МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ С ЭКСТРАПОЛЯЦИЕЙ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СО СМЕШАННЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ *

В. Ф. Формалев
Московский государственный авиационный институт, Россия

Предложен экономичный, абсолютно устойчивый метод переменных направлений численного решения параболических задач со смешанными дифференциальными операторами, сводящийся к скалярным прогонкам по координатным направлениям и отличающийся от классического метода Писмена—Рэчфорда неявной аппроксимацией всех дифференциальных операторов с заменой некоторых значений сеточной функции экстраполяционными по времени, что делает метод абсолютно устойчивым и применимым к задачам с любой размерностью по пространству.

Разработанные в конце 50-х — начале 60-х годов академиком Н. Н. Яненко и его школой методы дробных шагов [1] оказались плодотворными не только при решении громадного класса задач механики сплошных сред, но и стали побуждающим фактором для поиска новых экономичных, полностью неявных методов численного решения указанного класса задач [2].

В данной работе рассматривается один из таких методов, развиваемых на кафедре "Вычислительная математика и программирование" Московского авиационного института под руководством автора применительно к решению многомерных параболических задач, содержащих смешанные дифференциальные операторы.

Существо этих методов заключается в более полном использовании информации о решении как на нижних временных слоях, так и в нижних пространственных узлах верхних временных слоев, то есть в существенной степени используется параболичность уравнений.

При определенных условиях, накладываемых на значения сеточной функции в узлах правых пространственных сечений на верхних временных слоях, девятнадцатиточечный шаблон в трехмерном случае можно свести к скалярным прогонкам по координатным направлениям. В рассматриваемом методе находится компромисс между стремлением, с одной стороны, сделать схему полностью неявной и, следовательно, абсолютно устойчивой, а с другой — экономичной, то есть использовать только скалярные прогонки.

Идею метода и теоремы об аппроксимации и устойчивости рассмотрим на примере следующей двумерной начально-краевой задачи теплопроводности с тензором теплопроводности (распространение на пространственные задачи не представляет затруднений):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{p,q=1}^{2} k_{pq}\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_p \partial x_q}, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad t \in (0, T]; \tag{1}$$

$$u(M,t)=\varphi(M,t),\quad M(x_1,x_2)\in\Gamma,\quad t>0; \tag{2}$$

$$u(M,0)=\psi(M),\quad M(x_1,x_2)\in\bar{G},\quad t=0; \tag{3}$$

$$k_{pq}=\sum_{r=1}^{2}k_r\alpha_{rp}\alpha_{rq},\quad p,q=1,2. \tag{4}$$

На пространственно-временной сетке

$$\omega_{h_1,h_2,\tau}=\{x_{1\,i}=ih_1,\ i=\overline{0,I};\quad x_{2\,j}=jh_2,\ j=\overline{0,J};$$

$$t^n=n\tau,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\} \tag{5}$$

дифференциальная задача (1)–(4) аппроксимируется следующей схемой на девятиточечном шаблоне:

$$\frac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau/2}=\Lambda_{11}u^{n+1/2}+2\tilde{\Lambda}_{12}u^{n+1/2}+\tilde{\Lambda}_{22}u^{n+1/2}, \tag{6}$$

$$\Lambda_{11}u^{n+1/2}=\frac{k_{11}}{h_1^2}\left(u_{i+1\,j}^{n+1/2}-2u_{i\,j}^{n+1/2}+u_{i-1\,j}^{n+1/2}\right),$$

$$2\tilde{\Lambda}_{12}u^{n+1/2}=\frac{2k_{12}}{4h_1h_2}\left(\tilde{u}_{i+1\,j+1}^{n+1/2}-u_{i+1\,j-1}^{n+1/2}-\tilde{u}_{i-1\,j+1}^{n+1/2}+u_{i-1\,j-1}^{n+1/2}\right),$$

$$\tilde{\Lambda}_{22}u^{n+1/2}=\frac{k_{22}}{h_2^2}\left(\tilde{u}_{i\,j+1}^{n+1/2}-2u_{i\,j}^{n+1/2}+u_{i\,j-1}^{n+1/2}\right),$$

$$\tilde{u}_{s\,j+1}^{n+1/2}=2u_{s\,j+1}^{n}-u_{s\,j+1}^{n-1/2},\quad s=i-1,i,i+1;$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau/2}=\tilde{\Lambda}_{11}u^{n+1}+2\tilde{\Lambda}_{12}u^{n+1}+\Lambda_{22}u^{n+1}, \tag{7}$$

