

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА*

В. Э. Вильдеман, А. В. Зайцев

Пермский государственный технический университет, Россия

Предложен способ учета граничных условий третьего рода при численном решении квазистатических краевых задач механики деформирования и разрушения структурно-неоднородных сред методом конечных элементов. В рамках разработанной математической модели зернистого композита проведены исследования особенностей микро- и макроразрушения. Обнаружены зависимости предельных, соответствующих полной потере несущей способности, деформаций и повреждений материалов, а также характера процесса структурного разрушения от коэффициентов жесткости нагружающей системы, входящих в граничные условия. Повышение жесткости системы нагружения способствует стабилизации процесса накопления повреждений.

Исследуются основные закономерности квазистатических процессов деформирования, накопления повреждений и разрушения зернистых композитов. Обнаружен эффект роста предельных деформаций при увеличении коэффициентов жесткости нагружающей системы, входящих в граничные условия.

Экспериментально установлено, что сопротивление разрушению определяется не только прочностными постоянными материала, но и зависит от жесткости нагружающей системы, в которую входят нагружающее устройство (испытательная машина, передающие нагрузки силовые и кинематические элементы конструкций, рабочие жидкость и газ) и само деформируемое тело, окружающее область повреждения [1]. В инженерной практике, например, отмечено существенное отличие характера разрушения гидравлических и пневматических сосудов давления и трубопроводов. С точки зрения традиционных постановок краевых задач механики деформируемого твердого тела, указанные случаи эквивалентны.

Граничные условия, не учитывающие изменений внешних нагрузок, связанных с изменением конфигурации тела в процессе деформирования, не вполне соответствуют реальным условиям работы элементов конструкций и производимых испытаний [2, 3]. С этой точки зрения для более адекватного описания процессов деформирования, накопления повреждений и разрушения целесообразным является использование граничных условий третьего рода, позволяющих расширить физическую базу имеющихся моделей механики структурно-неоднородных сред, уточнить прочностные оценки, определить резервы несущей способности и прогнозировать катастрофичность разрушения конструкций.

*© В. Э. Вильдеман, А. В. Зайцев, 1996

1. Граничные условия

Рассмотрим деформируемое твердое тело Ω с ограничивающей поверхностью Γ . В работе [4] сформулированы граничные условия третьего рода с учетом коэффициентов жесткости $R_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = -\partial S_i / \partial u_j$ или податливости $Q_{ij}(\mathbf{S}, \mathbf{r}) = -\partial u_i / \partial S_j$ нагружающего устройства:

$$[\sigma_{ij}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{r}) + R_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{r})u_j(\mathbf{r})] \Big|_{\Gamma_S} = S_i^0(\mathbf{r}), \quad (1.1)$$

если на части Γ_S поверхности Γ задан по программе нагружения вектор внешних сил $S^0(\mathbf{r})$ и

$$[u_i(\mathbf{r}) + Q_{ij}(\mathbf{S}, \mathbf{r})\sigma_{jk}(\mathbf{r})n_k(\mathbf{r})] \Big|_{\Gamma_U} = u_i^0(\mathbf{r}), \quad (1.2)$$

если на части $\Gamma_U = \Gamma \setminus \Gamma_S$ задан по программе деформирования вектор перемещений $\mathbf{u}^0(\mathbf{r})$. Здесь \mathbf{u} — вектор реальных перемещений точек на границе с нормалью $\mathbf{n}(\mathbf{r})$; $\sigma(\mathbf{r})$ — тензор напряжений. Симметричные положительно определенные тензоры второго ранга \mathbf{R} и \mathbf{Q} , удовлетворяют условиям

$$\forall a_i : R_{ij}a_i a_j \geq 0, \quad Q_{ij}a_i a_j \geq 0, \quad R_{ik}Q_{kj} = \delta_{ij}, \quad (1.3)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Номинально задаваемые усилия и перемещения связаны соотношениями

$$S_i^0(\mathbf{r}) = R_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{r})u_j^0(\mathbf{r}), \quad u_i^0(\mathbf{r}) = Q_{ij}(\mathbf{S}, \mathbf{r})S_j^0(\mathbf{r}), \quad (1.4)$$

а из (1.3) следует взаимная обратность уравнений (1.1) и (1.2).

