

## Структура и устойчивость ударной волны в газозвеси с двумя давлениями

И. А. БЕДАРЕВ<sup>1,2,\*</sup>, А. В. ФЕДОРОВ<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет, Россия

\*Контактный e-mail: bedarev@itam.nsc.ru

Исследовано движение ударных волн по смеси газа и мелких твердых частиц с учетом различия скоростей и наличия собственного давления фазы частиц. В качестве математической модели использованы уравнения типа Андерсона. Изучен вопрос о том, какие виды сильных разрывов существуют в дисперсной среде и при каких условиях они реализуются. Найдены решения в классе бегущих волн и исследована их устойчивость путем решения задачи Коши для нестационарных одномерных уравнений механики гетерогенной среды.

*Ключевые слова:* смесь газа и твердых частиц, давление фазы частиц, структура ударной волны, замороженные и дисперсионные ударные волны.

### Введение

Проблема физико-математического описания волновых процессов в смесях газов и мелких частиц/капель является актуальной. Действительно, при описании многих технологических процессов в различных отраслях промышленности законы механики гетерогенных сред (МГС) выступают определяющими уравнениями, в том числе при изучении течений реагентов через сыпучий катализатор с учетом/без учета химических реакций, высокоскоростных концентрированных суспензий в каналах различных установок и т. д. При моделировании подъема мелких частиц из неустойчивых отложений под воздействием взрывных и детонационных волн также используются методы МГС. Здесь для определения типов течения смесей необходимо принимать во внимание взаимопроницающее движение фаз и компонентов. Значительный интерес с точки зрения ослабления воздействия динамических явлений на окружающую среду представляет проблема о взаимодействии слоев пористого вещества, например ячеисто-пористой структуры, слоев частиц насыпной плотности с сильными разрывами. Поэтому важно выявить возможные конфигурации ударных волн и их устойчивость относительно тех или иных видов воздействия, так как исследователям необходима информация, какие виды сильных разрывов могут реализоваться в гетерогенной среде и при каких условиях они существуют. Кроме того, требует изучения проблема существования стационарных решений при рассмотрении задач о структуре сильных разрывов в нестационарной постановке.

В настоящей работе исследован вопрос о том, какие виды сильных разрывов существуют в дисперсной среде с двумя давлениями и скоростями и при каких условиях в одномерном нестационарном течении смеси газа и твердых частиц они реализуются. Для решения этой задачи построены схемы высокого порядка точности для аппроксимаций по времени и пространству соответствующих уравнений механики гетерогенных сред.

## 1. Физико-математическая модель двухфазного течения

### 1.1. Основные уравнения

Рассмотрим смесь газа и твердых частиц, заполняющих одномерный континуум. Математическая модель описывает взаимопроникающее течение двух непрерывно взаимодействующих газов, параметры каждого из которых (скорость, плотность и давление) усреднены по объему. Первой будем называть непрерывную фазу смеси, т. е. газ, характеризующийся собственной скоростью, давлением и объемной концентрацией. Вторая фаза (дисперсная фаза частиц) имеет свое хаотическое давление, возникающее как передача импульса частицами в результате их хаотического движения в газе, свою скорость и объемную концентрацию, отличные от параметров газа. В экспериментах по измерению хаотического давления частиц, например в [1], давление фазы частиц измерялось как импульс, передаваемый частицами мембране датчика, усредненный по времени столкновения, в результате чего было предложено некоторое уравнение состояния.

Уравнения двухфазной среды в изотермическом случае с учетом хаотического давления, включающие в себя уравнения сохранения массы и импульса, записанные для каждой фазы и дополненные уравнениями состояния, в векторной форме имеют вид модели Андерсона:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial x} = \mathbf{F}_i, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \\ \rho_i u_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 u_1 \\ \rho_1 u_1^2 + m_1 p_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \rho_2 u_2 \\ \rho_2 u_2^2 + m_2 p_1 + p_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \frac{\partial m_1}{\partial x} - f_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \frac{\partial m_2}{\partial x} - f_2 \end{pmatrix}.$$

Уравнения состояния в изотермическом случае возьмем для простоты в линейной форме для обеих фаз как частный случай предложенной в [2] модели:

$$p_i = a_i^2 \rho_i, \quad \rho_{22} \equiv \text{const}, \quad (2)$$

где  $\rho_i = \rho_{ii} m_i$ ,  $\rho_{ii}$ ,  $m_i$ ,  $u_i$ ,  $p_i$ ,  $a_i$  — средняя и истинная плотности, объемная концентрация, скорость, давление и скорость звука  $i$ -й фазы ( $i = 1, 2$ ). Индексом 1 обозначены параметры газа, 2 — фазы частиц;  $f_1$  — сила, действующая на частицы со стороны газа,  $f_2 = -f_1$  — сила, действующая на газ со стороны частиц. Далее будем считать, что  $a_1 < a_2$ , обратное неравенство может быть рассмотрено аналогично. Систему (1), (2) замкнем основным равенством механики гетерогенных сред

$$m_1 + m_2 = 1. \quad (3)$$

## 1.2. Определение силы взаимодействия между фазами

Для силового взаимодействия фаз имеем представление

$$f_1 = \frac{3}{8} \frac{m_2 \rho_{11}}{r} C_D (u_1 - u_2) |u_1 - u_2|. \quad (4)$$

Здесь  $C_D$  — коэффициент сопротивления сферической частицы. При стоксовом режиме обтекания коэффициент сопротивления равен  $C_D = \frac{24}{\text{Re}}$ , где  $\text{Re} = \frac{2r |u_1 - u_2| \rho_{11}}{\mu}$  — относительное число Рейнольдса,  $\mu$  — вязкость газа,  $r$  — радиус частицы. Выражение (4) при стоксовом режиме обтекания выглядит следующим образом:  $f_1 = \frac{(u_1 - u_2) \rho_2}{\tau_{st}}$ , где  $\tau_{st} = \frac{2}{9} \frac{\rho_{22} r^2}{\mu}$  — стоксово время релаксации скоростей. Отклонение от стоксова закона сопротивления учитывается стандартно, где поправочный коэффициент  $f_D$  отличен от единицы вследствие разреженности газа, особенно для частиц малых размеров, сжимаемости и инерционности. Уравнение, оценивающее эффект разреженности, имеет следующий вид:

$$f_D = \left( 1 + \frac{M}{\text{Re}} \left( 3.82 + 1.28 \exp \left[ -1.25 \frac{\text{Re}}{M} \right] \right) \right)^{-1}.$$

Здесь и далее в число Маха входит скорость относительного движения фаз  $M = \frac{|u_1 - u_2|}{a_1}$ . Поправка на инерционность аппроксимируется формулой Торобина — Говина:  $f_D = (1 + 0.15 \text{Re}^{0.687})$ . Коэффициент

$$f_D = 1 + \exp \left( -\frac{0.427}{M^{4.63}} - \frac{3.0}{\text{Re}^{0.88}} \right)$$

учитывает сжимаемость. Таким образом, при вводе вышеперечисленных поправок коэффициент сопротивления сферы имеет следующий вид [3]:

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \frac{(1 + 0.15 \text{Re}^{0.687}) \left( 1 + \exp \left[ -\frac{0.427}{M^{4.63}} - \frac{3.0}{\text{Re}^{0.88}} \right] \right)}{1 + \frac{M}{\text{Re}} \left( 3.82 + 1.28 \exp \left[ -1.25 \frac{\text{Re}}{M} \right] \right)}. \quad (5)$$

