

# ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ДВИЖЕНИЯ ПОРШНЯ ПРИ БЕЗУДАРНОМ СЖАТИИ КОНУСА С ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ\*†

Т. Н. БРОНИНА

*Институт математики и механики УрО РАН  
Екатеринбург, Россия*

Приведено описание методики численного построения формы подвижного поршня, обеспечивающего безударное сжатие идеального газа в конусе. Описано построение поля скоростей при безударном сжатии газа методом характеристик. Предложены алгоритмы, уточняющие сетку характеристик, построенную методом Массо. Приведены результаты методических расчетов, показывающих эффективность предлагаемых алгоритмов, а также значения давлений на заданные моменты времени в выделенных на поршне точках.

## 1. Введение

Процессы неограниченного безударного сжатия газов (НБСГ) интересны тем, что являются энергетически выгодными при получении больших плотностей сжатого газа и при этом не приводят к большому росту температуры и кинетической энергии [1]. В монографии [2] приведены оценки степени кумуляции при безударном сжатии плоского слоя, цилиндра и шара, а в [1, 3] описано построение процессов безударного сжатия газа, находящегося внутри призм, тетраэдров и конусообразных тел специальных форм. Показано, что при НБСГ в таких телах степень кумуляции существенно выше, чем при НБСГ в цилиндре и шаре.

В данной работе приводится описание методики численного построения формы подвижного поршня, обеспечивающего безударное сжатие идеального газа в конусе. Численно алгоритм построения формы поршня распадается на две относительно независимые вычислительные задачи, одна из которых — решение гиперболического уравнения второго порядка, описывающего поле скоростей, другая — решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для получения формы поршня. Задача о построении части профиля поршня по полю течений, построенному методом характеристик, сформулирована в [3, 4].

---

\*© Т. Н. Бронина, 1996.

†Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №95-01-00721.

## 2. Постановка задачи

В начальный момент времени  $t = 0$  политропный газ покоится внутри тела вращения с образующей  $ABO$  (ось  $z$  — ось вращения,  $\|OB\| = 1$ ,  $OB \perp AB$ ) (рис. 1, *a*). Предполагается, что скорость звука в газе  $= 1$ . Угол  $\alpha$  связан с показателем адиабаты  $\gamma$  соотношением  $\tan \alpha = \sqrt{(2 - \gamma)/(\gamma + 1)}$  (случай согласованных  $\alpha$  и  $\gamma$ ).

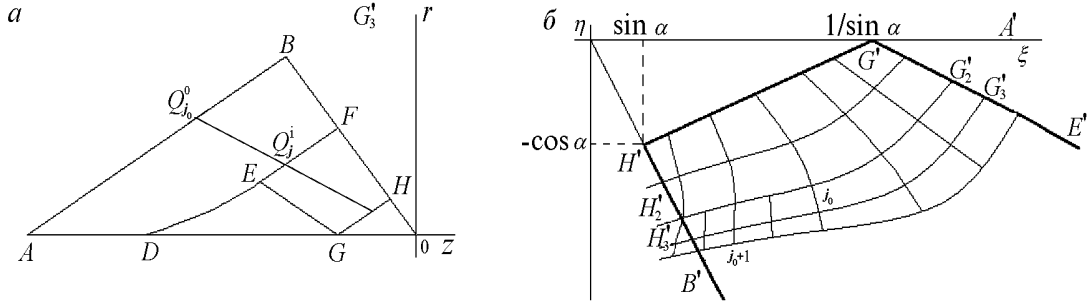


Рис. 1. Схема сечения сжимаемого тела и положения поршня в промежуточный момент времени (*a*) и расчетной области при построении сетки характеристик (*b*).

Линия  $AB$  соответствует начальному положению подвижного поршня  $R_t$ , который с нулевой начальной скоростью начинает двигаться в газ. При безударном сжатии возмущенное движение является потенциальным с потенциалом скоростей  $\Phi(t, z, r)$ . Решение задачи о сжатии в области  $DGHFE$  строится [4] в классе конических автомодельных течений газа в переменных  $\xi = z/\tau$ ,  $\eta = r/\tau$ . Уравнение конических течений для осесимметричного случая получено в [3] и имеет вид

$$\Psi_{\xi\xi}(\Psi_{\xi} + \xi)^2 + 2\Psi_{\xi\eta}(\Psi_{\xi} + \xi)(\Psi_{\eta} + \eta) + \Psi_{\eta\eta}(\Psi_{\eta} + \eta)^2 -$$

$$-(\gamma - 1) \left( \Psi - \xi\Psi_{\xi} - \eta\Psi_{\eta} - \frac{1}{2}\Psi_{\eta}^2 - \frac{1}{2}\Psi_{\xi}^2 \right) \left( \Psi_{\xi\xi} + \Psi_{\eta\eta} + \frac{\Psi_{\eta}}{\eta} \right) = 0, \quad (1)$$

где  $\Phi = -\tau\Psi(\xi, \eta)$ ,  $\tau = t - 1$ .