$$\tilde{\Lambda}_{11}u^{n+1}=\frac{k_{11}}{h_1^2}\left(\tilde{u}_{i+1\,j}^{n+1}-2u_{i\,j}^{n+1}+u_{i-1\,j}^{n+1}\right),$$

$$2\tilde{\Lambda}_{12}u^{n+1}=\frac{2k_{12}}{4h_1h_2}\left(\tilde{u}_{i+1\,j+1}^{n+1}-\tilde{u}_{i+1\,j-1}^{n+1}-u_{i-1\,j+1}^{n+1}+u_{i-1\,j-1}^{n+1}\right),$$

$$\Lambda_{22}u^{n+1}=\frac{k_{22}}{h_2^2}\left(u_{i\,j+1}^{n+1}-2u_{i\,j}^{n+1}+u_{i\,j-1}^{n+1}\right),$$

$$\tilde{u}_{i+1\,s}^{n+1}=2u_{i+1\,s}^{n+1/2}-u_{i+1\,s}^{n},\quad s=j-1,j,j+1.$$

В подсхеме (6) из девяти значений сеточной функции значения $u_{i-1\,j}^{n+1/2}$, $u_{i\,j}^{n+1/2}$, $u_{i+1\,j}^{n+1/2}$ являются искомыми, определяемыми из скалярных прогонок в направлении переменной x_1, значения $u_{i-1\,j-1}^{n+1/2}$, $u_{i\,j-1}^{n+1/2}$, $u_{i+1\,j-1}^{n+1/2}$ — уже известны, а значения $\tilde{u}_{i-1\,j+1}^{n+1/2}$, $\tilde{u}_{i\,j+1}^{n+1/2}$, $\tilde{u}_{i+1\,j+1}^{n+1/2}$ с порядком $O(\tau^2)$ определяются экстраполяцией по двум предыдущим временным полуслоям (они затем уточняются в прогонке вдоль координатных линий $x_{2\,j+1}=(j+1)h_2=\text{const},\ j=\overline{1,J-3}$).

В подсхеме (7) значения $u_{i\,j-1}^{n+1}$, $u_{i\,j}^{n+1}$, $u_{i\,j+1}^{n+1}$ являются искомыми, определяемыми из скалярных прогонок в направлении переменной x_2, значения $u_{i-1\,j-1}^{n+1}$, $u_{i-1\,j}^{n+1}$, $u_{i-1\,j+1}^{n+1}$ — уже известны, а значения $\tilde{u}_{i+1\,j-1}^{n+1}$, $\tilde{u}_{i+1\,j}^{n+1}$, $\tilde{u}_{i+1\,j+1}^{n+1}$ с порядком $O(\tau^2)$ определяются экстраполяцией по двум предыдущим временным полуслоям (они затем уточняются в прогонке вдоль координатных линий $x_{1\,i+1}=(i+1)h_1=\text{const},\ i=\overline{1,I-3}$).

Экстраполяция на верхний временной полуслой в подсхемах (6) и (7) осуществляется таким образом, что значения первой производной по времени на верхнем временном полуслое сохраняются такими же, как на нижних временных полуслоях, примыкающих к верхнему.

Для исследования аппроксимационных свойств схемы (6), (7) прибавим и вычтем в подсхеме (6) выражения $\dfrac{k_{22}}{h_2^2}u_{i\,j+1}^{n+1/2}$, $\dfrac{2k_{12}}{4h_1h_2}\left(u_{i+1\,j+1}^{n+1/2}-u_{i-1\,j+1}^{n+1/2}\right)$, а в подсхеме (7) — выражения $\dfrac{k_{11}}{h_1^2}u_{i+1\,j}^{n+1}$, $\dfrac{2k_{12}}{4h_1h_2}\left(u_{i+1\,j+1}^{n+1}-u_{i+1\,j-1}^{n+1}\right)$; получим эквивалентную схему

$$\frac{u^{n+1/2}-u^n}{\tau/2}=\Lambda u^{n+1/2}+\tilde{\Gamma}_{22}u^{n+1/2}+2\tilde{\Gamma}_{12}^1u^{n+1/2}, \tag{8}$$

$$\Lambda u^{n+1/2}=\left(\Lambda_{11}+\Lambda_{22}+2\Lambda_{12}\right)u^{n+1/2},$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}u^{n+1/2}=\frac{k_{22}}{h_2^2}\left(\tilde{u}_{i\,j+1}^{n+1/2}-u_{i\,j+1}^{n+1/2}\right),$$