При $R_{ij} = 0$ или $Q_{ij} = 0$ предложенные граничные условия соответствуют предельно “мягкому” или предельно “жесткому” режимам нагружения, а по форме совпадают с классическими граничными условиями механики деформируемого твердого тела. В первом случае к неоднородному телу прикладываются не зависящие от его деформации усилия. Во втором — вне зависимости от сопротивления тела задаются перемещения на границе.

Обратим внимание на особенности учета граничных условий при решении краевых задач методом конечных элементов. Проведем дискретизацию тела Ω на N подобластей $\Omega^e \subset \Omega$, связанных между собой конечным числом расположенных на поверхностях Γ^e узловых точек. Величины, относящиеся к конечному элементу, будем обозначать верхним индексом e . Составляющие вектора свободных членов узлового ансамбля $\{f\}$, соответствующие номинально заданной распределенной на участке Γ_S поверхностной нагрузке \mathbf{S}^0 , представим следующим образом:

$$\{f^{(e)}\}_p = \int_{\Gamma_S^e \subset \Gamma_S} [N^{(e)}]^T \{S^0\} d\Gamma - \int_{\Gamma_S^e \subset \Gamma_S} [N^{(e)}]^T [R][N^{(e)}] d\Gamma \{\delta^{(e)}\}, \quad (1.5)$$

здесь $[N^{(e)}]$ — матрица базисных функций, $\{\delta^{(e)}\}$ — вектор обобщенных степеней свободы конечного элемента, $[R]$ — симметричная матрица характеристик системы нагружения, определенная в каждой узловой точке поверхности тела. Из условий (1.3) и (1.4) следует, что выражение (1.5) может быть записано в эквивалентной форме

$$\{f^{(e)}\}_p = \int_{\Gamma_U^e \subset \Gamma_U} [N^{(e)}]^T [R]\{u^0\} d\Gamma - \int_{\Gamma_U^e \subset \Gamma_U} [N^{(e)}]^T [R][N^{(e)}] d\Gamma \{\delta^{(e)}\} \quad (1.6)$$

в случае необходимости учета на части Γ_U границы тела программно задаваемого распределения перемещений \mathbf{u}^0 .

Не нарушая общности рассуждений, представим интегралы во вторых слагаемых уравнений (1.5) и (1.6) в виде симметричной матрицы $[\tilde{R}^{(e)}]$, которую в дальнейшем будем называть локальной матрицей жесткости нагружающей системы. Необходимо заметить, что размерность этой матрицы совпадает с размерностью матрицы жесткости конечного элемента $[K^{(e)}]$.

Сгруппируем в левой части системы уравнений метода конечных элементов слагаемые, содержащие обобщенные узловые степени свободы $\{U\}$ дискретизованного тела:

$$[\tilde{K}] \{U\} = ([K] + [K']) \{U\} = \{f\}. \quad (1.7)$$

При конгруэнтных преобразованиях

$$[K] = \sum_{i=1}^N [L_i^{(e)}]^T [K_i^{(e)}] [L_i^{(e)}], \quad [K'] = \sum_{i=1}^N [L_i^{(e)}]^T [\tilde{R}_i^{(e)}] [L_i^{(e)}],$$

где $[L_i^{(e)}]$ — матрица инцидентности, на этапе построения ансамбля уравнений сохраняется симметричность $[K_i^{(e)}]$ и $[\tilde{R}_i^{(e)}]$. Поэтому обобщенная матрица узлового ансамбля $[\tilde{K}]$ с удовлетворенными граничными условиями также симметрична относительно главной диагонали.

В случае предельно “мягкого” нагружения матрица $[K']$ вырождается в нулевую, а система уравнений (1.7) принимает традиционный вид. Если заданные перемещения точек границы тела обеспечиваются независимо от сопротивления, то $[\tilde{K}]$ является матрицей узлового ансамбля с удовлетворенными методом подавления кинематическими граничными условиями. Очевидно, что система (1.7) однозначно разрешима, если обобщенная матрица жесткости дискретизованного тела положительно определена.

2. Структурно-феноменологическая модель деформирования и разрушения неоднородных тел

Исследование деформирования и накопления повреждений неоднородного тела будем осуществлять при помощи двухуровневой структурно-феноменологической модели. Гетерогенный материал содержит в себе множество прочно соединенных по границе раздела, не изменяющих геометрию и взаимное расположение однородных элементов структуры с различными механическими свойствами. Процесс накопления повреждений сводится к последовательному выходу из строя этих элементов. Предполагается дискретный характер разрушения, и в расчет принимаются усредненные по структурным элементам напряжения, а не коэффициенты интенсивности напряжений.