## 1.3. Уравнение состояния

Остановимся подробнее на описании уравнения состояния для фазы частиц. Работа [1] посвящена экспериментальному исследованию зависимости давления фазы частиц от плотности, здесь дается анализ некоторых аппроксимаций данной зависимости. Эксперименты проводились при таких параметрах смеси, как характерный размер частиц твердой фазы, отношение усредненных плотностей газа и фазы частиц, скорость несущего потока, число Рейнольдса. В [4] приведено уравнение состояния для фазы частиц на основе элементарных положений молекулярно-кинетической теории, которые отражают главные особенности описываемых явлений, такие как линейное поведение давления при малых концентрациях, значительное возрастание давления вблизи концентрации плотной упаковки частиц  $m_{2p}$ . В работе [2] решается задача о движении

смеси газа (жидкости) и частиц в поле тяжести. Было рассмотрено два вида уравнений состояния, в частности предложено два вида аппроксимаций экспериментальных зависимостей давления для фазы частиц:  $P_2 = C\varphi^3 \exp\left[\frac{r \cdot m_2}{m_{2p} - m_2}\right]$ , где  $m_{2p}$  — объемная концентрация фазы частиц, соответствующая насыпной плотности. Константы  $C$  и  $r$  берутся из соображений наилучшей аппроксимации. Другой вид такой зависимости:  $P_2 = C \frac{m_2^{k_1}}{(m_{2p} - m_2)^{k_2}}$ , где  $C$  — константа. Для степеней  $k_1$  и  $k_2$  предложено использовать следующие два варианта:  $(k_1 = 1, k_2 = 2)$  и  $(k_1 = 1, k_2 = 0)$ .

#### 1.4. Задача о структуре бегущей волны. Нормальный вид системы

На основе математической модели смеси с двумя давлениями рассмотрим задачу о структуре бегущей ударной волны (УВ) в приближении умеренной объемной концентрации фазы частиц, когда в уравнении сохранения импульса второй фазы можно пренебречь влиянием градиента давления газа. В этом случае уравнения (1) в системе координат, связанной с фронтом УВ, выглядят следующим образом:

$$\rho_i u_i = C_i, \quad C_1 \dot{u}_1 + \dot{p}_1 = -f_1, \quad C_2 \dot{u}_2 + \dot{p}_2 = f_1. \quad (6)$$

Решая систему (6) относительно производных, можно свести ее к нормальному виду:

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{-u_1 f_1}{\rho_1 (u_1^2 - a_1^2)}, \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{u_2 f_1}{\rho_2 (u_2^2 - a_2^2)}. \quad (7)$$

Эта система обладает стационарными точками. Когда скорости фаз равны между собой, сила взаимодействия фаз равна нулю. Кроме того, в точках, где скорости фаз равны соответствующим скоростям звука, ускорения фаз обращаются в бесконечность и возникает течение с обострением. Это предопределяет сложное поведение решения краевых задач для такой простой системы уравнений, как (7) [5, 6].

#### 1.5. Формулировка краевой задачи

Система уравнений (7) для вектора решения  $\Phi(u_1, u_2, \rho_1, \rho_2)$  должна удовлетворять следующим граничным условиям стационарности:

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi_0, \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty, \\ \Phi &\rightarrow \Phi_k, \quad \dot{\Phi} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, перед фронтом УВ и далеко за ним смесь находится в равновесии, когда скорости компонентов равны. Отметим, что точка обозначает дифференцирование по автомодельной переменной. В итоге задача о структуре УВ в газовой смеси с учетом собственного давления частиц свелась к решению краевой задачи (7), (8) в бесконечном интервале. Наша цель — определить возможные структуры этого перехода. Следуя [6], найдем некоторые характерные значения параметров течения смеси.

### 1.6. Скорости звука в смеси

Скорость звука для равновесной смеси, когда скорости фаз равны между собой, определяется как

$$C_e^2 = \frac{dP}{d\rho} = a_1^2 \xi_1 + a_2^2 \xi_2,$$

где  $P = p_1 + p_2 = C_e^2 \rho$  — давление для смеси в целом;  $\rho = \rho_1 + \rho_2$  — ее средняя плотность;  $\xi_i = \frac{C_i}{C_1 + C_2} = \text{const}$  — относительная массовая концентрация фазы.

### 1.7. Замороженные и равновесные состояния в смеси

Рассмотрим некоторые характерные типы течений фаз, которые наступают при изменении времен релаксации скоростей и концентраций компонентов двухфазной смеси.

1. Полностью замороженное течение ( $u_1 \neq u_2, p_1 \neq p_2$ ). Здесь можно определить  $a_i$  — скорость звука в  $i$ -м компоненте и  $\tilde{u}_i = a_i^2/u_0$  — скорость за фронтом замороженной УВ в соответствующей фазе.

2. Равновесное по скоростям течение смеси ( $u_1 = u_2$ ). Оно реализуется, если время выравнивания скоростей много меньше, чем характерные времена распространения волновых процессов в фазах смеси.

### 1.8. Закон сохранения импульса для смеси в целом

Рассмотрим движение смеси в пространстве скоростей фаз. Сложив уравнения сохранения импульса фаз в (6), получим закон сохранения импульса для смеси в целом, который имеет следующий вид [5, 6]:

$$\Phi(u_1, u_2) = \xi_1 \frac{(u_1 - u_0)(u_1 - \tilde{u}_1)}{u_1} + \xi_2 \frac{(u_2 - u_0)(u_2 - \tilde{u}_2)}{u_2} = 0. \quad (9)$$

Значки 0 и  $K$  будем использовать для обозначения начального и конечного равновесных состояний смеси. График данной зависимости представляет собой замкнутую кривую в плоскости  $(u_1, u_2)$  (рис. 1).

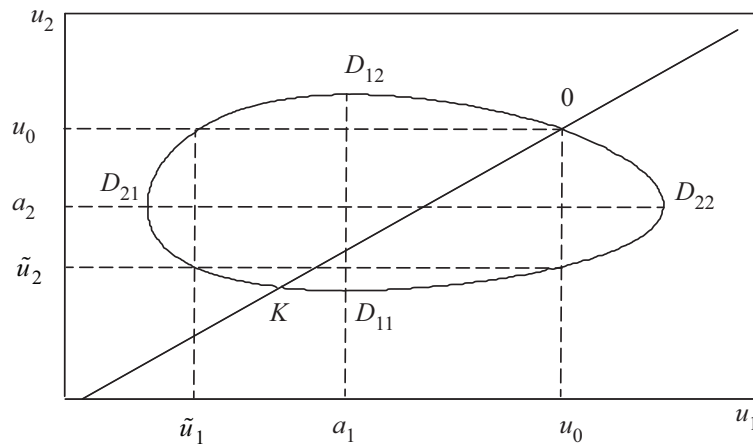


Рис. 1. Графическое представление закона сохранения импульса для смеси в целом в плоскости  $(u_1, u_2)$ . Равновесные значения 0,  $K$  лежат на линии равных скоростей;  $D$  — точки разворота

Найдем равновесные значения скоростей в смеси за фронтом УВ. Положим  $u_1 = u_2 = u$  в (9) и получим квадратное уравнение  $u^2 - u(u_0 + C_e^2/u_0) + C_e^2 = 0$ . Отсюда ясно, что равновесных состояний всего два,  $u_0$  и  $u_k$ , при этом  $u_k = C_e^2/u_0$ .