В автомодельных координатах  $(\xi, \eta)$  области возмущений  $DGHFE$  (рис. 1, *a*) соответствует область  $B'H'G'A'$ , линии  $GE$  соответствует  $G'E'$  (рис. 1, *b*). В области  $E'G'A'$  известно [4] точное решение, в области  $B'H'G'E'$  поле скоростей строится численно.

В работе [4] также указывается, что искомая подвижная поверхность поршня строится интегрированием на построенном поле скоростей  $(u_z, u_r)$  уравнения характеристик

$$\frac{dr}{d\tau} = u_r, \quad \frac{dz}{d\tau} = u_z, \quad (2)$$

с начальными данными на кривой  $ABH$ . Тогда поверхность  $R_t$ , которая задается уравнением  $F(z, r, t) = 0$  и удовлетворяет условию непротекания  $F_z u_z + F_r u_r + F_t = 0$ , можно в каждый фиксированный момент времени  $t$  “собрать” из характеристик (2), фиксируя их положение в момент  $t$ . Таким образом, построив течение с заданными свойствами, по (2) можно восстановить закон движения поршня, который бы обеспечил безударное сжатие газа.

### 3. Построение поля течений методом характеристик

Уравнение (1) — гиперболического типа во всей интересующей нас области за исключением точки  $H'$ . В области  $E'G'A'$  известно [4] точное решение. Далее описывается алгоритм построения поля течений в области  $B'H'G'E'$ . Характеристика  $H'G'$ , заданная уравнением  $\xi = (\eta + \cos^{-1} \alpha) / \tan \alpha$ , является слабым разрывом, и на ней должны выполняться условия [3]

$$\Psi_{\xi} = 0, \quad \Psi_{\eta} = 0, \quad \Psi = -\frac{1}{\gamma - 1}.$$

Для согласованного случая уравнение характеристики  $G'E'$  имеет вид  $\eta = -\xi \tan \alpha + \sqrt{3/(\gamma + 1)}$  и на ней

$$\Psi = -\frac{2 - \gamma}{\gamma + 1} \xi^2 - \frac{1}{2} \eta^2 + 3 \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \xi_0 \xi + \frac{3(\gamma - 1)}{2(\gamma + 1)} \xi_0^2, \quad \xi_0 = \frac{2\sqrt{2 - \gamma}}{\sqrt{3}(\gamma - 1)}. \quad (3)$$

Наличие двух известных характеристик, принадлежащих к разным семействам, а также необходимых условий на них позволяет решать в области  $B'H'G'E'$  задачу Гурса.

Подробное описание решения уравнения гиперболического типа методом характеристик дано, например, в [5]. Записав (1) в виде

$$A\Psi_{\xi\xi} + 2B\Psi_{\xi\eta} + C\Psi_{\eta\eta} = F, \quad (4)$$

где  $A, B, C, F$  — функции, зависящие от  $\xi, \eta, \Psi_{\xi}, \Psi_{\eta}, \Psi$ , для уравнения (4) легко получить уравнения характеристик и дифференциальные соотношения на них. Для численного построения характеристик использовался метод Массо [5], в основе которого лежит замена дифференциальных уравнений характеристик соответствующими конечно-разностными уравнениями. Численно это сводится к решению систем уравнений

$$\begin{aligned} \eta_3^{(1)} - \eta_1 &= \lambda_{11}^{(1)}(\xi_3^{(1)} - \xi_1), \\ \eta_3^{(1)} - \eta_2 &= \lambda_{22}^{(1)}(\xi_3^{(1)} - \xi_2); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_1[(\Psi_{\xi_3}^{(1)} - \Psi_{\xi_1}) + \lambda_{21}^{(1)}(\Psi_{\eta_3}^{(1)} - \Psi_{\xi_1})] - \Psi_{(1)}(\xi_3^{(1)} - \xi_1) &= 0, \\ A_2[(\Psi_{\xi_3}^{(1)} - \Psi_{\xi_2}) + \lambda_{12}^{(1)}(\Psi_{\eta_3}^{(1)} - \Psi_{\xi_2})] - \Psi_{(2)}(\xi_3^{(1)} - \xi_2) &= 0, \end{aligned}$$

$$\Psi_3^{(1)} - \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{2} = \frac{1}{2}[\Psi_{\xi_1}(\xi_3^{(1)} - \xi_1) + \Psi_{\eta_1}(\eta_3^{(1)} - \eta_1)] + \frac{1}{2}[\Psi_{\xi_2}(\xi_3^{(1)} - \xi_1) + \Psi_{\eta_2}(\eta_3^{(1)} - \eta_1)], \quad (6)$$

