\Big[D\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma\Big]=$$

$$=\Big[\frac{H}{2}(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+Dh\Big]\Big[\nabla Dh+(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla h\Big]+\Big[\frac{H^2}{3}(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+hDh\Big]\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)-$$

$$-\Big(\frac{H}{2}-h\Big)\Big[\nabla D(Dh)+(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla Dh+(\nabla h)D(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big]-\Big(\frac{H^2}{6}-\frac{h^2}{2}\Big)\nabla D(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+O(\mu^2).$$

Приводя подобные члены, получим

$$\mathbf{\Psi}=-\frac{H^2}{6}\nabla R_1-\frac{H}{2}R_1\nabla h-\frac{H}{2}\nabla R_2+h\nabla R_2+$$

$$+Dh\nabla Dh+hDh\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+\nabla hDh(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+h\nabla Dh(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+$$

$$+h\nabla hD(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+\frac{h^2}{2}\nabla D(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)+O(\mu^2).$$

Преобразование двух последних строчек позволяет записать выражение для $\mathbf{\Psi}$ в компактном виде

$$\mathbf{\Psi} = -\frac{H^2}{6}\nabla R_1 - \frac{H}{2}R_1\nabla h - \left(\frac{H}{2} - h\right)\nabla R_2 + \nabla\left(\frac{h^2 R_1}{2}\right) + \nabla\frac{\big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\big)^2}{2} + O(\mu^2).$$

Преобразуем оставшиеся при μ^2 члены уравнения движения, не содержащие z_σ:

$$-\frac{1}{H}\left[\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) - H\nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right)\right] = -\nabla\left[\left(\frac{H^2}{2} - \frac{h^2}{2}\right)R_1 + (H-h)R_2\right] +$$

$$+\left(\frac{H^2}{6} - \frac{h^2}{2}\right)\nabla R_1 + \left(\frac{H}{2} - h\right)R_1\nabla h + \left(\frac{H}{2} - h\right)\nabla R_2 = \mathbf{\Psi}_1.$$

Складывая $\mathbf{\Psi}_1$ с $\mathbf{\Psi}$ и отбрасывая члены порядка $O(\mu^2)$, получим

$$\mathbf{\Psi}_2 = -\nabla\left[\left(\frac{H^2}{2} - \frac{h^2}{2}\right)R_1 + (H-h)R_2 - \frac{\big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\big)^2}{2}\right]. \tag{58}$$

К такому же виду приводятся члены при μ^2 в НЛД-модели Лью — Лайнетта [15], не содержащие z_σ. Из (53) следует, что эти члены можно записать в виде

$$\mathbf{\Psi}_3 = \Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma) + h_t\Big]\nabla\Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma) + h_t\Big] - \nabla\Big[\alpha\eta\Big(\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma)_t + h_{tt}\Big)\Big] +$$

$$+\nabla\Big\{-\frac{\alpha^2\eta^2}{2}\nabla\cdot(\mathbf{u}_\sigma)_t - \alpha\eta\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla\Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma) + h_t\Big] + \alpha\eta\Big[\nabla\cdot(h\mathbf{u}_\sigma) + h_t\Big]\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma\Big\} +$$

$$+\nabla\Big\{\frac{\alpha^2\eta^2}{2}\Big[(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)^2 - \mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big]\Big\} =$$

$$= \nabla\frac{\big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\big)^2}{2} - \nabla\Big\{\frac{\alpha^2\eta^2}{2}R_1\Big\} +$$

$$+\nabla\Big\{\alpha\eta\Big[-\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla\Big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big) + \Big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big)\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma - \Big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big)_t\Big]\Big\}.$$

Выражение в квадратной скобке последней строчки перепишем как:

$$-\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla\Big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big) + \Big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big)\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma - \Big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big)_t =$$

$$= -(Dh)_t - \mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla Dh - h\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma) - \mathbf{u}_\sigma(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla h + \Big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big)\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma - \Big(h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big)_t =$$

$$= -R_2 - h\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma) - (\mathbf{u}_\sigma\cdot\nabla h)(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma) + \Big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big)\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma - \Big(h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big)_t = -R_2 - hR_1.$$

Таким образом,

$$\mathbf{\Psi}_3 = \nabla\frac{\big(Dh + h(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\big)^2}{2} - \nabla\Big[\frac{\alpha^2\eta^2}{2}R_1 + \alpha\eta hR_1 + \alpha\eta R_2\Big],$$

что совпадает с выражением для $\mathbf{\Psi}_2$ (58).

