

## Анализ математической модели устойчивости понтона в процессе его вертикально-боковой качки в зумпфе угольного разреза

С. В. ЧЕРДАНЦЕВ<sup>1,\*</sup>, Н. В. ЧЕРДАНЦЕВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кузбасский государственный технический университет им. Т.Ф. Горбачева, Кемерово, Россия

<sup>2</sup>Институт угля СО РАН, Кемерово, Россия

\*Контактный e-mail: svch01@yandex.ru

Установлено, что понтон в зумпфе угольного разреза одновременно с вертикальной качкой способен совершать еще и боковую качку. Показано, что вертикально-боковая качка описывается уравнением Матье, коэффициенты которого зависят как от соотношения собственных частот обоих видов качки, так и от характеристик плавучести понтона на “тихой воде”. Исследована устойчивость вертикально-боковой качки понтона и выявлены основные закономерности между его параметрами, характеризующими эту устойчивость.

*Ключевые слова:* понтон, плавучесть, метацентрическая высота, присоединенные массы жидкости, вертикальная и боковая качка понтона, уравнение Матье, диаграмма устойчивости Айнса — Стретта.

### Введение

Чтобы не допустить затопления забоев угольных разрезов грунтовыми и подземными водами, сооружают зумпфы, представляющие собой углубления в почве забоев, по мере заполнения которых воду откачивают с помощью плавучих водоотливных установок (ПВУ), состоящих из водоотливного оборудования, которое устанавливают на понтонах, помещаемых непосредственно в зумпфы.

Понтоны в зависимости от производительности водоотливного оборудования состоят из трех-пяти металлических труб-поплавков, герметически заваренных с торцов и расположенных параллельно друг другу, на которые настилают палубу из металлических пластин, обшитых досками, и устанавливают боковые ограждения. Затем на палубу помещают водоотливное оборудование с электроприводом (рис. 1).

Проблема использования понтонов на угольных разрезах уже обсуждалась в ряде работ [1–6]. Так, в [1–4] исследованы плавучесть и остойчивость понтонов, а в работах [5, 6] получены уравнения и выявлены формы движения понтонов “на тихой воде”, представляющие собой вертикальную, боковую и килевую качки, они происходят независимо друг от друга и описываются соответственно уравнениями

$$(M + M_{33})\ddot{\lambda} + \rho g S_0 \lambda = 0, \quad (1)$$

$$(J_{x_1} + M_{44})\ddot{\theta} + P h_0 \theta = 0, \quad (2)$$

$$(J_{y_1} + M_{55})\ddot{\psi} + P H_0 \psi = 0. \quad (3)$$

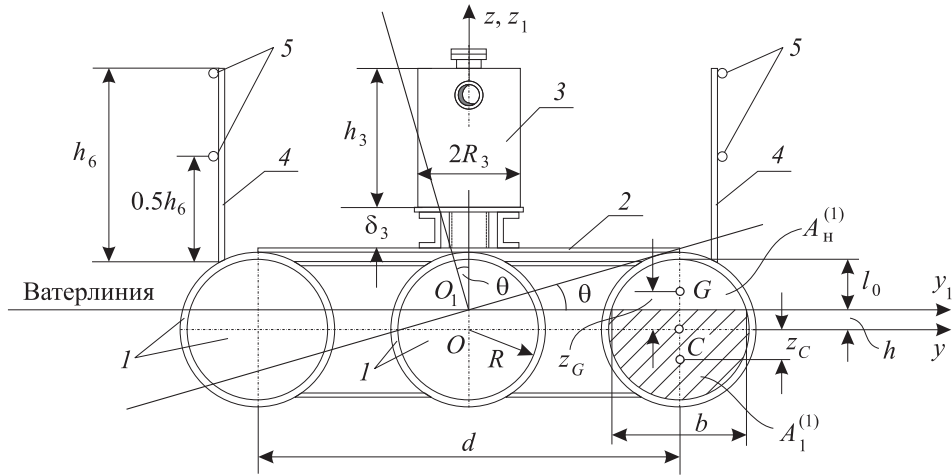


Рис. 1. Плавающая водоотливная установка (вид с торца): 1 — металлические трубы-поплавки; 2 — палубный настил; 3 — бак-запасник воды; 4 — стойки ограждения; 5 — поручни