$$2\tilde{\Gamma}_{12}^1u^{n+1/2}=\frac{2k_{12}}{4h_1h_2}\left[\left(\tilde{u}_{i+1\,j+1}^{n+1/2}-u_{i+1\,j+1}^{n+1/2}\right)-\left(\tilde{u}_{i-1\,j+1}^{n+1/2}-u_{i-1\,j+1}^{n+1/2}\right)\right];$$

$$\frac{u^{n+1}-u^{n+1/2}}{\tau/2}=\Lambda u^{n+1}+\tilde{\Gamma}_{11}u^{n+1}+2\tilde{\Gamma}_{12}^2u^{n+1}, \tag{9}$$

$$\Lambda u^{n+1}=\left(\Lambda_{11}+\Lambda_{22}+2\Lambda_{12}\right)u^{n+1},$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}u^{n+1}=\frac{k_{11}}{h_1^2}\left(\tilde{u}_{i+1\,j}^{n+1}-u_{i+1\,j}^{n+1}\right),$$

$$2\tilde{\Gamma}_{12}^2u^{n+1}=\frac{2k_{12}}{4h_1h_2}\left[\left(\tilde{u}_{i+1\,j+1}^{n+1}-u_{i+1\,j+1}^{n+12}\right)-\left(\tilde{u}_{i+1\,j-1}^{n+1}-u_{i+1\,j-1}^{n+1}\right)\right];$$

Для “осколочных"операторов $\tilde{\Gamma}_{22}$, $\tilde{\Gamma}_{12}^1$, $\tilde{\Gamma}_{11}$, $\tilde{\Gamma}_{12}^2$ в подсхемах (8), (9) справедливы следующие выражения ($\triangle u/\tau=\Lambda u$):

$$\tilde{\Gamma}_{22}u^{n+1/2}=-\frac{\sigma_{22}\tau}{4}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda\right)\Lambda^2u^{n+1}+O_1\left(\frac{\tau^2}{h_2}\right),\ \sigma_{22}=\frac{k_{22}\tau}{h_2^2}; \tag{10}$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}u^{n+1}=-\frac{\sigma_{11}\tau}{4}\Lambda^2u^{n+1}+O_2\left(\frac{\tau^2}{h_1}\right),\ \sigma_{11}=\frac{k_{11}\tau}{h_1^2}; \tag{11}$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}^1u^{n+1/2}=O_3\left(\frac{\tau^2}{h_1}+\frac{\tau^2}{h_2}\right);\ \tilde{\Gamma}_{12}^2u^{n+1}=O_4\left(\frac{\tau^2}{h_1}+\frac{\tau^2}{h_2}\right). \tag{12}$$

Исключая из (8), (9) вектор $u^{n+1/2}$, получим

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}=\left\{\Lambda-\frac{\tau}{4}\Lambda^2-\frac{\tau}{8}\sigma_{11}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda\right)\Lambda^2-\right.$$

$$\left.-\frac{\tau}{8}\sigma_{22}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda\right)^2\Lambda^2-\frac{\tau^3}{64}\sigma_{11}\sigma_{22}\left(E-\frac{\tau}{2}\Lambda\right)\Lambda^4\right\}u^{n+1}+$$

$$+O\left(\frac{\tau^2}{h_1}+\frac{\tau^2}{h_2}\right), \tag{13}$$

откуда следует аппроксимация дифференциальной задачи (1)–(4) с порядком $O\left(\tau+\frac{\tau^2}{h_1}+\frac{\tau^2}{h_2}\right)$. Хотя аппроксимация является условной по [1], в частных $\frac{\tau^2}{h}$ шаг τ значительно быстрее стремится к нулю, чем h, так как числа Куранта $\sigma_{11},\ \sigma_{22}$ остаются примерно постоянными при $\tau,\ h\to 0$ (например, если шаг h уменьшается вдвое, τ уменьшается в четыре раза).

Для доказательства устойчивости рассматривается

Лемма: *"Осколочные"операторы $C_{11}=-\tilde{\Gamma}_{11},\ C_{22}=-\tilde{\Gamma}_{22}$ положительно определены.*

Действительно, на основании неравенства [3]

$$A=-\Lambda\ >\ 0, \tag{14}$$

где Λ — пространственный конечно-разностный оператор в задачах с однородными граничными условиями первого рода, и соотношений (10)–(12) заключаем, что утверждение леммы верно.