Следовательно, если в преобразованных уравнениях базовой модели отбросить члены порядка $O(\mu^4)$, то приходим к системе НЛД-уравнений, полученной в работе [15]. Важно отметить, что дисперсионные соотношения базовой модели и модели (52), (53) совпадают.

Приложение Б

Приведём вывод уравнений (50), (51) НЛД-модели Алешкова, основываясь на полученных ранее уравнениях базовой модели. Уравнение неразрывности (50) следует из (28) после подстановки в последнее выражения (49) и учёта обозначений (37).

Далее будем использовать эквивалентную форму (27) записи уравнения движения (29). Группу членов с вектором $\mathbf{J}$ преобразуем аналогично (55)

$$\frac{\mu^2}{H}\Big[D(H\mathbf{J}) + H\,(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)H\mathbf{J}\Big] = \mu^2\Big[D\mathbf{J} + (\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma\Big] + O(\mu^4). \tag{59}$$

Используя уравнение неразрывности (26), выражение (49) для $\mathbf{J}$ и формулы (57), получим следующую цепочку преобразований для первого слагаемого из правой части равенства (59):

$$D\mathbf{J} = -D\big((\nabla h)Dh\big) - D\left[\frac{H}{2}\Big(\nabla Dh + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla h\Big)\right] - D\left[\frac{H^2}{6}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\right] =$$

$$= -Dh\;D(\nabla h) - (\nabla h)D^2h - \frac{DH}{2}\Big[\nabla Dh + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla h\Big] -$$

$$-\frac{H}{2}\Big[D(\nabla Dh) + D(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\;\nabla h + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)D(\nabla h)\Big] - \frac{H}{3}DH\;\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma) - \frac{H^2}{6}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma) =$$

$$= -Dh\Big[\nabla Dh - (\nabla h\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma\Big] - (\nabla h)D^2h + \frac{H}{2}(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big[\nabla Dh + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla h\Big] -$$

$$-\frac{H}{2}\left[\nabla D^2h - (\nabla Dh\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma + D(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\;\nabla h + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big(\nabla Dh) - (\nabla h\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma\Big)\right] +$$

$$+\frac{H}{3}H\;(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma) - \frac{H^2}{6}\Big[\nabla D(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma) - \big(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\cdot\nabla\big)\mathbf{u}_\sigma\Big] + O(\mu^2) =$$

$$= -\nabla\frac{(Dh)^2}{2} + Dh(\nabla h\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma - (\nabla h)D^2h + \frac{H}{2}(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla Dh + \frac{H}{2}(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)^2\nabla h -$$

$$-\frac{H}{2}\nabla D^2h + \frac{H}{2}(\nabla Dh\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma - \frac{H}{2}D(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\;\nabla h - \frac{H}{2}(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla Dh + O(\mu^2) +$$

$$+\frac{H}{2}(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)(\nabla h\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma + \frac{H^2}{3}\nabla\frac{(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)^2}{2} - \frac{H^2}{6}\nabla D(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma) + \frac{H^2}{6}\big(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\cdot\nabla\big)\mathbf{u}_\sigma.$$

С учётом обозначений (22) получим

$$D\mathbf{J} = -\nabla\frac{(Dh)^2}{2} - \frac{H^2}{6}\nabla R_1 - \frac{H}{2}R_1\nabla h - R_2\nabla h - \frac{H}{2}\nabla R_2 + O(\mu^2) +$$

$$+Dh(\nabla h\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma + \frac{H}{2}(\nabla Dh\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma + \frac{H}{2}(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)(\nabla h\cdot\nabla)\mathbf{u}_\sigma + \frac{H^2}{6}\big(\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\cdot\nabla\big)\mathbf{u}_\sigma.$$