На основе предложенного подхода механическое поведение структурно-неоднородного тела с изотропными компонентами, сохраняющими тип упругой симметрии в процессе деформирования и накопления повреждений, описывается при квазистатическом нагружении краевой задачей [4]

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0, \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = 1/2 [u_{i,j}(\mathbf{r}) + u_{j,i}(\mathbf{r})], \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = [3K(\mathbf{r})(1 - \kappa)V_{ijmn} + 2G(\mathbf{r})(1 - g)D_{ijmn}] \varepsilon_{mn}(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

совместно граничными условиями (1.1) или (1.2). Здесь $\varepsilon(\mathbf{r})$ — тензор деформаций; \mathbf{V} , \mathbf{D} — шаровая часть и девиатор единичного тензора четвертого ранга. Упругие модули объемного сжатия $K(\mathbf{r})$ и сдвига $G(\mathbf{r})$, а также коэффициенты независимых материальных функций κ и g описывают изменение деформационных свойств материала при объеме- и формоизменении соответственно, являются кусочно-постоянными быстро осциллирующими функциями координат \mathbf{r} .

Тензорно-линейные определяющие соотношения (2.2) содержат материальные функции κ и g , зависящие только от двух инвариантов тензора деформаций [5]

$$j_{\varepsilon}^{(1)} = \varepsilon_{kk}, \quad j_{\varepsilon}^{(2)} = [\check{\varepsilon}_{ij}\check{\varepsilon}_{ij}]^{1/2}, \quad \check{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.3)$$

или напряжений

$$j_{\sigma}^{(1)} = 1/3\sigma_{kk}, \quad j_{\sigma}^{(2)} = [\check{\sigma}_{ij}\check{\sigma}_{ij}]^{1/2}, \quad \check{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3\sigma_{kk}\delta_{ij}. \quad (2.4)$$

Полному (макроскопическому) разрушению неоднородных тел предшествует сложный процесс потери несущей способности отдельных элементов структуры. Каждый акт структурного разрушения сопровождается перераспределением напряжений, приводящим к продолжению либо прекращению разрушения при заданном уровне внешней нагрузки. Следствием указанного процесса является нелинейный характер зависимости между напряжениями и деформациями материала даже в случае линейно упругих компонентов. Построение структурно-феноменологических моделей неупругого деформирования и разрушения выдвигает в качестве основных вопросы выбора критериев прочности элементов среды, а также описания их деформационных и прочностных свойств после выполнения тех или иных условий разрушения [6]. Важное значение при этом имеет тот факт, что структурный элемент может быть разрушен по различным сценариям [7].

Пусть $j_{\varepsilon \text{lim}}^{(2)}(\mathbf{r})$ — деформации, соответствующие пределу прочности при формоизменении. В зависимости от вида напряженно-деформированного состояния реализуются различные повреждения от сдвига при выполнении условия $j_{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{r}) \geq j_{\varepsilon \text{lim}}^{(2)}(\mathbf{r})$: полное разрушение элемента структуры в области положительных значений первого инварианта тензора деформаций $j_{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{r}) > 0$ и сохранение способности сопротивляться только гидростатическому сжатию в случае $j_{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{r}) \leq 0$. Скачкообразное изменение деформационных постоянных при нарушении указанных предельных условий в форме неравенств описывается материальными функциями вида

$$g(j_{\varepsilon}^{(2)}) = \begin{cases} 0, & j_{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{r}) < j_{\varepsilon \text{lim}}^{(2)}(\mathbf{r}) \\ 1, & j_{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{r}) \geq j_{\varepsilon \text{lim}}^{(2)}(\mathbf{r}), \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\kappa(j_{\varepsilon}^{(1)}, j_{\varepsilon}^{(2)}) = \begin{cases} 0, & (j_{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{r}) < j_{\varepsilon \text{lim}}^{(2)}(\mathbf{r})) \vee (j_{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{r}) \geq j_{\varepsilon \text{lim}}^{(2)}(\mathbf{r}) \wedge j_{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{r}) \leq 0) \\ 1, & j_{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{r}) \geq j_{\varepsilon \text{lim}}^{(2)}(\mathbf{r}) \wedge j_{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{r}) > 0. \end{cases}$$