где  $(\xi_3^{(1)}, \eta_3^{(1)})$  — первое приближение значений координат искомой точки,  $\xi_i, \eta_i, (i = 1, 2)$  — координаты точек, взятых на известных характеристиках разных семейств,  $\Psi_i, \Psi_{\xi_i}, \Psi_{\eta_i}$  — значения функции и ее производных в этих точках, тангенсы наклонов характеристик  $\lambda_i$  вычисляются как  $\lambda_i = B \pm \sqrt{B^2 - AC}/A, (i = 1, 2)$ . В результате решения систем уравнений (5)–(6) получаем новую точку  $(\xi_3^{(1)}, \eta_3^{(1)}, \Psi_3^{(1)}, \Psi_{\xi_3}^{(1)}, \Psi_{\eta_3}^{(1)})$  поля характеристик. В работе [5] приводится способ уточнения координат этой точки и значения функции и ее производных в полученной точке. Пересчитывая угловые коэффициенты по формулам

$$\lambda_{11}^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_{11}^{(1)} + \lambda_{13}^{(1)}), \quad \lambda_{22}^{(2)} = \frac{1}{2}(\lambda_{22}^{(1)} + \lambda_{23}^{(1)}),$$

где второй нижний индекс обозначает номер точки, и решая систему (5), находим второе приближение координат  $(\xi_3^2, \eta_3^2)$  точки. Аналогично, пересчитывая коэффициенты уравнения (4) и решая систему (6) с новыми коэффициентами, находим  $\Psi_{\xi_3}^{(2)}, \Psi_{\eta_3}^{(2)}, \Psi_3^{(2)}$ . Процесс пересчета продолжается до выполнения условия

$$|\xi_3^{(j)} - \xi_3^{(j-1)}| < \varepsilon, |\eta_3^{(j)} - \eta_3^{(j-1)}| < \varepsilon, \quad (7)$$

но не более  $n_\varepsilon$  раз. В силу особенностей уравнения (1) описанный выше стандартный алгоритм построения сетки характеристик не позволил получить поле течений во всей области  $B'H'G'E'$ . Поэтому в эту стандартную методику введены два момента, позволяющие улучшить сетку характеристик, полученную по вышеописанной схеме.

## 4. Поворот системы координат

При возникновении в расчетах углов наклона характеристик, близких к  $\pi/2$ , возникает ситуация, при которой качество сетки либо ухудшается, либо счет вообще становится невозможным. В этом случае вычисления ведутся в системе координат, повернутой относительно исходной на угол  $\varphi$ , где  $\varphi$  вычисляется как  $\varphi = |\alpha_{11} - \alpha_{22}|/2$ ,  $\alpha_{ii} = \arctan(\lambda_{ii})$ . Системы уравнений (5)–(6) решаются в новой системе координат и далее осуществляется возврат в старую систему координат. Определение момента перехода в другую систему координат происходит для каждой рассчитываемой точки сетки. Предельно допустимый наклон  $\lambda_p$ , по достижении которого применяется алгоритм поворота, устанавливается экспериментально.

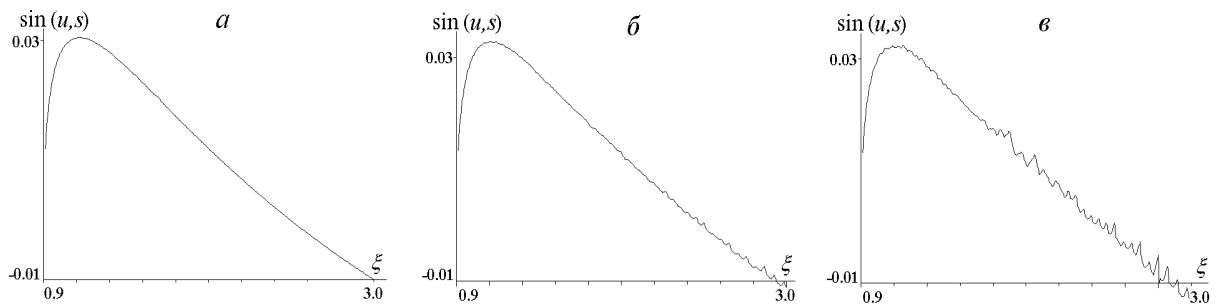


Рис. 2. Поведение функции  $\sin(u, s)$  вблизи стенки  $s$  для сеток с различными  $\lambda_p$ : 2.5 (а), 57.5 (б) и 100.5 (в).