Здесь  $M$  — масса ПВУ;  $J_{x_1}$ ,  $J_{y_1}$  — ее моменты инерции относительно осей  $Ox_1$  и  $Oy_1$ , расположенных в плоскости ватерлинии;  $M_{33}$ ,  $M_{44}$ ,  $M_{55}$  — присоединенные массы жидкости, характеризующие увеличение соответственно массы и моментов инерции ПВУ в процессе ее качки;  $\rho$  — плотность жидкости в зумпфе;  $P$  — вес ПВУ, равный архимедовой силе;  $\lambda$  — вертикальное перемещение понтона в неподвижной системе координат, а углы поворота понтона относительно осей  $Ox_1$  и  $Oy_1$  будем называть в терминах теории корабля [8, 9] соответственно углом крена  $\theta$  (рис. 1) и углом дифферента  $\psi$ ; точками в формулах (1)–(3) обозначены производные по времени.

Площадь ватерлинии  $S_0$  понтона равна

$$S_0 = jbL, \quad (4)$$

где  $j$  — число труб-поплавков,  $L$  — их длина, а величина  $b$  определяется по формуле [2]

$$b = 2R\sqrt{\zeta(2-\zeta)}. \quad (5)$$

Здесь  $\zeta = l_0/R$  — относительная максимальная высота надводной части труб-поплавков (рис. 1), зависящая от коэффициента запаса плавучести  $k_p$ ;  $R$  — радиус трубы-поплавка.

Начальные поперечная  $h_0$  и продольная  $H_0$  метацентрические высоты понтона и его метацентрические радиусы  $r_\theta$ ,  $r_\psi$  определяются по формулам [2]

$$h_0 = r_\theta - z_C - z_G, \quad H_0 = r_\psi - z_C - z_G, \quad (6)$$

$$r_\theta = R \frac{2 \left[ \sqrt{\zeta(2-\zeta)} \right]^3 \left\{ 1 + \frac{3d^2}{2j\zeta(2-\zeta)} \sum_{i=1}^{(j-1)/2} \left[ \left( 1 - 2\frac{i-1}{j-1} \right)^2 \right] \right\}}{3 \left\{ \pi - \left[ \arccos(1-\zeta) - (1-\zeta)\sqrt{\zeta(2-\zeta)} \right] \right\}}, \quad (7)$$

$$r_\psi = R \frac{\sqrt{\zeta(2-\zeta)}}{6 \left\{ \pi - \left[ \arccos(1-\zeta) - (1-\zeta)\sqrt{\zeta(2-\zeta)} \right] \right\}} \bar{L}^2, \quad (8)$$

где  $\bar{d} = d/R$  — относительное расстояние между центрами тяжести крайних поплавков;  $\bar{L} = L/R$  — относительная длина труб-поплавков.

Координаты центра масс ПВУ  $z_G$  и центра величины  $z_C$  вычисляются следующим образом [2]:

$$z_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i, \quad z_C = -\frac{2}{3} R \frac{[\zeta(2-\zeta)]^{3/2}}{\pi - [\arccos(1-\zeta) - (1-\zeta)\sqrt{\zeta(2-\zeta)}]}, \quad (9)$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — координаты масс  $m_i$ , составляющих ПВУ.

Величина  $\zeta$  находится из решения трансцендентного уравнения [2]

$$\arccos(1-\zeta) - (1-\zeta)\sqrt{\zeta(2-\zeta)} = \frac{\pi k_p}{k_p + 1}, \quad (10)$$

в котором вначале следует задать значение коэффициента запаса плавучести  $k_p$ , а затем найти величину  $\zeta$ . Например, если  $k_p = 0.3$ , то из уравнения (10) величина  $\zeta = 0.5627$ , а если  $k_p = 0.5$ , то  $\zeta = 0.7351$  и т. д.

Присоединенные массы жидкости определяются по формулам [7]

$$M_{33} = \rho V_0, \quad M_{44} = \bar{M}_{44} \rho L R^4, \quad M_{55} = \bar{M}_{55} \rho L R^4, \quad (11)$$

где  $V_0$  — начальное водоизмещение понтона при посадке по ватерлинию в положении равновесия на “тихой воде”;  $\bar{M}_{44}, \bar{M}_{55}$  — безразмерные присоединенные массы

$$\bar{M}_{44} = j \bar{M}_{44}^{(c)} + \frac{1}{2} \bar{A}_1^{(1)} \bar{d}^2 \sum_{i=1}^{(j-1)/2} \left[ \left( 1 - 2 \frac{i-1}{j-1} \right)^2 \right], \quad \bar{M}_{55} = \frac{1}{12} j \bar{A}_1^{(1)} \bar{L}^2. \quad (12)$$