Тогда на основании (13) и (14) получаем (остаточный член (13) отброшен) равенство

$$\begin{gathered}\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}=-A\left\{E+\frac{\tau}{4}A+\frac{\tau}{8}\sigma_{11}\left(E+\frac{\tau}{2}A\right)A+\right.\\ \left.+\frac{\tau}{8}\sigma_{22}\left(E+\frac{\tau}{2}A\right)^2A+\frac{\tau^3}{64}\sigma_{11}\sigma_{22}\left(E+\frac{\tau}{2}A\right)A^3\right\}u^{n+1},\end{gathered} \tag{15}$$

откуда видно, что на основании утверждения леммы, оператор в фигурных скобках положительно определен, и так как каждое слагаемое положительно определено, то этот оператор больше единичного, откуда следует

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}\ \leq\ -Au^{n+1}. \tag{16}$$

Умножая скалярно левую и правую части (16) на $u_t=(u^{n+1}-u^n)/\tau$ и используя тождество $u^{n+1}=(u^{n+1}+u^n)/2+(u^{n+1}-u^n)/2$, получим энергетическое неравенство

$$((E+0.5\tau A)\,u_t,\ u_t)+0.5\left(Au^{n+1},\ u^{n+1}\right)\ \leq\ 0.5\,(Au^n,\ u^n)\,, \tag{17}$$

в котором, в силу $E+0.5\tau A\ >\ 0$, первое слагаемое положительно и, если его опустить, то знак неравенства в (17) усиливается, то есть

$$\left(Au^{n+1},\ u^{n+1}\right)\ \leq\ (Au^n,\ u^n)\,. \tag{18}$$

Вводя норму в энергетическом пространстве [3]

$$\|u\|_A^2=(Au,u)\,, \tag{19}$$

на основании (18), получаем принцип максимума

$$\|u^{n+1}\|_A\leq\|u^n\|_A\leq\ldots\leq\|u^0\|_A=\|\psi\|_A, \tag{20}$$

являющийся достаточным признаком устойчивости конечно-разностной схемы (6), (7). А поскольку на числа Куранта не накладывалось никаких ограничений, то схема (6), (7) является абсолютно устойчивой.

При выводе энергетического неравенства (17) использовалось условие самосопряженности оператора и условие коммутативности скалярного произведения.

Это же подтверждает и тестовый пример, в котором проведены сравнительные расчеты по данному методу (МПНЭ) и методу переменных направлений (МПН). Результаты для узла $i=1,j=3$ приведены в табл. 1–3.

Таблица 1. Схема МПН ($\tau = 0.05$ с).

t	0	0.025	0.05	0.1	0.15	0.2
u_{13}	0	0.4109	0.8449	0.8739	0.9728	0.9887
t	0.25	0.5	1.0	...	10.0	
u_{13}	0.9996	0.9999	1.0	...	1.0	

Таблица 2. Схема МПН ($\tau = 1.0$ с).

t	0.0	0.05	1.0	2.0	3.0	4.0
u_{13}	0.0	0.9037	1.1379	1.0499	0.9647	0.8157
t	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
u_{13}	0.4729	-0.3857	-2.5870	-8.2708	-2.2986	-6.1133

Таблица 3. Схема МПНЭ ($\tau = 1.0$ с).

t	0.0	0.05	1.0	2.0	3.0	4.0
u_{13}	0.0	0.4921	0.6396	0.8102	0.921	0.9692
t	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
u_{13}	0.9882	0.9961	0.9986	0.9996	0.9997	0.9999

На границе квадрата со стороной 0.2 м принималось постоянное значение функции $u(x, y, t)$, равное 1, в момент времени $t = 0$ $\psi(x, y) = 0$, $k_{11} = k_{22} = 0.0005$, $k_{12} = k_{21} = 0.0003$, $h_1 = h_2 = 0.02/6$.

Как видно из этого примера, схема МПНЭ устойчива и при больших шагах счета по времени, в то время как классическая схема МПН выведена при этих шагах из условия устойчивости.

Список литературы

[1] Яненко Н. Н. *Метод дробных шагов решения задач математической физики.* Наука, Новосибирск, 1967.

[2] Яненко Н. Н. *Очерки. Статьи. Воспоминания.* Наука, Новосибирск, 1988.

[3] Самарский А. А. *Теория разностных схем.* Наука, М., 1983.

Поступила в редакцию 25 июня 1996 г.