В качестве примера различия в сетках, построенных с разными  $\lambda_p$ , приведем пример поведения функции  $\sin(\bar{u}, \bar{s})$  ( $\bar{u}$  — вектор скорости течения, построенный по исследуемой сетке,  $\bar{s}$  — направляющий вектор условной стенки — линии  $H'B'$ ) на сетках с различными  $\lambda_p$ . На рис. 2 представлены графики зависимости  $\sin(\bar{u}, \bar{s})$  от  $\eta$  при различных допустимых  $\lambda_p$ . При построении сетки для тестирования выбраны  $\lambda_p = 2.5$  (рис. 2, а), 57.5 (рис. 2, б) и 100 (рис. 2, в). Уже при сравнительно малых  $\eta$  ( $\eta < -2$ ) для  $\lambda_p = 57.5$  наблюдается нарушение “гладкости” функции исследуемого угла.

## 5. Изменение шага расчетов

Линии характеристик, выходящие из точек прямой  $G'E'$ , оканчиваются в окрестности прямой  $G'H'$ , и длина каждой новой характеристики этого семейства больше предыду-

щей (рис 3, *a*), то есть от точки к точке увеличивается первоначальный шаг расчета по характеристикам этого семейства. Естественно, на некотором этапе расчетов возникает необходимость корректировки шага расчета  $h_{G'H'}$ . Сигналом к изменению шага служит невыполнение неравенств (7) при построении какой-либо точки сетки. Итак, если при заданных  $\varepsilon$  и числе итераций  $n_\varepsilon$  неравенства (7) не выполнены за заданные  $n_\varepsilon$  шагов, то происходит уменьшение шага расчета по характеристике семейства  $G'H'$ . Делается это добавлением точек на характеристику с помощью линейной интерполяции. Например, при расчетах координат точки с номером  $j_0 + 1$  (см. рис. 1, *б*) неравенства (7) оказались не выполнены за заданное число шагов. Тогда, начиная с точки с номером  $j_0$  характеристики  $G'_2H'_2$ , вставляются дополнительные точки с координатами

$$\xi_g = \frac{\xi_{j_0+k} + \xi_{j_0+k+1}}{2}, \quad \eta_g = \frac{\eta_{j_0+k} + \eta_{j_0+k+1}}{2}, \quad k = 0, 1, \dots, M - 1.$$

Все точки характеристики  $G'_2H'_2$  заново перенумеровываются и строится характеристика  $G'_3H'_3$  по характеристике  $G'_2H'_2$  с добавленными точками (см. рис. 1, *б*). Если соотношение (7) не выполняется уже для первой расчетной точки характеристики  $G'_3H'_3$ , то необходимо менять шаг и по характеристике  $G'E'$ .