Второе слагаемое из правой части равенства (59) можно преобразовать следующим образом:

$$(\mathbf{J}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_\sigma = \left(\Big[-(\nabla h)Dh - \frac{H}{2}\big(\nabla Dh + (\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\nabla h\big) - \frac{H^2}{6}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}_\sigma)\Big]\cdot\nabla\right)\mathbf{u}_\sigma =$$

$$= -Dh(\nabla h \cdot \nabla)\mathbf{u}_\sigma - \frac{H}{2}(\nabla Dh \cdot \nabla)\mathbf{u}_\sigma - \frac{H}{2}(\nabla \cdot \mathbf{u}_\sigma)(\nabla h \cdot \nabla)\mathbf{u}_\sigma - \frac{H^2}{6}\big(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_\sigma) \cdot \nabla\big)\mathbf{u}_\sigma.$$

Следовательно,

$$D\mathbf{J} + (\mathbf{J} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}_\sigma = -\frac{H^2}{6}\nabla R_1 - \frac{H}{2}R_1\nabla h - \frac{H}{2}\nabla R_2 - R_2\nabla h - \nabla\frac{(Dh)^2}{2} + O(\mu^2). \qquad (60)$$

Преобразуем остальные члены правой части уравнения (27):

$$\frac{1}{H}\left[\nabla\left(\frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2\right) - H\nabla h\left(\frac{H}{2}R_1 + R_2\right)\right] =$$

$$= HR_1\nabla H + \frac{H^2}{3}\nabla R_1 + R_2\nabla H + \frac{H}{2}\nabla R_2 - \frac{H}{2}R_1\nabla h - R_2\nabla h. \qquad (61)$$

Подставляя (60), (61) в правую часть уравнения (27) и приводя подобные члены, получим выражение

$$\mu^2\left[\frac{H^2}{2}\nabla R_1 + R_1\nabla\frac{H^2}{2} + H\nabla R_2 + R_2\nabla H + \nabla\frac{(Dh)^2}{2}\right] + O(\mu^4),$$

совпадающее с правой частью уравнения движения (51) НЛД-модели Алешкова.

Список литературы

[1] Mei C.C., Le Mehaute B. Note on the equations of long waves over an uneven bottom // J. Geophys. Res. 1966. Vol. 71, No. 2. P. 393–400.

[2] Peregrine D.H. Long waves on a beach // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 27, pt. 4. P. 815–827.

[3] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Уравнения полной нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды на вращающейся сфере // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 22–35.

[4] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Анализ условий вывода нелинейно-дисперсионных уравнений // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 5. С. 94–108.

[5] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Уравнения нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды на вращающейся сфере и выполнение законов сохранения // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 3. С. 37–50.

[6] Wu T.Y. Long waves in ocean and coastal waters // J. Eng. Mech. 1981. Vol. 107, No. 3. P. 501–522.

[7] Железняк М.И., Пелиновский Е.Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег: Сб. науч. тр. Горький: ИПФ АН СССР, 1985. С. 8–33.

[8] Rygg O.B. Nonlinear refraction-diffraction of surface waves in intermediate and shallow water // Coastal Eng. 1988. Vol. 12. P. 191–211.

[9] Dellar P.J., Salmon R. Shallow water equations with a complete Coriolis force and topography // Phys. Fluids. 2005. Vol. 17. 106601. 23 p.

[10] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычисл. технологии. 2008. Т. 13, № 4. С. 114–126.

[11] Witting J.M. A unified model for the evolution of nonlinear water waves // J. Comput. Phys. 1984. Vol. 56, No. 2. P. 203–236.

[12] Madsen P.A., Murray R., Sorensen O.R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics // Coastal Eng. 1991. Vol. 15. P. 371–388.

[13] Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation // J. Waterway, Port, Coastal Ocean Eng. 1993. Vol. 119, No. 6. P. 618–638.

[14] Kennedy A.B., Kirby J.T., Chen Q., Dalrymple R.A. Boussinesq-type equations with improved nonlinear performance // Wave Motion. 2001. Vol. 33. P. 225–243.

[15] Lynett P.J., Liu P.L.-F. A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up // Proc. of Royal Soc. of London. A. 2002. Vol. 458. P. 2885–2910.

[16] Liu P.L.-F. Model equations for wave propagations from deep to shallow water // Advances in Coastal and Ocean Engineering / Ed. P.L.-F. Liu. Singapore: World Sci. Publ. Co, 1994. Vol. 1. P. 125–157.

[17] Wei G., Kirby J.T., Grilli S.T., Subramanya R. The transformation of a solitary wave over an uneven bottom // J. Fluid Mech. 1995. Vol. 294. P. 71–92.