Здесь  $\bar{A}_1^{(1)}$  и  $\bar{M}_{44}$  — безразмерные площадь подводной части и присоединенная масса жидкости каждой трубы-поплавка, определяемые по формулам [7]

$$\begin{aligned} \bar{M}_{44}^{(c)} &= [1 + 2(1-\zeta)^2] [2 \arcsin(1-\zeta) + \pi] + \frac{1}{3} [1 + 3(1-\zeta)^2] \times \\ &\times (1-\zeta) \sqrt{1 - (\zeta-1)^2} - \frac{1}{6} (1-\zeta) \sqrt{1 - (\zeta-1)^2} [1 - 2(\zeta-1)^2] + \\ &+ \frac{4}{3} (1-\zeta) \sqrt{1 - (\zeta-1)^2} [1 - (\zeta-1)^2], \quad \bar{A}_1^{(1)} = A_1^{(1)} / R^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Разделив уравнения (1)–(3) на коэффициенты при вторых производных и приняв  $\lambda = Z_1, \theta = Z_2, \psi = Z_3$ , имеем

$$\ddot{Z}_i + \omega_i^2 Z_i = 0, \quad (14)$$

где индексы  $i$  соответствуют различным формам движения понтона:  $i = 1$  — вертикальной качке,  $i = 2$  — боковой,  $i = 3$  — килевой, а величины  $\omega_i$  в соответствии с параметрами, входящими в уравнения (1)–(3), представляются в виде

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\rho g S_0}{M + M_{33}}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{m g h_0}{J_{x_1} + M_{44}}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{m g H_0}{J_{y_1} + M_{55}}}. \quad (15)$$

Детальный анализ собственных частот качки понтона на “тихой воде” в зависимости от радиуса труб-поплавков  $R$ , их длины  $L$  и расстояния между крайними трубами-поплавками  $d$  выполнен в работе [7].

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу. Пусть понтон совершает вертикальную качку, в ходе которой под действием внешних сил он получает небольшой крен  $\theta$  при отсутствии дифферента. В результате возникает восстанавливающий момент  $Mgh_0\theta$ , направленный противоположно крену, поэтому в дополнение к вертикальной качке понтон начнет совершать еще и боковую качку. Требуется исследовать режимы движения понтона.

В качестве примечания к поставленной задаче отметим, что поскольку малым возмущением понтона является только крен, а дифферент отсутствует ( $\psi = 0$ ), уравнение (3) превращается в тождество и мы его рассматривать далее не будем.

Сформулированная задача принципиально отличается от задачи, описывающей различные виды качки “на тихой воде”, происходящие независимо друг от друга [7].

Во-первых, за счет периодического погружения и всплытия понтона в результате вертикальной качки его метацентрические высоты  $h_0$ ,  $H_0$  не будут постоянными величинами, как ранее, а будут функциями величины  $\lambda$ , которая, в свою очередь, будет функцией времени. Поэтому метацентрические высоты будем обозначать  $h$ ,  $H$ , которые в положении равновесия на “тихой воде” (при  $\lambda_0 = 0$ ) принимают значения  $h_0$ ,  $H_0$ .

Во-вторых, если уравнение (1) в рассматриваемой задаче можно использовать в том же виде, как и ранее, то уравнение (2), содержащее переменную величину  $h$ , приводится к уравнению с переменными коэффициентами

$$(J_{x_1} + M_{44})\ddot{\theta} + \rho V g h \theta = 0, \quad (16)$$

в котором мы учли, что  $M = \rho V$ , а  $V$  — водоизмещение качающегося понтона.

В-третьих, поскольку  $h$  изменяется с частотой вертикальной качки, уравнения, описывающие вертикальную и боковую качку, связаны между собой и, следовательно, образуют систему, в то время как при качке на “тихой воде” уравнения независимы друг от друга.