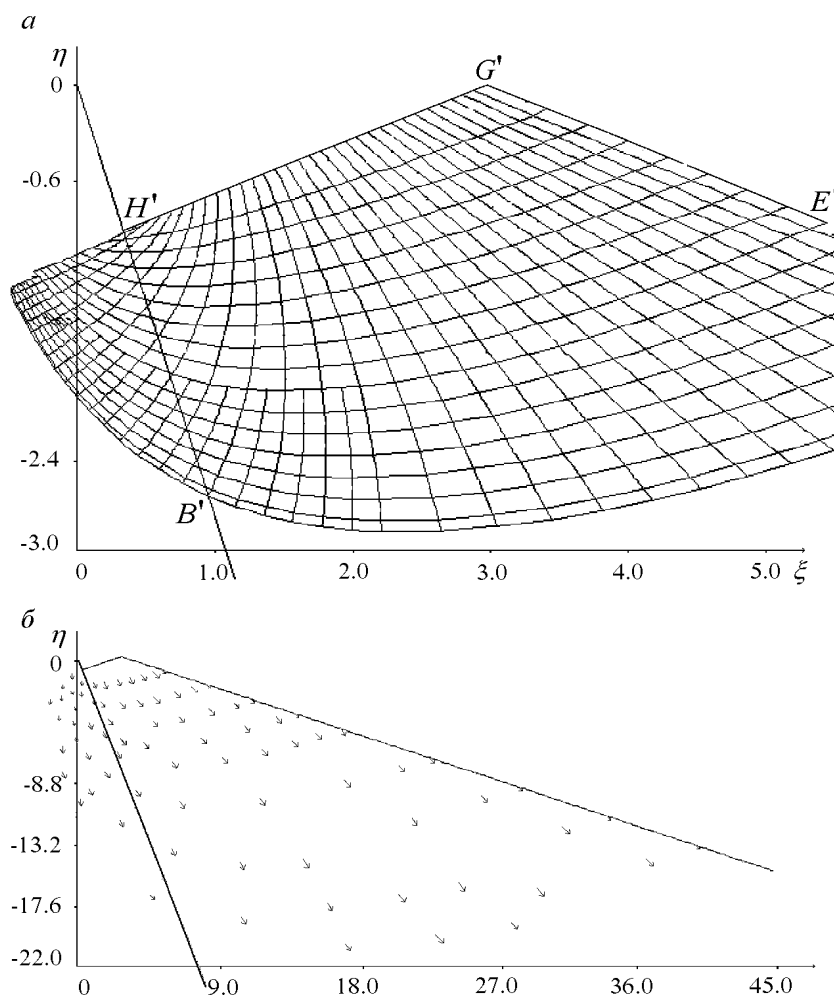


Рис. 3. Начальный фрагмент сетки характеристик при решении задачи Гурса (*a*) и поле скоростей в области  $H'G'E'$  (*б*).

С целью выяснения степени улучшения качества сеток при уменьшении величины первоначальных шагов проведены расчеты относительных погрешностей  $E\eta_0$ ,  $E\rho_0$ ,  $Eq_0$  координаты  $\eta$  и производных расчетной функции для сеток с различными значениями первоначальных шагов. На рис. 4 представлены результаты сравнения по координате  $\eta$  сеток характеристик, полученных при различных величинах первоначальных шагов по обеим характеристикам, как с применением алгоритма изменения шага расчета, так и без него. Для сравнения выбрано четыре сетки. Для первой из них по характеристике  $G'H'$  выбиралось 32 точки (длина шага  $h_{G'H'} \approx 0,09$ ), по характеристике  $G'E'$  длина шага  $h_{G'E'} \approx 0,15$ . Для последующих сеток шаг по каждой из характеристик выбирался вдвое меньше, чем для предыдущей сетке, так что для четвертой сетки на  $G'H'$  задано 256 точек ( $h_{G'H'} \approx 0,011$ ), шаг  $h_{G'E'} \approx 0,19$ . За контрольную характеристику взята характеристика семейства  $G'H'$ , выходящая с  $G'E'$ , для которой  $\eta = -52$  на  $G'E'$ . Относительные погрешности  $E\rho_0$ ,  $Eq_0$ ,  $E\eta_0$  вычислялись следующим образом:

$$E\eta_0^{i,i+1} = \frac{|\eta_j^i - \eta_k^{i+1}|}{|\eta_j^i|}, \quad E\rho_0^{i,i+1} = \frac{|\Psi_{\xi j}^i - \Psi_{\xi k}^{i+1}|}{|\Psi_{\xi j}^i|}, \quad Eq_0^{i,i+1} = \frac{|\Psi_{\eta j}^i - \Psi_{\eta k}^{i+1}|}{|\Psi_{\eta j}^i|}, \quad (8)$$

$$i = 1, 2, 3, 4,$$

здесь  $i$  — номер сетки,  $j$  — номер точки сетки  $i$ ,  $k$  — номер точки на сетке  $i + 1$ , соответствующий  $j$ -й точке сетки  $i$ .

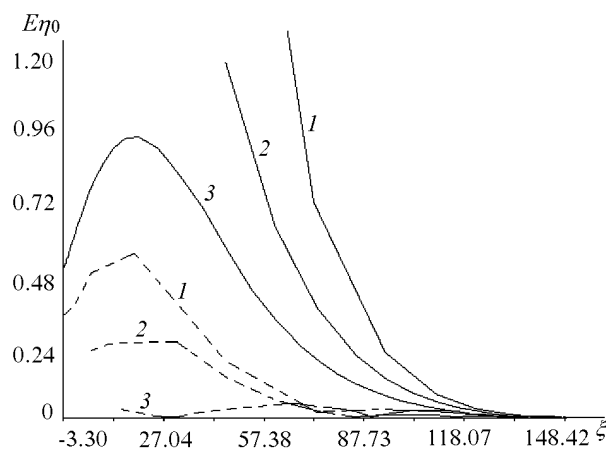


Рис. 4. Относительная погрешность  $E\eta_0$  для сеток, полученных с применением алгоритма деления шага (сплошные кривые 1, 2, 3) и без уменьшения первоначальных шагов расчета (пунктирные кривые 1, 2, 3).