Напряженно-деформированное состояние тела, обладающего свойствами макроскопической однородности и изотропности, характеризуется на макроуровне тензорами макронапряжений σ^* и макродеформаций ε^* , которые определяются путем усреднения по представительному объему Ω :

$$\sigma_{ij}^* = 1/\Omega \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{r}) d\Omega, \quad \varepsilon_{ij}^* = 1/\Omega \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) d\Omega,$$

В дальнейшем все величины, относящиеся к уровню представительного объема среды — макроуровню, будем помечать звездочкой.

Сопrotивление структурно-неоднородного тела деформированию определяет связь макронапряжений и макродеформаций:

$$\sigma_{ij}^* = \mathcal{F}_{ij}^* [a_{kl}^*, \varepsilon_{kl}^*],$$

где \mathcal{F}_{ij}^* — симметричный оператор, a_{kl}^* — материальные функции. Для установления этой связи необходимо решение сформулированной краевой задачи для представительного объема среды при граничных условиях

$$[s_{ij}n_j(\mathbf{r}) + R_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{r})u_j(\mathbf{r})] \Big|_{\Gamma_S} = S_i^0(\mathbf{r}) \quad (2.6)$$

или

$$[e_{ij}r_j(\mathbf{r}) + Q_{ij}(\mathbf{S}, \mathbf{r})\sigma_{jk}(\mathbf{r})n_k(\mathbf{r})] \Big|_{\Gamma_U} = u_i^0(\mathbf{r}). \quad (2.7)$$

Вид функций $S_i^0(\mathbf{r})$ и $u_i^0(\mathbf{r})$, обеспечивающих реализацию макронапряжений $\sigma_{ij}^* = s_{ij}$ или макродеформаций $\varepsilon_{ij}^* = e_{ij}$, должен быть задан, но может быть заранее не известен. В этом случае необходима организация специальных итерационных процедур корректировки $S_i^0(\mathbf{r})$ и $u_i^0(\mathbf{r})$. Определив из решения краевой задачи в n -м приближении усилия $S_i^{(n)}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{r})$ и перемещения $u_i^{(n)}(\mathbf{r})$ граничных точек области Ω при заданных значениях $S_i^{0(n)}(\mathbf{r})$ или $u_i^{0(n)}(\mathbf{r})$, можно вычислить характеристики жесткости $H_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})$ и податливости $P_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})$ деформируемой системы, связывающие между собой усилия и перемещения любой точки на границе тела:

$$S_i^{(n)}(\mathbf{r}) = H_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})u_j^{(n)}(\mathbf{r}), \quad u_i^{(n)}(\mathbf{r}) = P_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})S_j^{(n)}(\mathbf{r}), \quad H_{ik}^{(n)}(\mathbf{r})P_{kj}^{(n)}(\mathbf{r}) = \delta_{ij}.$$

В общем случае, указанная операция нахождения $H_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})$ и $P_{ij}^{(n)}(\mathbf{r})$ связана с рассмотрением последовательности краевых задач при различных $S_i^{0(n)}(\mathbf{r})$ и $u_i^{0(n)}(\mathbf{r})$. Очередное приближение вычисляется при значениях

$$S_i^{0(n+1)}(\mathbf{r}) = [\delta_{ik} + R_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{r})P_{jk}^{(n)}(\mathbf{r})] s_{kl}n_l(\mathbf{r}),$$

$$u_i^{0(n+1)}(\mathbf{r}) = [\delta_{ik} + Q_{ij}(\mathbf{S}, \mathbf{r})H_{jk}^{(n)}(\mathbf{r})] e_{kl}r_l.$$

Итерационная процедура по S_i^0 или u_i^0 продолжается до тех пор, пока во всех граничных точках области не будут выполняться условия

$$\max |S_i^{0(n+1)} - S_i^{0(n)}| < \delta \quad \text{или} \quad \max |u_i^{0(n+1)} - u_i^{0(n)}| < \delta.$$

В результате последовательных приближений определяются функции $S_i^0(\mathbf{r})$ и $u_i^0(\mathbf{r})$, обеспечивающие с допустимой погрешностью δ в объеме Ω заданное макрооднородное напряженное или деформированное состояние.