## 2. Построение решения задачи

Процедуру решения задачи начнем с определения величины  $Vh$ . Для этого разложим  $Vh$  в ряд Маклорена по степеням  $\lambda$  и ограничимся только линейными членами разложения

$$Vh = V_0 h_0 + \lambda \left. \frac{d(Vh)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (17)$$

Дифференцируя (17) и учитывая, что  $V = V_0$  и  $h = h_0$  при  $\lambda = 0$ , мы получаем

$$\left. \frac{d(Vh)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \left( \frac{dV}{d\lambda} h + V \frac{dh}{d\lambda} \right) \Big|_{\lambda=0} = \frac{dV}{d\lambda} h_0 + V_0 \frac{dh}{d\lambda}. \quad (18)$$

Если понтон переместился вверх на малую величину  $\lambda$ , то его водоизмещение уменьшится на величину  $S_0 \lambda$  и будет равно

$$V = V_0 - S_0 \lambda, \quad (19)$$

где  $S_0$  — площадь ватерлинии в положении равновесия на “тихой воде”, определяемая по формуле (4). Тогда очевидно, что

$$\frac{dV}{d\lambda} = -S_0. \quad (20)$$

Метацентрическую высоту  $h$  определим по первой формуле (6)

$$h = r_\theta - z_C - z_G, \quad (21)$$

но при этом учтем, что в ее правой части метацентрический радиус  $r_\theta$  и положение центра величины  $z_C$  зависят от  $\lambda$ , а положение центра тяжести  $z_G$  нет. Поэтому  $r_\theta$  и  $z_C$  удобнее найти не по формулам (7) и (9), а по формулам

$$r_\theta = \frac{J_{x_1}}{V}, \quad z_C = \frac{M_V}{V}, \quad (22)$$

взятым из [8], где  $M_V$  является статическим моментом погруженного объема понтона относительно мгновенной ватерлинии. Тогда, дифференцируя (21), имеем

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{dr_\theta}{d\lambda} - \frac{dz_C}{d\lambda}. \quad (23)$$

При отыскании производной  $dr_\theta/d\lambda$  будем считать, что ввиду малости  $\lambda$  площадь ватерлинии изменяется несущественно, в силу чего мы будем полагать, что момент инерции площади ватерлинии  $J_{x_1}$  не зависит от осадки  $\lambda$ . Поэтому, выполняя процедуру дифференцирования в правой части равенства (23) с учетом формул (22), получаем

$$\frac{dr_\theta}{d\lambda} = \frac{dr_\theta}{dV} \frac{dV}{d\lambda} = \frac{d}{dV} \left( \frac{J_{x_1}}{V} \right) \frac{dV}{d\lambda} = J_{x_1} \left( \frac{1}{V} \right)'_V (-S_0) = -\frac{J_{x_1}}{V^2} (-S_0) = \frac{J_{x_1} S_0}{V} = \frac{r_\theta S_0}{V}, \quad (24)$$

$$\frac{dz_C}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{M_V}{V} \right) = \frac{1}{V^2} \left( \frac{dM_V}{d\lambda} V - M_V \frac{dV}{d\lambda} \right) = \frac{1}{V} \frac{dM_V}{d\lambda} - \frac{M_V}{V^2} \frac{dV}{d\lambda}. \quad (25)$$

Поскольку  $M_V$  мы можем определить по формуле [8]

$$M_V = \int_{-(h+R)}^{\lambda} (-z + \lambda) dV = \int_{-(h+R)}^{\lambda} (-z + \lambda) S_z dz,$$

где  $S_z$  — площадь ватерлинии с аппликатой  $z$ , дифференцируя полученную формулу по  $\lambda$  и учитывая теорему о производной интеграла по его верхнему пределу, получаем равенство

$$\frac{dM_V}{d\lambda} = S_z(-z + \lambda),$$

правая часть которого представляет собой водоизмещение  $V$ , взятое с противоположным знаком, и поэтому

$$\frac{dM_V}{d\lambda} = -V. \quad (26)$$

В силу формул (20), (22) и (26) формула (25) приобретает вид

$$\frac{dz_C}{d\lambda} = \frac{1}{V} \frac{dM_V}{d\lambda} - \frac{1}{V^2} M_V \frac{dV}{d\lambda} = -1 - \frac{1}{V} \frac{M_V}{V} \frac{dV}{d\lambda} = -1 + \frac{z_C S_0}{V}. \quad (27)$$

Далее формулы (24) и (27) подставляем в равенство (23) и, учитывая первую формулу (6), получим

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{r_\theta S_0}{V} - \left( -1 + \frac{z_C S_0}{V} \right) = \frac{(h_0 + z_C + z_G) S_0}{V} + 1 - \frac{z_C S_0}{V} = 1 + \frac{(h_0 + z_G) S_0}{V}. \quad (28)$$

С помощью формул (20) и (28) преобразуем вначале равенство (18)

$$\left. \frac{d(Vh)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = -S_0 h_0 + V_0 \left[ 1 + \frac{S_0}{V_0} (h_0 + z_G) \right] = V_0 + S_0 z_G,$$