Фазовая кривая  $\Phi(u_1, u_2) = 0$  имеет четыре точки разворота ( $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$ ), в которых скорость одной из фаз равняется скорости звука в данной фазе ( $u_1 = a_1, u_2 = a_2$ ), а одна из производных  $\dot{u}_1$  и  $\dot{u}_2$  обращается в бесконечность.

Определим теперь возможные состояния за фронтом замороженной ударной волны. Из (9) видно, что при  $u_1 = u_0$  имеем  $u_2 = u_0$  или  $u_2 = \tilde{u}_2$ , а при  $u_2 = u_0$  находим  $u_1 = u_0$  или  $u_1 = \tilde{u}_1$ . Таким образом, за фронтом замороженной УВ могут реализоваться три состояния смеси  $(u_1, u_2)$ :  $(u_0, \tilde{u}_2)$ ,  $(\tilde{u}_1, u_0)$ ,  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ , т.е. наблюдается множественность состояний за фронтом замороженной УВ. Наша задача выбрать из них устойчивые. С этой целью необходимо дать качественный анализ сформулированной краевой задачи для системы (8), (9).

### 1.9. Зависимость типов течения от начальных параметров смеси

Оказалось, что в зависимости от начальных параметров смеси в течении могут реализовываться различные типы ударных волн: полностью дисперсионные, дисперсионно-замороженные, замороженные с одно- и двухфронтной структурой и др. При этом могут быть разрывы параметров в первой фазе и непрерывные течения во второй, и наоборот, как в голове волны, так и в ее хвосте.

В ходе работы по поиску возможных типов УВ использовался метод исследования, предложенный в [5, 6], основанный на рассмотрении неравновесных процессов на фазовой кривой  $\Phi(u_1, u_2) = 0$  в плоскости скоростей фаз смеси  $(u_1, u_2)$ .

При анализе устойчивости решений определим знаки собственных чисел уравнений для нахождения  $u_1, u_2$ , в точках равновесия

$$u_1 = u_2 = u \left( \lambda_i = \frac{d\dot{u}_i}{du_i} \right).$$

Из уравнения сохранения импульса найдем производную

$$\frac{du_2}{du_1} = -\frac{\xi_1 (u_1^2 - a_1^2) u_2^2}{\xi_2 (u_2^2 - a_2^2) u_1^2},$$

а потом и соответствующие собственные числа

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{1}{\tau_{st}\xi_1} \frac{u(u^2 - C_e^2)}{(u^2 - a_1^2)(u^2 - a_2^2)}. \quad (10)$$

Заметим, что знак собственного числа зависит от того, как равновесная скорость смеси в начальном или конечном состоянии соотносится со скоростями звука в обеих фазах и с равновесной скоростью звука. Это зависит также и от того, как конечная равновесная скорость смеси зависит от ее начальных параметров  $\xi_1$  и  $u_0$ . Учитывая, что конечная скорость смеси  $u_k = C_e^2/u_0 = (a_1^2\xi_1 + a_2^2(1 - \xi_1))/u_0$ , и налагая соответствующие условия на  $u_k$ , получим неравенства, которые дают следующие оценки.

### 1.10. Значения скорости за равновесной УВ

Если начальная скорость смеси больше минимальной скорости звука фаз, то выполняются следующие условия на значение скорости в конечной равновесной точке:

1. Если  $\xi_1 > \xi_{**}$ , то  $u_k < a_1 < a_2$ ; если  $\xi_1 = \xi_{**}$ , то  $u_k = a_1$ .
2. Если  $\xi < \xi_1 < \xi_{**}$ , то  $a_1 < u_k < c_e < a_2$ .
3. Если  $\xi < \xi_1 < \xi_*$ , то  $a_1 < c_e < u_k < a_2$ ; если  $\xi_1 = \xi_*$ , то  $u_k = a_2$ .
4. Если  $\xi_1 < \xi_*$ , то  $u_k > a_2 > c_e > a_1$ .

Здесь

$$\xi_{**} = \frac{a_2^2 - a_1 u_0}{a_2^2 - a_1^2}, \quad \tilde{\xi} = \frac{a_2^2 - u_0^2}{a_2^2 - a_1^2}, \quad \xi_* = \frac{a_2^2 - a_2 u_0}{a_2^2 - a_1^2}.$$

При фиксированных скоростях звука фаз критические массовые концентрации  $\tilde{\xi}$ ,  $\xi_*$ ,  $\xi_{**}$  являются функциями от  $u_0$  и разбивают плоскость  $(u_0, \xi_1)$  на несколько областей (рис. 2, 3). В каждой из них  $u_k$  удовлетворяет неравенствам  $u_k < a_1$ ,  $a_1 < u_k < C_e$ ,  $C_e < u_k < a_2$ ,  $a_2 < u_k$ .

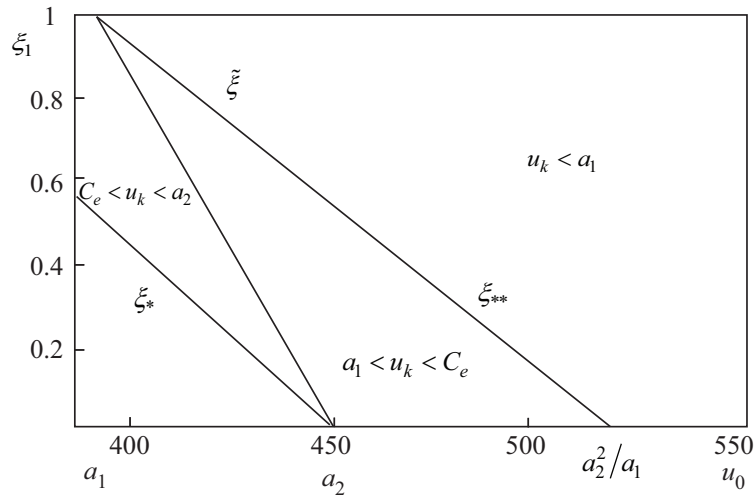


Рис. 2. Оценки конечной скорости смеси  $u_k$  в зависимости от ее начальной скорости и относительной массовой концентрации газовой фазы

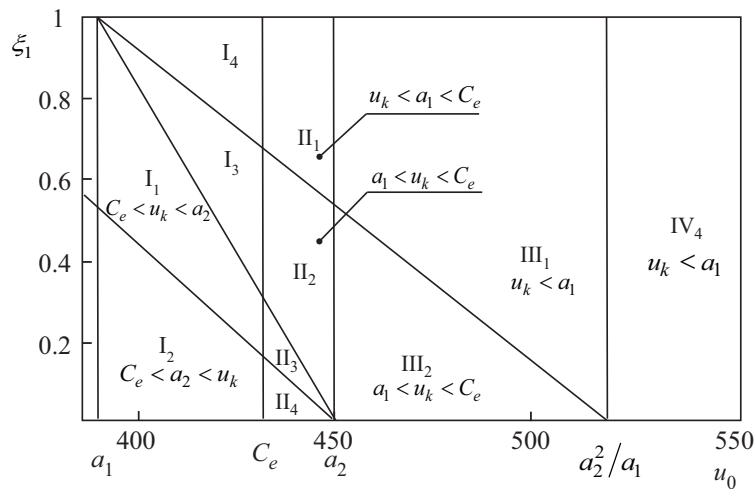


Рис. 3. Оценки конечной скорости смеси  $u_k$  в зависимости от ее начальной скорости и относительной массовой концентрации газовой фазы в областях  $I_j$

Заметим, что  $u_k u_0 = C_e^2$ , поэтому если  $u_k < C_e$ , то  $u_0 > C_e$ , и наоборот. Отсюда следует, что при начальных параметрах, принадлежащих областям  $I_3, I_4, II_3, II_4$ , равновесное состояние при  $x \rightarrow +\infty$  не реализуется.