3. Микро- и макроразрушение при различной жесткости системы нагружения

В качестве иллюстрации рассмотрим результаты решения краевой задачи (2.1), (2.2) с граничными условиями (2.6) для представительного объема модельного зернистого композита, заполняющего кубическую область и содержащего 6000 тетраэдральных упруго-хрупких элементов структуры. Случайные прочностные постоянные $j_{\varepsilon \text{ lim}}^{(2)}(\mathbf{r})$ описываются распределением Вейбулла

$$F\left(j_{\varepsilon \text{ lim}}^{(2)}(\mathbf{r})\right) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{j_{\varepsilon \text{ lim}}^{(2)}(\mathbf{r}) - j_{\varepsilon 0}^{(2)}(\mathbf{r})}{a}\right)^b\right],$$

$$a = k_v \langle j_{\varepsilon \text{ lim}}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle [C_2 - C_1^2]^{-1/2}, \quad j_{\varepsilon 0}^{(2)}(\mathbf{r}) = \langle j_{\varepsilon \text{ lim}}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle \left[1 - C_1 k_v (C_2 - C_1^2)^{-1/2}\right],$$

$$C_1 = \Gamma(1 + 1/b), \quad C_2 = \Gamma(1 + 2/b)$$

с параметрами $\langle j_{\sigma \text{ lim}}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle = 200$ МПа, $k_v = 0,3$, $b = 3$, а деформационные характеристики $E(\mathbf{r}) = 10^5$ МПа, $\nu(\mathbf{r}) = 0,25$ структурных элементов предполагаются детерминированными. Здесь $\langle j_{\varepsilon \text{ lim}}^{(2)}(\mathbf{r}) \rangle$ — среднее значение, k_v — коэффициент вариации, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Моделирование процессов деформирования и накопления повреждений проводится путем пропорционального изменения значений компонент тензора макронапряжений. На каждом шаге проверяются условия прочности. В случае невыполнения последних корректируются деформационные постоянные элементов структуры в соответствии с соотношениями (2.2) и (2.5). В результате решения последовательности линейных краевых задач построены диаграммы деформирования зернистого композита вплоть до момента полной потери несущей способности.

Под макроскопическим разрушением структурно-неоднородного тела будем понимать отсутствие в математическом смысле решения краевой задачи — невозможность сопротивления тела приложенной системе внешних нагрузок. Это прежде всего связано с нарушением положительной определенности обобщенной матрицы узлового ансамбля, свидетельствующем о физической неустойчивости материала при заданном сочетании нагрузки, прочностных и деформационных свойств.

На рис. 1, а представлены расчетные диаграммы $\sigma_{33}^* \sim \varepsilon_{33}^*$ одноосного деформирования зернистого композита ($\sigma_{33}^* > 0$, $\varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{22}^* = 0$). Соответствующие кривые $P \sim \varepsilon_{33}^*$ накопления повреждений, вычисляемых как объемная доля не сопротивляющихся формоизменению элементов структуры, показаны на рис. 1, б. В точках максимума A_i диаграмм деформирования поврежденность неоднородного тела составляет 8,1%. Предельные, соответствующие макроразрушению материала состояния отмечены на рис. 1, а точками B_i . Система нагружения принимается абсолютно “жесткой” в направлениях 1, 2 и имеющей конечную жесткость в направлении 3. Для математической простоты и наглядности предполагается равномерность распределения коэффициентов жесткости нагружающей системы по всем узловым точкам поверхности дискретизованного тела. В этом случае локальная матрица $[\tilde{R}^{(e)}]$ содержит ненулевые элементы только на главной диагонали.