[18] Lynett P.J., Wu T.-R., Liu P.L.-F. Modeling wave runup with depth-integrated equations characteristics // Coastal Eng. 2002. Vol. 46. P. 89–107.

[19] Hsiao S., Liu P.L.-F., Chen Y. Nonlinear water waves propagating over a permeable bed // Proc. of Royal Soc. of London. A. 2002. Vol. 458. P. 1291–1322.

[20] Chen Q. Fully nonlinear Boussinesq-type equations for waves and currents over porous beds // J. Eng. Mech. 2006. Vol. 132, No. 2. P. 220–230.

[21] Shi F., Kirby J.T., Tehranirad B., Harris J.C. A high-order adaptive time-stepping TVD solver for Boussinesq modeling of breaking waves and coastal inundation // Ocean Modelling. 2012. Vol. 43-44. P. 36–51.

[22] Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Dutykh D. On the energy equation of approximate models in the long-wave hydrodynamics // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2014. Vol. 29, No. 3. P. 167–178.

[23] Green A.E., Naghdi P.M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 78, pt 2. P. 237–246.

[24] Ertekin R.C., Webster W.C., Wehausen J.V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // Ibid. 1986. Vol. 169. P. 275–292.

[25] Kim D.-H., Lynett P.J., Socolofsky S.A. A depth-integrated model for weakly dispersive, turbulent, and rotational fluid flows // Ocean Modelling. 2009. Vol. 27. P. 198–214.

[26] Алешков Ю.З. Течения и волны в океане. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1996. 226 с.

[27] Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище // Вычисл. технологии. 2013. Т. 18, № 5. С. 74–90.

[28] Шокин Ю.И., Бейзель С.А., Гусев О.И. и др. Численное исследование дисперсионных волн, возникающих при движении подводного оползня // Вестник ЮУрГУ. Математическое моделирование и программирование. 2014. Т. 7, № 1. С. 121–133.

Поступила в редакцию 13 октября 2014 г.,
с доработки — 14 ноября 2014 г.

The basic nonlinear-dispersive hydrodynamic model of long surface waves
Fedotova Zinaida I.[1], Khakimzyanov Gayaz S.[1]

Currently, the most popular nonlinear dispersive (NLD-) equations of long wave hydrodynamics, which are derived by the perturbation method, can be separated into two large groups. One of the groups is characterized by the fact that the velocity in the model is considered as the average of the horizontal velocity vector of Euler equations across the thickness of the liquid layer. In another group, the sought after velocity is the velocity of fluid flow on a surface $z = z(x, y)$ (z is the vertical coordinate), which is either immersed in a liquid, or coincident with the boundaries of the flow (that is a free surface or bottom). This paper shows that the NLD-models of both groups can be obtained on the basis of a unified approach. Starting from the Euler equations of inviscid incompressible fluid, without the assumption of potential flow, the universal NLD-model of long-wave hydrodynamics has been derived. It considers some vector-function associated with the flow parameters. By selecting this function in a proper way, all of the most famous models of long-wave approximation can be derived. Therefore, the constructed NLD-model can be regarded as the basic model.

Particular attention is attracted to the NLD model, which has the improved approximation of the dispersion relation proposed by Nwogu (1993), and generalized to the case of a movable bottom by Lynett & Liu (2002). It's extremely cumbersome notation is a drawback. Now we have shown that under assumption of flow potentiality this equations can be obtained from the basic model. Consequently, we can write them in a compact form.

Moreover, in the framework of this approach, it is possible to consider some NLD-models, based on the choice of the sought after velocity in a way which is different from the above. As an example, the derivation of the Aleshkov's model is performed. One of the advantages of this model is a preservation of flow potentiality, if it was inherent in the original three-dimensional model.

The advantage of the proposed basic model is that it can be written in a quasi-conservative form, which can be reduced into the conservative form in the case of a flat bottom. In addition, the notation of the governing system of nonlinear dispersive equations is compact and physically meaningful. Therefore the base model paves the way for standardization of proven computational algorithms, which were designed previously for specific systems of the NLD-equations.

Keywords: long surface waves, nonlinear dispersion equations, basic model.

Received 13 October 2014
Received in revised form 14 November 2014

[1] *Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia*
Corresponding author: Khakimzyanov Gayaz S., e-mail: khak@ict.nsc.ru
Aknowlegements: Research was supported by Russian Science Foundation (project No. 14-17-00219).