Также следует отметить симметрию системы (6) относительно замены индексов  $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$ . Это сигнализирует о том, что случай обратного неравенства для скоростей звука ( $a_2 < a_1$ ) может быть рассмотрен аналогично. На основе зависимости собственных чисел от равновесных параметров течения (10), а также разбиения области начальных параметров (рис. 2 и 3) можно показать, что  $\lambda_0 < 0$  при  $(u_0, \xi_1) \in I_1, I_2, III_1, III_2, IV$ , а  $\lambda_0 > 0$  при  $(u_0, \xi_1) \in II_1, II_2$ . Аналогичное утверждение доказывается и для конечного состояния. При построении структур ударных волн воспользуемся следующими простыми соображениями.

При  $\lambda_0 < 0$  решение экспоненциально растет на  $x = -\infty$ , а при  $\lambda_k > 0$  растет на  $x = +\infty$ , что не имеет физической интерпретации. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо использовать разрывные решения. При  $\lambda_0 < 0$  вводится разрыв исходя из условий на замороженной ударной волне, а при  $\lambda_k > 0$ , когда скорость одной из фаз достигает конечной равновесной скорости, вводится разрыв в другой фазе, приводящий смесь в равновесное состояние. Некоторые соображения о получении ударных волн приведем ниже при анализе их типов. Итак, рассмотрим далее несколько примеров построения решения поставленной задачи о структуре УВ в газозвеси с собственным давлением частиц.

## 2. Численное решение задачи о структуре ударной волны

Получим решение задачи о структуре стационарных УВ. На первом этапе исследования аналогично [7, 8] возьмем стационарную УВ в качестве данных Коши и проведем расчет в рамках одномерного нестационарного течения. Полученные стационарные решения несут в себе инфинитезимальные ошибки численного расчета, которые можно трактовать как инфинитезимальные возмущения. Тем самым расчеты в нестационарном приближении такого решения могут доказать или опровергнуть устойчивость полученных структур. На втором этапе исследуем устойчивость ударных волн относительно взаимодействия с волнами разрежения.

Прежде всего, отметим, что краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7) аппроксимировалась с помощью решателя жестких систем уравнений RADAU5 [9], использующего неявный метод Рунге — Кутты пятого порядка с выбором шага.

С целью решения задачи Коши для системы нестационарных уравнений механики гетерогенной среды (1) с помощью разностных схем типа Рунге — Кутты получим схему произвольного порядка аппроксимации по времени.

Пусть  $y$  — одна из неизвестных функций  $\rho_i$  или  $(\rho u)_i$ , а  $Q_y(t)$  — соответствующие компоненты вектора  $\mathbf{Q}$  в уравнениях (1). Используя эти обозначения, уравнения (1) можно представить в виде  $\frac{dy}{dt} + Q_y(t) = 0$ .

Схема  $m$ -го порядка аппроксимации по времени типа Рунге — Кутты (или  $m$ -стадийная схема) будет иметь следующий вид:



$$\begin{aligned}
y^{(0)} &= y^n, \\
y^{(1)} &= y^{(0)} - \gamma_m \tau Q_y^{(0)}, \\
y^{(2)} &= y^{(0)} - \gamma_{m-1} \tau Q_y^{(1)}, \\
&\dots \\
y^{(m)} &= y^{(0)} - \gamma_1 \tau Q_y^{(m-1)}, \\
y^{n+1} &= y^{(m)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Значения параметров  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  выбираются из условий аппроксимации и максимальной устойчивости. В связи со значительными трудностями, возникающими при анализе этих условий для системы нелинейных дифференциальных уравнений, значения параметров  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$  вычисляются на основе анализа линейного уравнения переноса. Использовались следующие значения этих параметров в зависимости от количества стадий  $m$ :

- 1) для двухстадийной схемы ( $m = 2$ )  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2$ ;
- 2) для трехстадийной схемы ( $m = 3$ )  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1/2, \gamma_3 = 1/2$ ;
- 3) для четырехстадийной схемы ( $m = 4$ )  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 5/9, \gamma_3 = 4/15, \gamma_4 = 1/3$ ;
- 4) для пятистадийной схемы ( $m = 5$ )  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1/2, \gamma_3 = 3/8, \gamma_4 = 1/6, \gamma_5 = 1/4$ .

Обнаружено, что для данной задачи использование схем (2) позволяет существенно расширить их интервал устойчивости и проводить расчеты с большими значениями числа Куранта, причем увеличение интервала устойчивости носило нелинейный характер. Например, применение схемы 5-го порядка точности позволило увеличить число Куранта в 20 раз по сравнению со схемой 1-го порядка.

Для построения пространственной аппроксимации системы (1) с использованием TVD-подхода [10] необходимо расщепить вектор потоков  $\mathbf{Q}_i$  для каждой фазы. В дальнейшем индекс  $i$  опустим. Существует множество способов такого расщепления. В данном случае для получения устойчивой противопотоковой аппроксимации правых частей разностной схемы вектор потоков  $\mathbf{Q}$  разобьем на положительную и отрицательную составляющие:  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ + \mathbf{Q}^-$ . С этой целью будем использовать метод расщепления вектора потоков по физическим процессам [11].

В соответствии с этим методом разделим вектор потоков  $\mathbf{Q}$  на составляющие  $\mathbf{Q}^+$  и  $\mathbf{Q}^-$  в зависимости от знака скорости таким образом, чтобы давление аппроксимировалось по потоку, а все остальные переменные против потока:

$$\begin{aligned}
Q_\rho^+ &= \begin{cases} \rho u, & u > 0, \\ 0 & u \leq 0, \end{cases} & Q_\rho^- &= \begin{cases} \rho u, & u > 0, \\ 0 & u \leq 0, \end{cases} \\
Q_u^+ &= \begin{cases} \rho u^2, & u > 0, \\ p & u \leq 0, \end{cases} & Q_u^- &= \begin{cases} p, & u > 0, \\ \rho u^2 & u \leq 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{12}$$

Как известно [11], устойчивая схема первого порядка точности может быть построена при использовании “противопотоковой” (*upwind*) аппроксимации:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^+}{\partial x} \approx \frac{\mathbf{Q}_j^+ - \mathbf{Q}_{j-1}^+}{\Delta x}, \quad \frac{\partial \mathbf{Q}^-}{\partial x} \approx \frac{\mathbf{Q}_{j+1}^- - \mathbf{Q}_j^-}{\Delta x}.$$

Аппроксимацию повышенного порядка получим, если используем следующую формулу:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} \approx \frac{\mathbf{Q}_{j+1/2}^+ - \mathbf{Q}_{j-1/2}^+ + \mathbf{Q}_{j+1/2}^- - \mathbf{Q}_{j-1/2}^-}{\Delta x}. \tag{13}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{j+1/2}^- &= \mathbf{Q}_{j+1}^- - \frac{1}{4} [(1 - \kappa) \Delta^+ (\mathbf{Q}_{j+1}^-) + (1 + \kappa) \Delta^- (\mathbf{Q}_{j+1}^-)], \\ \mathbf{Q}_{j+1/2}^+ &= \mathbf{Q}_{j+1}^+ + \frac{1}{4} [(1 - \kappa) \Delta^- (\mathbf{Q}_{j+1}^+) + (1 + \kappa) \Delta^+ (\mathbf{Q}_{j+1}^+)], \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\Delta^+ (\mathbf{Q}_j) = \mathbf{Q}_{j+1} - \mathbf{Q}_j, \quad \Delta^- (\mathbf{Q}_j) = \mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_{j-1}.$$

Выражения для  $\mathbf{Q}_{j-1/2}^-$  и  $\mathbf{Q}_{j-1/2}^+$  получаются сдвигом индекса на единицу.