В режиме пропорционального “мягкого” нагружения (имеется в виду относительно малая жесткость нагружающей системы в сопоставлении с жесткостью исследуемого мате-

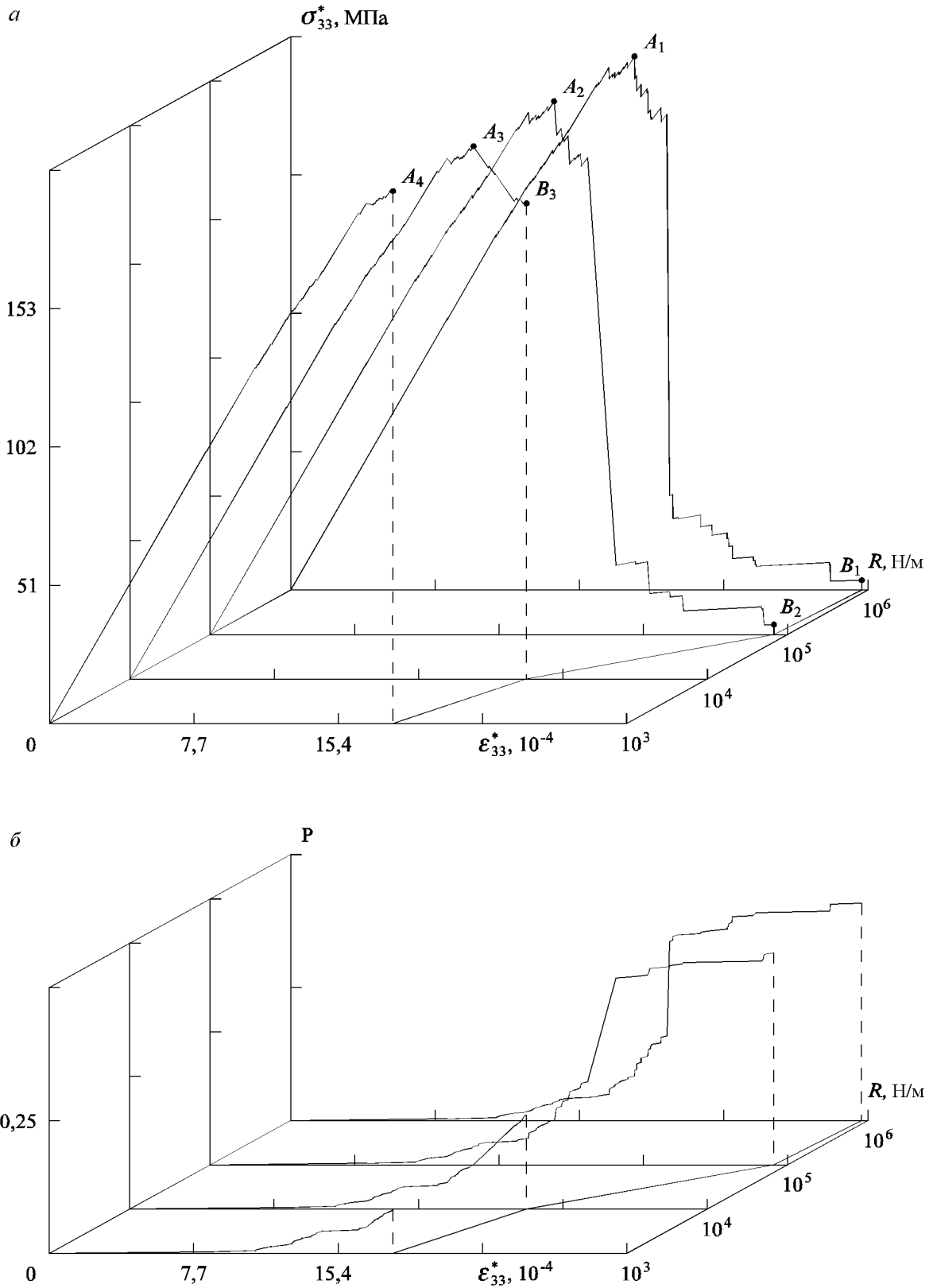


Рис. 1. Диаграммы одноосного деформирования ($\sigma_{33}^* > 0, \epsilon_{11}^* = \epsilon_{22}^* = 0$) зернистого композита (a) и кривые накопления повреждений (б), полученные на системах нагружения с различной жесткостью.

риала) достижение максимальной несущей способности приводит к неравновесному развитию повреждений и последующему макроразрушению зернистого композита. Например, диаграмма деформирования, построенная при численном моделировании испытания на системе нагружения с жесткостью $R = 10^3$ Н/м обрывается в наивысшей точке A_4 при напряжении $\sigma_{33}^* = 200$ МПа и деформации $\varepsilon_{33}^* = 1,8 \cdot 10^{-3}$. Это прежде всего связано с резкой локализацией разрушения, накоплением упругой энергии деформирования нагружающей системой и ее последующим преобразованием в кинетическую энергию при макроразрушении неоднородного тела.