а затем и формулу (17):

$$Vh = V_0 h_0 + (V_0 + S_0 z_G) \lambda. \quad (29)$$

Учитывая формулу (29), вначале перепишем уравнение (16)

$$(I_{x_1} + M_{44}) \ddot{\theta} + \rho g [V_0 h_0 + (V_0 + S_0 z_G) \lambda] \theta = 0,$$

а затем представим его в виде

$$\ddot{\theta} + \omega_2^2 (1 + p\lambda) \theta = 0, \quad (30)$$

где

$$p = \frac{V_0 + S_0 z_G}{V_0 h_0}. \quad (31)$$

Будем полагать, что вертикальная качка понтона происходит по закону

$$\lambda = \lambda_0 \cos(\omega_1 t),$$

в силу чего уравнение (30) будет выглядеть следующим образом:

$$\ddot{\theta} + \omega_2^2 [1 + p\lambda_0 \cos(\omega_1 t)] \theta = 0. \quad (32)$$

Далее приведем уравнение (32) к безразмерному виду. Для этого введем безразмерную переменную  $\tau$ , связанную с переменной  $t$  зависимостью

$$t = \frac{2}{\omega_1} \tau, \quad (33)$$

найдем производные

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{2}{\omega_1} \dot{\theta}, \quad \frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{2}{\omega_1} \dot{\theta} \right) = \frac{2}{\omega_1} \frac{d\dot{\theta}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{2}{\omega_1} \ddot{\theta} \left( \frac{2}{\omega_1} \right) = \left( \frac{2}{\omega_1} \right)^2 \ddot{\theta} \quad (34)$$

и, подставив формулы (33) и (34) в уравнение (32), приходим к уравнению Матье [10]

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + [a - 2q \cos(2\tau)] \theta = 0, \quad (35)$$

в котором параметры  $a$  и  $q$  определяются по формулам

$$a = \frac{4\omega_2^2}{\omega_1^2}, \quad q = -\frac{2\omega_2^2}{\omega_1^2} p\lambda_0. \quad (36)$$

Решениями уравнения (35) являются функции Матье, особенность которых заключается в том, что они могут быть как ограниченными, так и неограниченно возрастающими [10–12]. В первом случае начальные боковые возмущения в процессе вертикальной качки понтона не приведут к росту амплитуды боковой качки и, следовательно, понтон не потеряет устойчивость. Во втором случае амплитуда боковой качки будет

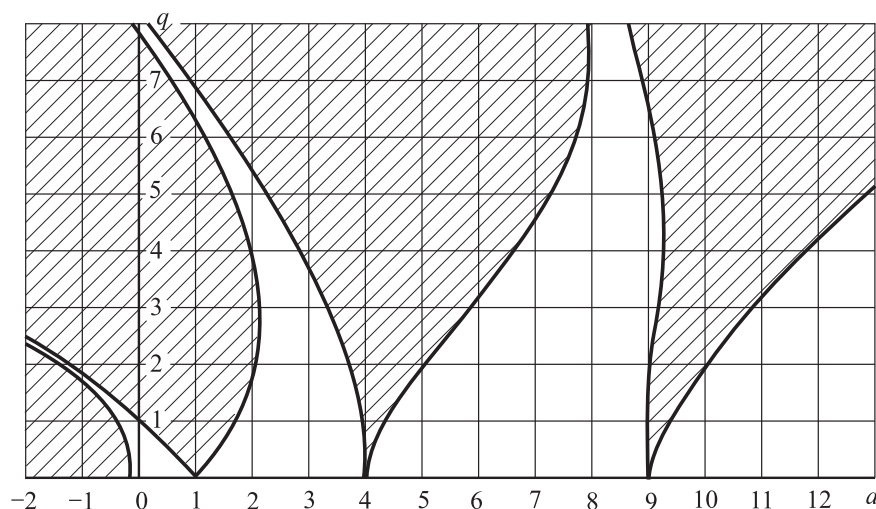


Рис. 2. Диаграмма Айнса—Стретта

неограниченно возрастать, что приведет к опрокидыванию понтона, т. е. к потере его устойчивости.

Из уравнения (35) вытекает, что существуют такие сочетания параметров  $a$  и  $q$ , при которых понтон в процессе качки может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Иначе говоря, существуют целые области значений на плоскости параметров  $a - q$ , которым соответствует устойчивое состояние понтона или, наоборот, неустойчивое. Поэтому для анализа устойчивости или неустойчивости понтона воспользуемся диаграммой Айнса—Стретта (рис. 2), построенной на основании решения уравнения (35) и заимствованной из [12]. Здесь области неустойчивости заштрихованы. Границам между областями устойчивости и неустойчивости соответствуют периодические движения понтона.