Формулы (13), (14) аппроксимируют пространственные производные с третьим ( $\kappa = 1/3$ ) или вторым ( $\kappa = -1, 0, 1$ ) порядком. При  $\kappa = -1$  аппроксимация сводится к полностью односторонним, при  $\kappa = 0$  — к центральным, а при  $\kappa = 1/3, 1$  — смещенным против потока разностям.

Для сохранения монотонности решения в областях больших градиентов порядок аппроксимации понижается применением к операторам  $\Delta^+$  и  $\Delta^-$  ограничителя *minmod* [10]:

$$\begin{aligned} \delta^+ &= \begin{cases} 0, & \text{sgn}\Delta^+ \text{sgn}\Delta^- \leq 0, \\ \min(|\Delta^+|, \Theta |\Delta^-|), & \text{sgn}\Delta^+ \text{sgn}\Delta^- \geq 0, \end{cases} \\ \delta^- &= \begin{cases} 0, & \text{sgn}\Delta^+ \text{sgn}\Delta^- \leq 0, \\ \min(|\Delta^-|, \Theta |\Delta^+|), & \text{sgn}\Delta^+ \text{sgn}\Delta^- \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

где параметр  $\Theta$  изменяется в пределах

$$1 \leq \Theta \leq \frac{3 - \kappa}{1 - \kappa}. \quad (16)$$

С учетом введения ограничителя формулы (14) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{j+1/2}^- &= \mathbf{Q}_{j+1}^- - \frac{\sigma}{4} [(1 - \kappa) \delta^+ + (1 + \kappa) \delta^-] (\mathbf{Q}_{j+1}^-), \\ \mathbf{Q}_{j+1/2}^+ &= \mathbf{Q}_{j+1}^+ + \frac{\sigma}{4} [(1 - \kappa) \delta^- + (1 + \kappa) \delta^+] (\mathbf{Q}_{j+1}^+). \end{aligned} \quad (17)$$

Используя предложенные по формулам (12) расщепления, можно построить аппроксимации производных (13)–(17) от потоковых компонентов уравнений (1), на численном решении которых будет проведен анализ разрешающих способностей схем.

### 3. Обсуждение результатов

*Стационарные решения.* Для иллюстрации высказанных положений о решении задачи (7), (8) приведем графики скоростей компонентов в соответствующих областях. На схемах справа показаны основные точки в плоскости скоростей фаз ( $u_1, u_2$ ). Параметры смеси, при которых проводился расчет профилей УВ, таковы:  $a_1 = 390$  м/с,  $a_2 = 450$  м/с,  $\rho_{22} = 7002$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_{11} = 1.2$  кг/м<sup>3</sup>,  $d = 10^{-6}$  м. Итак, рассмотрим течение смеси в виде следующих ударно-волновых конфигураций.

*Замороженная УВ.* В случае, когда конечная скорость лежит между скоростями звука фаз, а начальная скорость смеси больше обеих скоростей звука, реализуется замороженная УВ (область III<sub>2</sub>). Переход к конечному состоянию осуществляется следующим образом. Из условий на замороженной УВ находится состояние за фронтом

замороженной УВ во второй фазе. Течение в первой фазе непрерывно. Затем в зоне релаксации непрерывно осуществляется переход к равновесию смеси, которое достигается на  $x \rightarrow +\infty$  (рис. 4).

*Дисперсионно-звуковая УВ.* Рассмотрим решение задачи (7), (8) для границы областей  $I_1, I_2$ . Конечная скорость в этом случае равна скорости звука в первой фазе ( $u_k = a_1$ ). Она может быть получена при фиксированном значении начальной скорости и соответствующем выборе относительной массовой концентрации, например первой фазы  $\xi_1 = \xi_{**}$  (рис. 5). При этом отпадает необходимость введения хвостовой УВ в первой фазе, т. е. существует стационарное решение без опрокидывания в виде дисперсионной трансзвуковой по первой фазе УВ. Разрыв в точке  $K$ , которая сливается с  $K_1$ , терпит лишь производная скорости газа. Конечно, возникает вопрос об устойчивости такой волны относительно взаимодействия с волной разрежения, который будет решаться в рамках одномерного нестационарного подхода. Однако если поддерживать в хвосте волны граничное условие типа звуковой поршень по первой фазе, то это течение будет устойчивым.

*Полностью дисперсионная УВ.* В случае, если начальная скорость смеси лежит между скоростями звука фаз и конечная скорость смеси больше скорости звука в первой фазе и меньше, чем во второй, реализуется полностью дисперсионная УВ, так как на данной ветви фазовой кривой  $\Phi(u_1, u_2) = 0$  нет точек, где производные обращаются в бесконечность (область  $\Pi_2$ ). Решение асимптотически выходит из начального состояния, лежащего на минус бесконечности, и входит в конечное устойчивое состояние на плюс бесконечности (рис. 6).

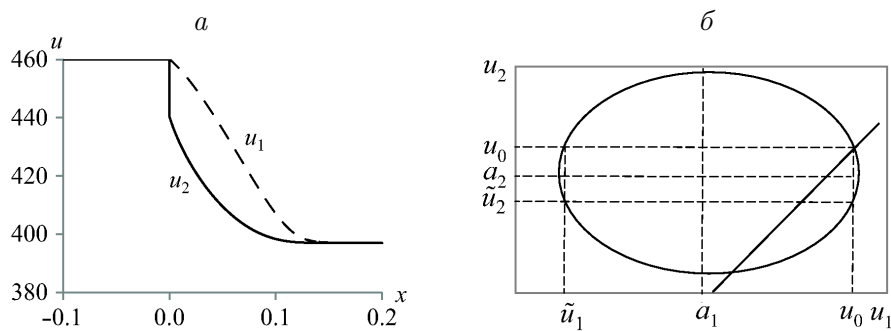


Рис. 4. Профили скоростей стационарной замороженной УВ (а) и ее схема в фазовом пространстве (б) для начальных параметров  $\xi_1 = 0.4, u_0 = 460$

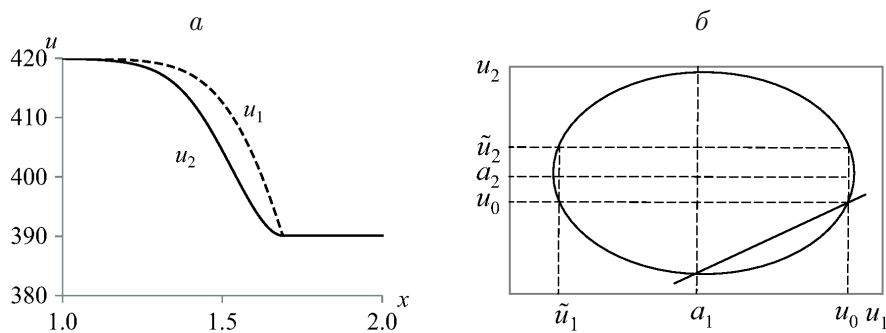


Рис. 5. Профили скоростей стационарной дисперсионно-звуковой УВ (а) и ее схема в фазовом пространстве (б) для начальных параметров  $\xi_1 = \xi_{**} = 0.77, u_0 = 420$

*Замороженная двухфронтная УВ.* В области  $\text{III}_1$  начальная скорость смеси больше скоростей звука обеих фаз. Для того чтобы решение не опрокидывалось в точке разворота, вводится разрыв во второй фазе в голове УВ исходя из условий на замороженной ударной волне в этой фазе. Течение в первой фазе непрерывное.