На рис. 4 представлены результаты поточечного сравнения сеток по формулам (8) для  $E\eta_0$ :  $i$ -й кривой, изображенной сплошной линией, соответствует относительная погрешность при сравнении  $i$ -й и  $i + 1$ -й сеток, полученных без деления шага; кривым, изображенным пунктиром, соответствует относительная погрешность при сравнении сеток, построенных с делением шагов. По оси абсцисс — координаты  $\xi$  точек контрольной характеристики. Кроме явного уменьшения погрешности расчетов изменение шага непосредственно в ходе расчетов позволяет получить более полную картину поля скоростей в области прямой  $H'B'$  (рис. 3, б). На рис. 3, а и 3, б показаны начальный фрагмент сетки характеристик и поле течений для уравнения (1), построенные с применением всех вышеописанных алгоритмов. Для наглядности сетка характеристик построена с большими

первоначальными шагами расчета, а в приводимом на рис. 3, б поле течений изображены не все расчетные точки.

## 6. Построение профиля сжимающего поршня

Профиль поршня строится интегрированием системы уравнений (2), где  $u_r = -\Psi_\xi$ ,  $u_z = -\Psi_\eta$  рассчитаны по полю характеристик уравнения (1). На рис. 1, а прямая  $AB$  — начальное положение поршня. Поршень вдвигается, сжимая газ к точке  $O$ . В момент  $\tau_i$  положение поршня — линия  $DEQ_j^iF$ . На прямой  $AB$  выбирается  $K_Q$  точек  $Q_j^0(z_j^0, r_j^0)$ , ( $j = 1, \dots, K_Q$ ). Фиксируется точка  $Q_{j_0}^0$ . Система (2) интегрируется при следующих начальных и граничных условиях:

$$\tau_0 = -1, \quad u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad r = r_{j_0}^0, \quad z = z_{j_0}^0.$$

Для удобства записи нижний индекс далее опущен. Система уравнений (2) решается методом добавочного полушага [6]:

$$\begin{aligned} r_{i+\frac{1}{2}}^j &= u_r^j(z_i, r_i) \frac{h_i^\tau}{2} + r_i^j, \quad z_{i+\frac{1}{2}}^j = u_z^j(z_i, r_i) \frac{h_i^\tau}{2} + z_i^j, \\ r_{i+1}^j &= u_r^j(z_{i+\frac{1}{2}}, r_{i+\frac{1}{2}}) h_i^\tau + r_{i+\frac{1}{2}}^j, \quad z_{i+1}^j = u_z^j(z_{i+\frac{1}{2}}, r_{i+\frac{1}{2}}) h_i^\tau + z_{i+\frac{1}{2}}^j, \quad i = 1, k_\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Верхний индекс указывает на принадлежность к точке  $Q_j$ . Сделав  $k_\tau$  шагов, получим множество точек  $\{z_i^j, r_i^j\}_{i=1, k_\tau}$ , которое описывает движение точки  $Q_j$  от момента  $\tau = -1$  до  $\tau = \tau_{k_\tau}$ . Решив систему (9)  $k_Q$  раз, получаем  $k_Q$  наборов  $\{\{z_i^j, r_i^j\}_{i=1}^{k_\tau}\}_{j=1}^{k_Q}$ . Тогда положение поршня на момент  $\tau_i$  описывается множеством  $\{z_i^j, r_i^j\}_{j=1}^{k_Q}$ .

При решении системы уравнений (9) на каждом шаге необходимо знать

$$u_r(z_i, r_i) = -\Psi_\eta(\xi_i, \eta_i), \quad u_z(z_i, r_i) = -\Psi_\xi(\xi_i, \eta_i).$$

Производные  $\Psi_\eta$ ,  $\Psi_\xi$  вычисляются с помощью двумерной линейной интерполяции сетки характеристик. Для удобства изложения переобозначим  $\Psi_\eta = q$ ,  $\Psi_\xi = p$ . Поле характеристик рассматривается как совокупность треугольников. Для интерполяции ищется треугольник, в котором лежит точка  $(\xi_i, \eta_i)$ . Если вершины этого треугольника обозначить через  $(\xi_1, \eta_1)$ ,  $(\xi_2, \eta_2)$ ,  $(\xi_3, \eta_3)$ , а значения производных в этих точках через  $(p_1, q_1)$ ,  $(p_2, q_2)$ ,  $(p_3, q_3)$ , то  $p_i$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} p_i &= a_0 + a_1 \xi_i + a_2 \eta_i, \\ a_2 &= \frac{\xi_2(p_3 - p_1) + \xi_1(p_2 - p_3) + \xi_3(p_1 - p_2)}{\xi_2(\eta_3 - \eta_1) + \xi_1(\eta_2 - \eta_3) + \xi_3(\eta_1 - \eta_2)}, \\ a_1 &= \frac{p_2 - p_1 - a_2(\eta_3 - \eta_1)}{\xi_2 - \xi_1}, \quad a_0 = p_1 - a_1 \xi_1 - a_2 \eta_2. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются  $q_i$ .