Таким образом, для исследования устойчивости понтона достаточно найти значения параметров  $a$  и  $q$ , соответствующих рассматриваемому понтону, и выяснить, в какую область попадает точка, координатами которой являются найденные параметры  $a$ ,  $q$ .

### 3. Анализ полученных результатов

На первый взгляд вычисление параметра  $a$  по формуле (36) не представляет затруднений, поскольку формула содержит только собственные частоты вертикальной и боковой качки понтона. Однако их вычисление по формулам (15) является непростой процедурой, поскольку формулы содержат не только параметры самого понтона (площадь ватерлинии равновесия, ее момент инерции, боковую метацентрическую высоту, водоизмещение), но и присоединенные массы жидкости. В свою очередь, присоединенные массы жидкости, определяемые по формулам (11)–(13), зависят от основных параметров понтона: длины  $L$ , радиуса  $R$  и расстояния между крайними трубами-поплавками  $d$ , которые в данной работе принадлежат отрезкам

$$R \in [0.3 \text{ м}; 0.6 \text{ м}], \quad d \in [1.8 \text{ м}; 3.0 \text{ м}], \quad L \in [4.0 \text{ м}; 7.5 \text{ м}]. \quad (37)$$

Из сказанного вытекает, что и параметр  $a$  существенно зависит от основных параметров понтона. С целью доказать это выполнены вычисления, на основании которых

построены графики зависимостей  $a(d)$ ,  $a(R)$  и  $a(L)$  (рис. 3). При их построении учтено, что при изменении одного из трех основных параметров понтона два других фиксированы. Графики показывают, что наиболее существенное влияние на значение параметра  $a$  оказывает величина  $d$  (рис. 3, а). Отметим, что на рассматриваемых отрезках функции  $a(d)$  и  $a(L)$  монотонно возрастают, а их графики представляют собой слабо выпуклые кривые. Напротив, функция  $a(R)$  (рис. 3, б) имеет два участка, разделенных точкой максимума  $R = 0.35$  м. При этом на участке  $R \in [0.3 \text{ м}; 0.35 \text{ м}]$  функция  $a(R)$  возрастает, а на участке  $R \in (0.35 \text{ м}; 0.6 \text{ м}]$  монотонно убывает, причем почти линейно.

Из анализа графиков (рис. 3) вытекает, что для понтонов с параметрами, указанными в (37), значение  $a$  принадлежит интервалу

$$a \in [2.211; 3.944]. \quad (38)$$

Сопоставляя интервал (38) с диаграммой Айнса—Стретта, замечаем, что этот интервал достаточно узкий и находится на отрезке оси абсцисс диаграммы, принадлежащем области устойчивости.

Если параметр  $a$  учитывает только соотношение собственных частот боковой и вертикальной качек понтона, то параметр  $q$ , определяемый по второй формуле (36) и преобразуемый с помощью формулы (31) к виду

$$q = \frac{1}{2} \frac{4\omega_2^2}{\omega_1^2} \left( \frac{V_0 + S_0 z_G}{V_0 h_0} \right) \lambda_0 = \frac{a}{2} \left( \frac{jA_1^{(1)}L + jbLz_G}{jA_1^{(1)}Lh_0} \right) \lambda_0 = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{\bar{b}\bar{z}_G}{A_1^{(1)}} \right) \frac{1}{\bar{h}_0} \bar{\lambda}_0, \quad (39)$$

учитывает еще амплитуду вертикальной качки, начальное водоизмещение понтона, площадь его ватерлинии в состоянии равновесия, величину поперечной метacentрической высоты и положение центра тяжести понтона, а также параметр  $a$ . Черточки сверху указывают, что данные величины безразмерны, т. е.

$$\bar{b} = \frac{b}{R}, \quad \bar{\lambda}_0 = \frac{\lambda_0}{R}, \quad \bar{h}_0 = \frac{h_0}{R}, \quad \bar{z}_G = \frac{z_G}{R}, \quad \bar{A}_1^{(1)} = \frac{A_1^{(1)}}{R^2}.$$

Анализ формулы (39) показывает, что зависимость параметра  $q$  от значений  $a$  является сложной функцией, поскольку сам параметр  $a$  зависит от основных параметров понтона  $R$ ,  $d$  и  $L$  (см. рис. 3). Это обстоятельство мы учли и построили три серии графиков (рис. 4 и 5), отражающих зависимости  $q[a(d)]$ ,  $q[a(L)]$ ,  $q[a(R)]$  для ряда значений  $\lambda_0$ .