В случае, когда конечная скорость меньше скорости звука в газе, в хвосте зоны релаксации возникает скачок. Образуется замороженная двухфронтная УВ, которая приводит смесь из точки равновесия  $K_1$  по скорости первой фазы в точку равновесия по скоростям обеих фаз  $K$  (рис. 7).

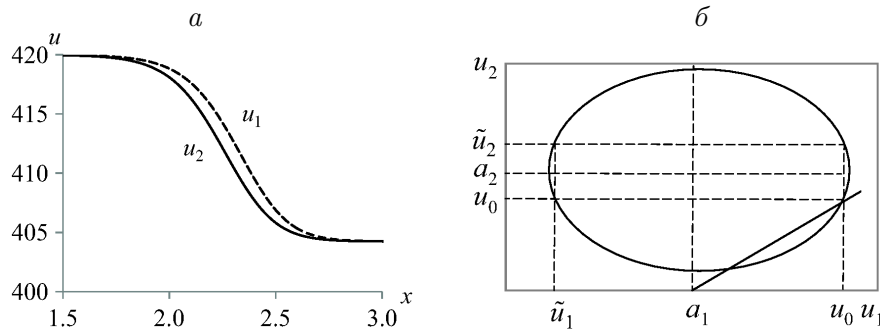


Рис. 6. Профили скоростей стационарной полностью дисперсионной УВ (а) и ее схема в фазовом пространстве (б) для начальных параметров  $\xi_1 = 0.65$ ,  $u_0 = 420$

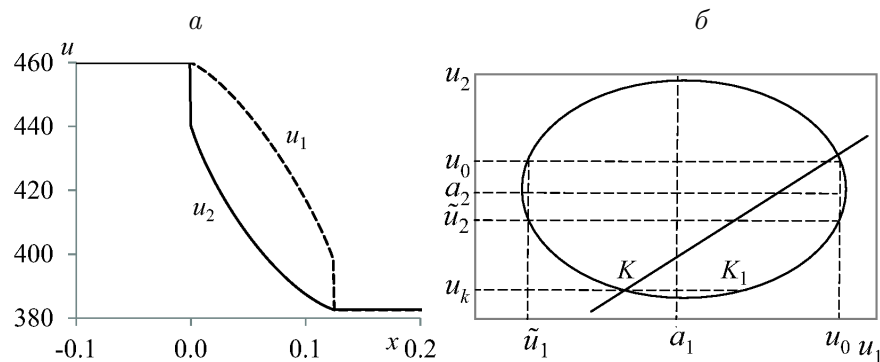


Рис. 7. Профили скоростей стационарной замороженной двухфронтной УВ (а) и ее схема в фазовом пространстве (б) для начальных параметров  $\xi_1 = 0.5$ ,  $u_0 = 460$

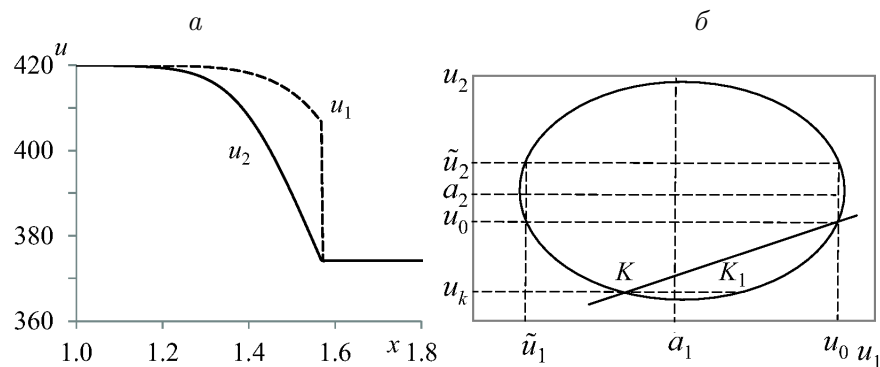


Рис. 8. Профили скоростей стационарной дисперсионно-замороженной УВ (а) и ее схема в фазовом пространстве (б) для начальных параметров  $\xi_1 = 0.9$ ,  $u_0 = 420$

*Дисперсионно-замороженная УВ.* В случае, когда начальная скорость смеси лежит в интервале между значениями скоростей звука в газе и фазе частиц  $a_1 < u_0 < a_2$ , а конечное состояние в обеих фазах дозвуковое, реализуется дисперсионно-замороженная УВ (непрерывное течение в голове волны для первой фазы, замороженный переход в хвосте для второй — рис. 8). На фазовой плоскости  $(u_1, u_2)$  процесс идет по нижней ветви. В точке 0 решение выходит из равновесия непрерывным образом в обеих фазах и приходит в точку  $K_1$ , где скорость в газе равна конечной скорости смеси. Если продолжить движение по этой ветке далее, то при достижении скоростью первой фазы скорости звука в течении возникнет градиентная катастрофа. Для преодоления этого обстоятельства вводится скачок в хвосте зоны релаксации в газовой фазе, посредством которого смесь приходит в конечное состояние  $K$ .

*Устойчивость некоторых решений.* Остановимся на проверке устойчивости некоторых решений при их поддержании соответствующим поршнем в рамках задачи Коши для нестационарных уравнений (1), реализованных с помощью численного метода (2)–(17). Необходимо отметить, что результаты далее представлены не в системе координат, связанной с фронтом УВ, а в лабораторной системе координат. Используем две постановки краевых условий на левой границе: “мягкие” граничные условия, когда градиент всех параметров на границе равен нулю, и условия непротекания на твердой стенке.

Первый тип граничных условий позволяет получить стационарное распространение всех полученных выше решений уравнений (7). Для примера на рис. 9 показано распространение замороженной УВ во времени. Представлены скорости первой (рис. 9, а) и второй (рис. 9, б) фаз. Волна распространяется слева направо. Видно, что волновые конфигурации для скоростей обеих фаз сохраняют стационарность при своем движении. Этот факт подтверждается также на рис. 10, а, где сравнивается начальное распределение скоростей, полученное из стационарной задачи (сплошные линии), и нестационарное решение на момент времени, соответствующий последнему профилю скоростей на рис. 10 (кружки). Видно, что эти два решения накладываются друг на друга.