На участке упрочнения, соответствующем упругому деформированию неповрежденного материала и начальному этапу структурного разрушения, величина коэффициентов жесткости, входящих в граничные условия (2.6), практически не оказывает влияния на механическое поведение неоднородного тела. При достаточной жесткости нагружающей системы, начиная с некоторого критического уровня деформаций, наблюдается разупрочнение композита (появление ниспадающей ветви на диаграмме деформирования). В результате проведенного вычислительного эксперимента при $R = 10^4$ Н/м удалось зарегистрировать равновесные состояния материала на участке A_3B_3 . Лавинообразное накопление повреждений и макроразрушение композита произошло лишь при напряжении $\sigma_{33}^* = 175$ МПа, величина которого на 12,5% меньше предела прочности, предельной деформации $\varepsilon_{33}^* = 2,1 \cdot 10^{-3}$ и степени повреждения — 17,0%. Возможность регистрации равновесных состояний разупрочняющегося материала доказана в работах [3, 8] на основе теорем Адамара и Ван Хофа, дающих локальные необходимые и достаточные условия устойчивости.

Система нагружения с жесткостью $R = 10^5$ Н/м в большей степени стабилизирует процесс накопления повреждений, продолжающийся в равновесном режиме до деформаций $2,6 \cdot 10^{-3}$ и доли повреждений 39,8%. Диаграмма, построенная при $R = 10^6$ Н/м, не отличается от кривой, регистрируемой в режиме абсолютно “жесткого” нагружения. Макроскопическое разрушение ослабленного повреждениями композита происходит при практически нулевых напряжениях σ_{33}^* . Величина предельной деформации составляет $2,7 \cdot 10^{-3}$, а степень поврежденности среды в момент потери несущей способности — 40,8%.

Таким образом, использование граничных условий третьего рода при математическом моделировании процессов деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел позволяет обнаружить известный ранее из опытов на стальных образцах [9–11] эффект зависимости предельных деформаций от жесткости системы нагружения.

Список литературы

- [1] ФРИДМАН Я. Б. Оценка опасности разрушения машиностроительных материалов. В “Теор. основы конструирования машин”. Машгиз, М., 1957, 257–281.
- [2] ВОЛКОВ С. Д. Проблема прочности и механика разрушения. *Пробл. прочности*, №7, 1978, 3–10.
- [3] РЫЖАК Е. И. К вопросу об осуществимости однородного закритического деформирования при испытании в жесткой трехосной машине. *Изв. АН СССР. МТТ*, №1, 1991, 111–127.

- [4] Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Краевая задача механики деформирования и разрушения поврежденных тел с зонами разупрочнения. *ПМТФ*, №6, 1995, 122–132.
- [5] ПОВЕДРЯ Б. Е. *Механика композиционных материалов*. Изд-во Моск. ун-та, М., 1984.
- [6] Вильдеман В. Э. О построении определяющих соотношений структурно-феноменологической механики композитов. В *“Механика микронеоднородных сред”*. Свердловск, 1988, 77–80.
- [7] КОШУР В. Д., НЕМИРОВСКИЙ Ю. В. *Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций*. Наука, Новосибирск, 1990.
- [8] РЫЖАК Е. И. Об устойчивом закритическом деформировании в нежесткой трехосной испытательной машине. *Докл. АН*, **330**, №2, 1993, 197–199.
- [9] САВИЦКИЙ Ф. С., ВАНДЫШЕВ Б. А. Жесткость испытательных машин и ее влияние на спадающий участок диаграммы растяжения и изгиба. *Заводская лаборатория*, **22**, №6, 1956, 717–721.
- [10] ЗИЛОВА Т. К., ПЕТРУХИНА Н. И., ФРИДМАН Я. Б. О закономерностях кинетики деформации в зависимости от податливости нагружения. *Докл. АН СССР*, **124**, №6, 1959, 1236–1239.
- [11] ЛЕБЕДЕВ А. А., ЛАМАШЕВСКИЙ В. П., АЛФИМОВ П. Т. Исследование влияния жесткости испытательных машин на закономерности деформирования и разрушения структурно неоднородных материалов. *Пробл. прочности*, №7, 1982, 64–67.

Поступила в редакцию 11 августа 1996 г.