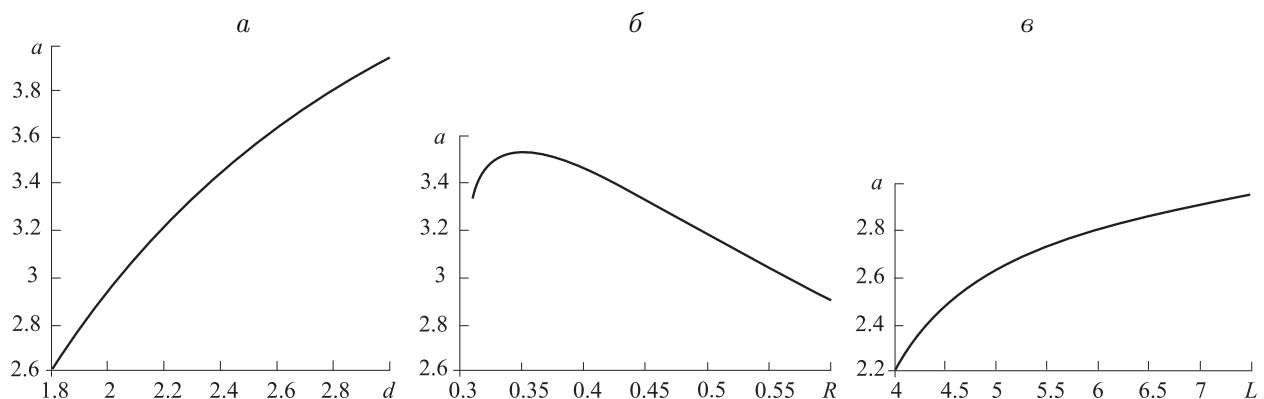


Рис. 3. Графики зависимости параметра  $a$  от основных характеристик понтона



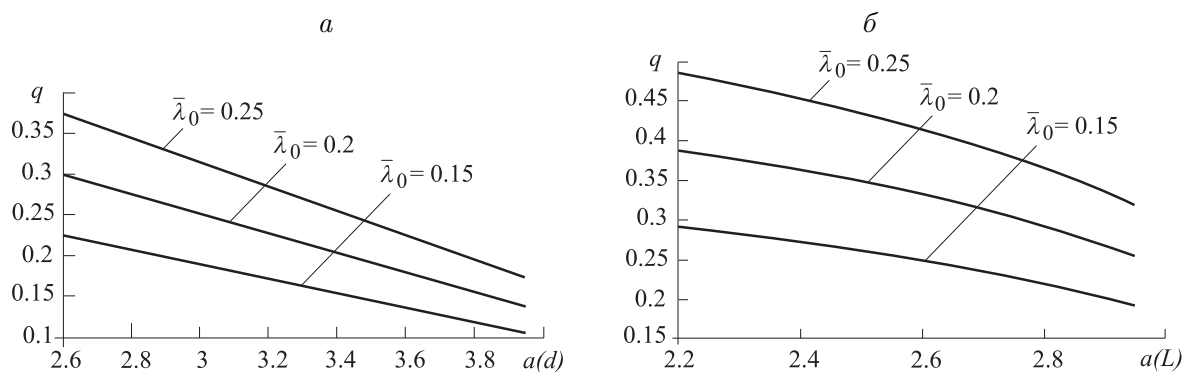


Рис. 4. Графики зависимости параметра  $q$  от переменных  $a(d)$  и  $a(L)$

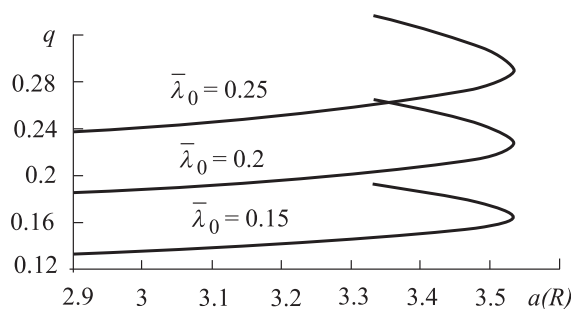


Рис. 5. Графики зависимости параметра  $q$  от переменной  $a(R)$

Так, на рис. 4, а графики зависимости  $q[a(d)]$  построены для понтона, у которого  $L = 5.1$  м,  $R = 0.4$  м, а величина  $d$  принадлежит отрезку  $d \in [1.8 \text{ м}; 3.0 \text{ м}]$ . Графики  $q[a(L)]$  на рис. 4, б соответствуют понтону с фиксированными параметрами  $d = 1.8$  м,  $R = 0.35$  м и переменной длиной понтона из интервала  $L \in [4.0 \text{ м}; 7.5 \text{ м}]$ . И, наконец, зависимость  $q[a(R)]$  для понтона  $L = 5.1$  м,  $d = 2.4$  м,  $R \in [0.3 \text{ м}; 0.6 \text{ м}]$  отражена на графиках, показанных на рис. 5.

Обратим внимание, что графики зависимостей  $q[a(d)]$  и  $q[a(L)]$  всюду убывающие, но при этом серия графиков  $q[a(d)]$  — линейная, а серия  $q[a(L)]$  — слабо выпуклая, причем выпуклость увеличивается с ростом  $\lambda_0$ .

Графики зависимости  $q[a(R)]$  (рис. 5) качественно отличаются от графиков  $q[a(d)]$  и  $q[a(L)]$ . Во-первых, графики  $q[a(R)]$  всюду эквидистантны, во-вторых, на интервале  $2.9 \leq a(R) \leq 3.4$  функция  $q[a(R)]$  возрастает, а на интервале  $3.34 \leq a(R) < 3.4$  убывает, и поэтому каждому значению  $a(R)$  из этого интервала соответствуют два значения параметра  $q[a(R)]$ .

Несмотря на качественные отличия, рассмотренные графики позволяют сделать заключение о том, что при всех возможных параметрах понтона, заявленных в формуле (37), все значения параметра  $q$  принадлежат отрезку

$$q \in [0.104; 0.483]. \quad (40)$$

Накладывая на диаграмму Айнса—Стретта прямоугольник, размерами которого являются отрезки  $a$  и  $q$  в формулах (38) и (40), мы видим, что прямоугольник полностью находится в области устойчивости, а следовательно, все рассматриваемые здесь понтоны в процессе вертикально-боковой качки устойчивы.