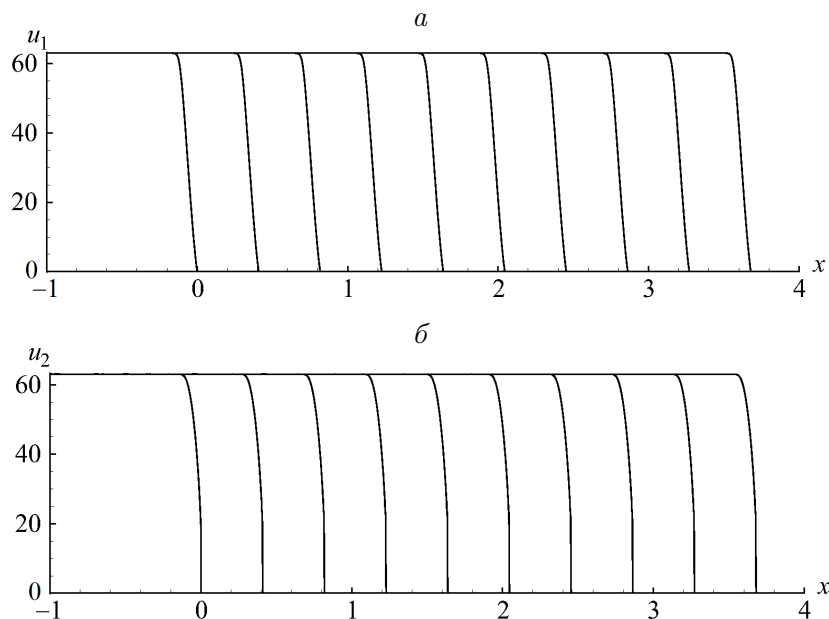


Рис. 9. Профили скоростей фаз в различные моменты времени для замороженной УВ

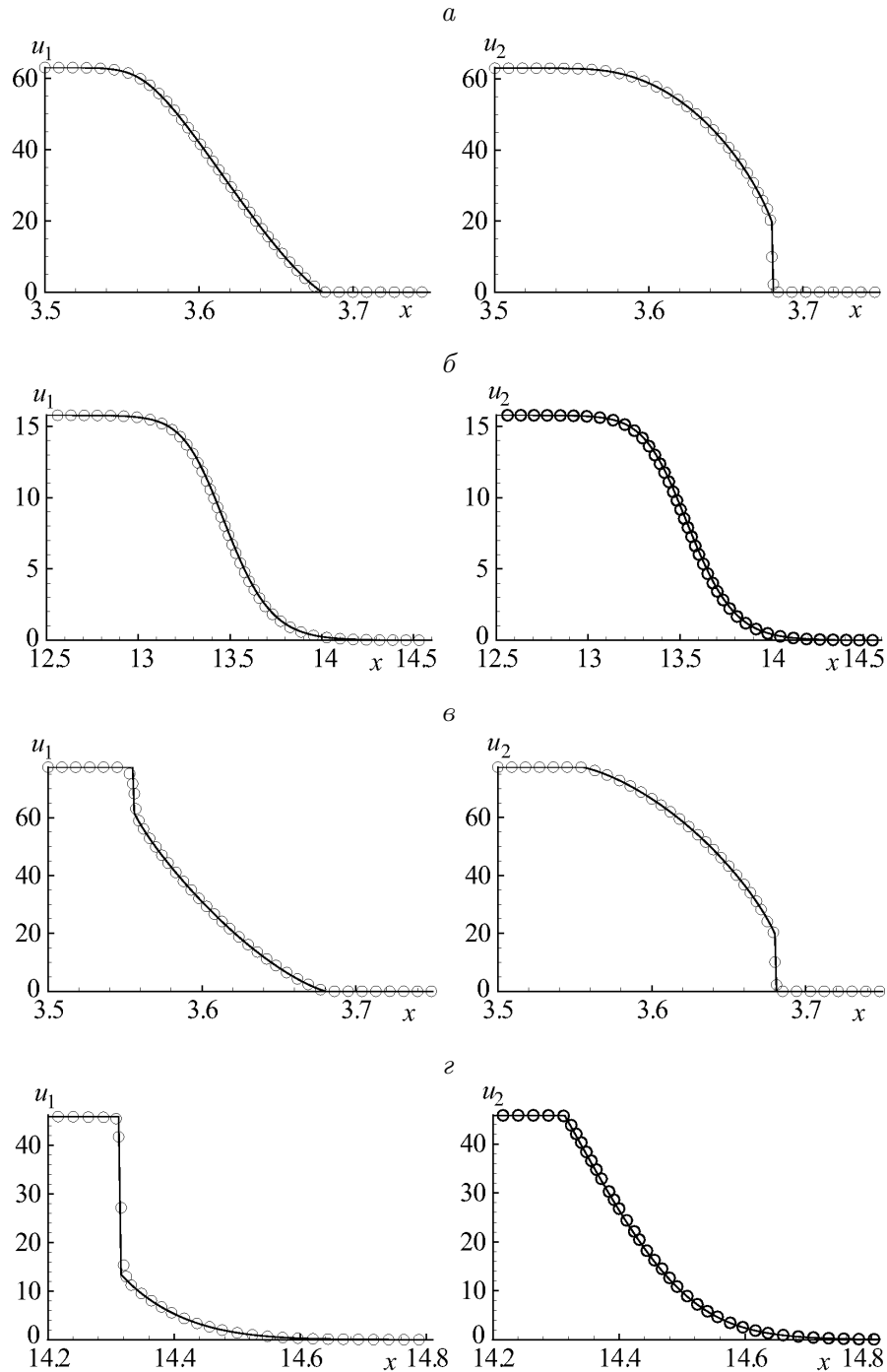


Рис. 10. Профили скоростей стационарного (линии) и нестационарного (кружки) решений для замороженной (*а*), полностью дисперсионной (*б*), замороженной двухфронтной (*в*) и дисперсионно-замороженной (*г*) ударных волн

Сравнение стационарного и нестационарного решений для режимов с полностью дисперсионной, замороженной двухфронтной и дисперсионно-замороженной ударными волнами показано на рис. 10, *б–г* соответственно. Видно, что для всех типов УВ стационарность решения практически не нарушается. Можно отметить, что для режимов с замороженными ударными волнами на разрыв попадает не более двух точек и отсутствуют осцилляции численного решения.

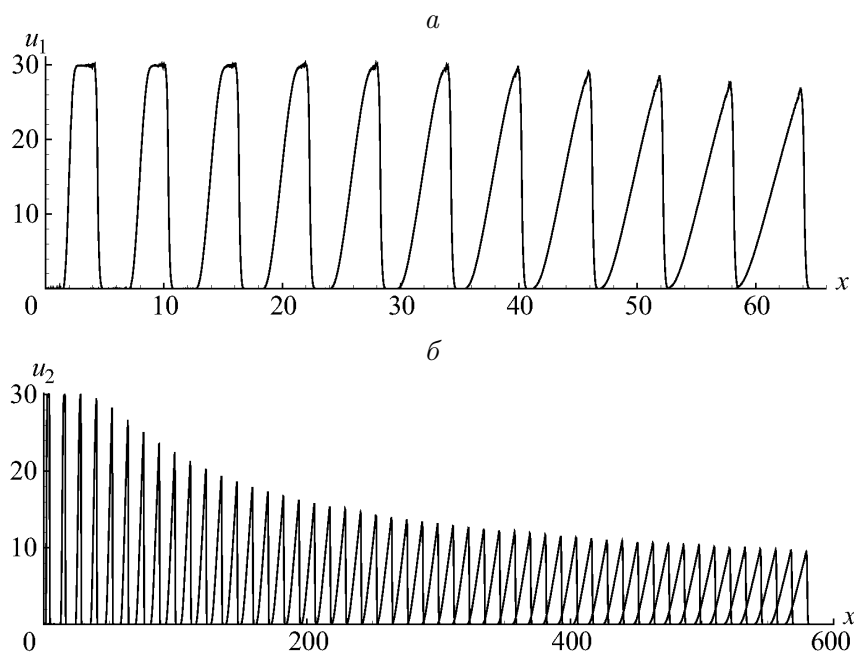


Рис. 11. Распространение дисперсионной звуковой УВ под воздействием волны разрежения

Остановимся на примере использования краевых условий второго вида (стенки) для дисперсионной звуковой УВ. Как отмечено выше, конечная скорость для волны такого типа равна скорости звука в первой фазе. Для данного типа УВ также подтверждена устойчивость решения в случае “мягких” краевых условий. В случае условий “стенки” около левой границы образуется зона пониженного давления и волна разрежения распространяется слева направо. На рис. 11 отображено распространение дисперсионно-звуковой волны, находящейся под воздействием волны разрежения. На рис. 11, *a* показана скорость газовой фазы в меньшем масштабе по пространственной координате, что позволяет проследить начальный этап взаимодействия волны разрежения и ударной волны. На рис. 11, *b* показана скорость твердой фазы на большем промежутке по пространственной координате. Видно, что взаимодействие с волной разрежения приводит к ослаблению и постепенному затуханию УВ.