В переменных  $(\xi, \eta)$  расчетная область уходит на бесконечность, поэтому расчет в полной области составляется из фрагментов, каждый из которых рассчитывается по схеме решения задачи Гурса и сопряжен с предыдущим фрагментом по характеристике, выходящей с  $G'E'$ .

## 7. Численный пример расчета положений поршня

Расчет проведен для показателя адиабаты  $\gamma = 1.66$ . Для построения сетки характеристик задавалось 256 точек на характеристике  $G'H'$  и шаг  $h_\eta = 0.026 G'E'$ .

Значения давлений в 4-х точках на поршне в выделенные моменты времени

Время	$P_{Q_1}$	$P_{Q_4}$	$P_{Q_9}$	$P_{Q_{19}}$
0.6000	$8.353 \cdot 10^{-2}$	$8.632 \cdot 10^{-2}$	$1.242 \cdot 10^{-1}$	$9.365 \cdot 10^{-1}$
0.9650	7.172	$1.734 \cdot 10^1$	$9.857 \cdot 10^2$	$8.571 \cdot 10^3$
0.9900	$9.168 \cdot 10^1$	$1.743 \cdot 10^3$	$1.084 \cdot 10^4$	$9.337 \cdot 10^5$
0.9965	$7.244 \cdot 10^2$	$8.798 \cdot 10^4$	$5.469 \cdot 10^6$	$4.757 \cdot 10^7$
0.9990	$7.718 \cdot 10^3$	$8.981 \cdot 10^6$	$5.582 \cdot 10^8$	$5.182 \cdot 10^9$

Для расчета положения поршня было выбрано  $k_Q = 18$  точек. Форма поршня рассчитывалась на 387 моментов времени ( $k_\tau = 387$ ). Конечный момент времени  $\tau_{\text{кон}} = 0.001$  ( $t = 0.999$ ). Движение точки  $A(D)$  (см. рис. 1, а) не рассчитывалось по сетке характеристик. Закон движения этой точки указан в [4].

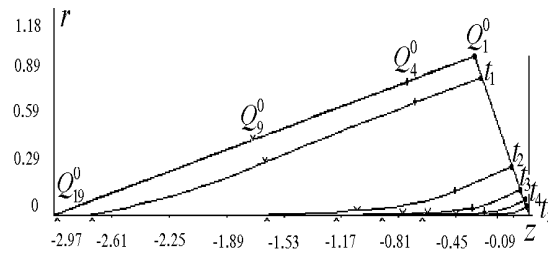


Рис. 5. Положение сжимающего поршня на 6 моментов времени.

На рис. 5 изображены профили поршня на моменты  $t_1 = 0.6$ ;  $t_2 = 0.9$ ;  $t_3 = 0.99$ ;  $t_4 = 0.9965$ ;  $t_5 = 0.999$ . В таблице приведены значения давлений на указанные моменты времени. Давление вычислялось как

$$P = p_0 \left[ \frac{c^2 \rho_0}{\gamma p_0} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad p_0 = 0.03, \quad \rho_0 = 0.05, \quad \gamma = 1.66,$$

$$c^2 = (\gamma - 1) \left( \Psi - \xi \Psi_\xi - \eta \Psi_\eta - \frac{1}{2} \Psi_\eta^2 - \frac{1}{2} \Psi_\xi^2 \right).$$

Для каждого момента времени выписаны значения давлений в 4-х точках на поршне. На рис. 5 выделенные точки обозначены следующим образом: знак  $\Delta$  относится к точке  $Q_{19}$  на поршне, знак  $\nabla$  — к точке  $Q_9$ , знак  $|$  — к точке  $Q_4$ , знак  $\bullet$  — к точке  $Q_1$ . На рис. 5 эти точки показаны только для  $t = 0$ . Как уже отмечалось, в области  $E'G'A'$  известно точное решение [4]. Для оценки погрешности расчетов по методу характеристик в области  $E'G'A'$  были проведены расчеты построения формы поршня и с применением описанного выше метода по сеткам характеристик. При вычислении положения поршня для  $t = 0.999$  для всех расчетных точек поршня за исключением точки  $H$  величины



$\Psi_\xi, \Psi_\eta$  определяются по области  $E'G'A'$ . Это позволило провести оценку относительной погрешности составляющих скорости по формулам, приведенным в [4]:

$$\Psi_\xi = \frac{-2(2 - \gamma)\xi + 3(\gamma - 1)\xi_0}{\gamma + 1}, \quad \Psi_\eta = -\eta, \quad \xi_0 = \frac{2\sqrt{2 - \gamma}}{\sqrt{3}(\gamma - 1)}.$$

Значения  $\Psi_\xi, \Psi_\eta$  проверялись в точках с координатами  $(\xi, \eta)$ , соответствующих координатам  $(z, r)$  поршня. В результате проведенных расчетов для  $t = 0.999$  относительная погрешность для  $u_z$  имеет порядок  $10^{-5}$ , относительная погрешность для  $u_r$  — порядок  $10^{-2}$ .