## Выводы

1. В математической модели типа Андерсона для описания течения смеси газа и твердых частиц с учетом их собственного давления и в приближении умеренной объемной концентрации частиц развита теория сильного разрыва, позволившая описать несколько типов ударных волн.
2. Создана математическая технология расчета начально-краевой задачи для нестационарных одномерных уравнений механики гетерогенной среды типа Андерсона.
3. Численно показана устойчивость полученных замороженных и дисперсионных ударных волн различных типов относительно инфинитезимальных возмущений и их неустойчивость относительно взаимодействия с волнами разрежения.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-08-01947) и Министерства образования и науки России (проект № 211, задание № 2014\140).

## Список литературы / References

- [1] **Zenit, R., Hunt, M.L., Brennen, C.E.** Collisional particle pressure measurement in solid-liquid flows // *J. Fluid Mech.* 1997. Vol. 353. P. 216–283.
- [2] **Glasser, B.J., Kevrekids, I.G., Sundars, S.** One- and two-dimensional traveling wave solutions in fluidized beds // *J. Fluid Mech.* 1996. Vol. 306. P. 183–221.
- [3] **Карлсон Д., Хоглунд Р.** Сопротивление и теплоотдача частиц в соплах ракетных двигателей // *Ракетная техника и космонавтика.* 1964. № 11. С. 104–109.  
**Carlson, D.J., Høglund, R.F.** Particle drag and heat transfer in rocket nozzle // *AIAA J.* 1964. Vol. 2, No. 11. P. 1980–1984.
- [4] **Гольдштик М.А., Козлов Б.Н.** Элементарная теория концентрированных систем // *ПМТФ.* 1973. Т. 14, № 4. С. 67–77.  
**Gol'dshtik, M.A., Kozlov, B.N.** Elementary theory of concentrated dispersed systems // *J. of Appl. Mech. and Techn. Phys.* 1973. Vol. 14, No. 4. P. 491–499.
- [5] **Федоров А.В.** Структура ударной волны в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) // *Моделирование в механике.* 1991. Т. 5(22), № 4. С. 135–158.  
**Fedorov, A.V.** The structure of a shock wave in a mixture of solids (the hydrodynamic approximation) // *Model. in Mech.* 1991. Vol. 5(22), No. 4. P. 135–158. (in Russ.)
- [6] **Федоров А.В.** Типы бегущих волн в газозвеси с хаотическим давлением // *Динамика многофазных сред: Матер. XIII Всерос. сем. (Новосибирск, 8–10 окт. 2013 г.) / Под ред. В.М. Фомина, А.В. Федорова.* Новосибирск: ООО “Параллель”, 2013. С. 157–160.  
**Fedorov, A.V.** Types of traveling waves in a gas suspension with chaotic pressure // *Dynamics of Multiphase Media: Proc. of XIII All-Russ. Sem. (Novosibirsk, 8–10 Oct. 2013) / Ed. V.M. Fomin, A.V. Fedorov.* Novosibirsk: ООО “Parallel”, 2013. С. 157–160. (in Russ.)
- [7] **Федоров А.В., Федорова Н.Н.** Структура, распространение и отражение ударных волн в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) // *ПМТФ.* 1992. Т. 32, № 4. С. 10–18.  
**Fedorov, A.V., Fedorova, N.N.** Structure, propagation, and reflection of shock waves in a mixture of solids (the hydrodynamic approximation) // *J. of Appl. Mech. and Techn. Phys.* 1992. Vol. 33, No. 4. P. 487–494.
- [8] **Жилин А.А., Федоров А.В.** Распространение ударных волн в двухфазной смеси с различными давлениями компонентов // *ПМТФ.* 1999. Т. 40, № 1. С. 55–63.  
**Zhilin, A.A., Fedorov, A.V.** Propagation of shock waves in a two-phase mixture with different pressures of the components // *J. of Appl. Mech. and Techn. Phys.* 1999. Vol. 40, No. 1. P. 46–53.
- [9] **Hairer, E., Wanner, G.** Solving Ordinary Differential Equations. II: Stiff and Differential-Algebraic Problems / 2nd revised ed. Berlin: Springer, 1996. 614 p.
- [10] **Chakravathy, S.R., Osher, S.** New class of high accuracy tvd schemes hyperbolic conservation laws // *AAIA Paper.* 1983. No. 85. 0363. 11 p.
- [11] **Ковеня В.М., Яненко Н.Н.** Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 384 с.  
**Kovenya, V.M., Yanenko, N.N.** The Splitting Method in Problems of Gas Dynamics. Novosibirsk: Nauka, 1981. 384 p. (in Russ.)



## Structure and stability of shock waves in a gas-particle mixture with two pressure

BEDAREV, IGOR A.<sup>1,2,\*</sup>, FEDOROV, ALEXANDER V.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering, Novosibirsk, 630008, Russia

\*Corresponding author: Bedarev, Igor A., e-mail: [bedarev@itam.nsc.ru](mailto:bedarev@itam.nsc.ru)

The propagation of shock waves in a mixture of gas and fine solid particles that accounts for the differences of phase velocities and the presence of particles pressure is investigated in the frame of Anderson-type model. A mathematical model describing the movement is reduced to the model of the two interpenetrating interacting gases flow where parameters such as speed, density and pressure, are volume-averaged.

Existing types of strong discontinuities (frozen, dispersion, frozen-dispersion et al. of two front configurations) in the dispersion medium and the conditions, where they are implemented, are studied. A mathematical model describing the propagation is a model of two interacting gases interpenetrating continuous flow, with parameters such as velocity, density and pressure are averaged over the volume. The fifth-order Runge—Kutta scheme for the time approximation and third order TVD-type scheme for space approximation are used for the numerical modelling of the initial boundary value problems of the heterogeneous media mechanics equations.

The solutions in the class of traveling waves are found. A map of shock waves flow regimes is constructed to determine finite mixture velocity depending on the initial velocity and the gas component mass fraction. The existence of stationary solutions for different types of shock waves is shown numerically. The solutions stability is investigated by solving the Cauchy problem for equations of mechanics of a non-stationary one-dimensional heterogeneous media. It is shown that the “soft” boundary conditions, when the gradient of the boundary parameters is zero, give the stationary wave velocity configurations for both phases. In the case of “wall” conditions the effect of the rarefaction wave leads to a weakening and gradual attenuation of the shock wave.

*Keywords:* mixture of gas and solid particles, particle phase pressure, shock wave structure, frozen and dispersion shock waves.

**Acknowledgements.** The work was supported by RFBR No. 15-08-01947 and Ministry of Science and Education of the Russian Federation (project No. 211, task No. 2014/140).

*Received 1 December 2014*