Отдельно остановимся на движении точки  $Q_1$ . На линии  $OB$  не налагается никаких граничных условий и тем самым при сжатии не гарантируется, что точка  $Q_1$  движется по стенке  $OB$ . Полученная в ходе расчетов картина поведения точки  $Q_1$  (или  $F$  на рис. 1, а) представлена на рис. 6, где  $OB$  — предполагаемая стенка, точка 1 соответствует положению  $Q_1$  в момент времени  $t_1 = 0$ , точка 2 — времени  $t_2 = 0.355$ , т. 3 —  $t_3 = 0.6$ , т. 4 —  $t_4 = 0.77$ , т. 5 —  $t_5 = 0.88$ , т. 6 —  $t_6 = 0.965$ , т. 7 —  $t_7 = 0.99$ , т. 8 —  $t_8 = 0.9965$ , т. 9 —  $t_9 = 0.999$ . Отметим, что отклонение расчетной точки  $Q_1$  от предполагаемой стенки сравнимо с точностью расчетов и может не давать истинной картины движения точки  $Q_1$ , но течение вблизи этой точки и не влияет на образование струи сильного сжатия (см. таблицу).

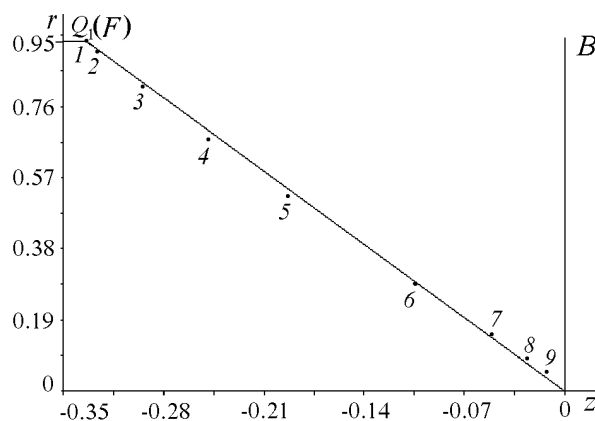


Рис. 6. Движение точки  $Q_1(F)$  вдоль предполагаемой стенки  $OB$ .

При решении уравнения (1) использовался комплекс программ решения уравнения 2-го порядка общего вида (4) с переменными коэффициентами, зависящими от  $\tau, \xi, \eta$ , искомой функции и ее производных. Все вычислительные алгоритмы, уточняющие сетку характеристик, также рассчитаны для уравнения с произвольными коэффициентами. Чтобы воспользоваться предлагаемыми программами для решения методом характеристик уравнения 2-го порядка (в случае задания начальных данных по схеме задачи Гурса), необходимо задать уравнения двух характеристик разных семейств и начальные данные на них, коэффициенты  $A, B, C, F$  (уравнение (4)) в аналитическом виде и начальные величины шагов по заданным характеристикам. Комплекс программ позволяет решать методом характеристик и уравнения в случае задания исходных данных для 2-й смешанной задачи. По желанию пользователя предусмотрены возможности записи на диск получаемой сетки характеристик (или ее фрагментов), а также вывод фрагментов сетки и поля скоростей на экран в графическом режиме. Программы выполнены на Microsoft 5.1. Возможен счет на процессоре I860.

## Список литературы

- [1] СИДОРОВ А. Ф. Некоторые оценки степени кумуляции энергии при плоском и пространственном безударном сжатии газа. *Докл. АН СССР*, **318**, №3, 1991, 548–552.
- [2] ЗАБАБАХИН Е. И., ЗАБАБАХИН И. Е. *Явления неограниченной кумуляции*. Наука, М., 1988.
- [3] СИДОРОВ А. Ф. Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа. *Докл. АН СССР*, **329**, №4, 1993.
- [4] СИДОРОВ А. Ф., ХАЙРУЛЛИНА О. Б. Процессы безударного конического сжатия и разлета газа. *ПММ*, **58**, Вып. 4, 1994, 81–92.
- [5] БЕРЕЗИН И. С., ЖИДКОВ Н. П. *Методы вычислений*. **2**, Физматгиз, М., 1962.
- [6] БЕРЕЗИН И. С., ЖИДКОВ Н. П. *Методы вычислений*. **1**, Физматгиз, М., 1962.

*Поступила в редакцию 30 ноября 1995 г.*