## Выводы

1. Показано, что совместная вертикально-боковая качка понтона описывается дифференциальным уравнением Матье, решения которого определяются соотношением переменных коэффициентов уравнения  $a$ ,  $q$ .

2. Построенные зависимости параметра  $a$  от поочередного изменения одного из трех основных параметров понтона при фиксированных значениях двух других позволили установить следующие закономерности его вертикально-боковой качки:

а) с увеличением  $L$  и  $d$  параметр  $a$  также увеличивается, а с увеличением  $R$  он увеличивается только на отрезке  $R \in [0.31 \text{ м}; 0.35 \text{ м}]$ , но при дальнейшем росте  $R$  уменьшается;

б) параметр  $a$  принадлежит отрезку  $a \in [2.211; 3.944]$  для всех понтонов, параметры которых изменяются в интервалах  $R \in [0.3 \text{ м}; 0.6 \text{ м}]$ ,  $d \in [1.8 \text{ м}; 3.0 \text{ м}]$ ,  $L \in [4.0 \text{ м}; 7.5 \text{ м}]$ .

3. Построенные три серии графиков полностью отражают зависимость параметра  $q$  от параметра  $a$  и выявляют интервал изменения параметра  $q \in [0.104; 0.483]$  для принятого класса понтонов.

4. Показано, что в рамках допущения о малости амплитуды вертикальной качки точки внутри прямоугольника со сторонами  $a \in [2.211; 3.944]$ ,  $q \in [0.104; 0.483]$  находятся в области устойчивости на диаграмме Айнса — Стретта и поэтому все понтоны с указанными типоразмерами устойчивы в условиях их вертикально-боковой качки.

## Список литературы / References

- [1] **Кучер Н.А., Черданцев С.В., Протасов С.И., Подображин С.Н., Билибин В.В.** Условия безопасного применения плавучих водоотливных установок // Безопасность труда в промышленности. 2003. № 1. С. 12–14.  
**Kucher, N.A., Cherdantsev, S.V., Protasov, S.I., Podobrazhin, S.N., Bilibin, V.V.** The conditions of safety of using the floating installations for siphonage of water // Bezopasnost Truda v Promyshlennosti. 2003. No. 1. P. 12–14. (in Russ.)
- [2] **Черданцев С.В.** Теоретические основы расчета понтонов, используемых на угольных разрезах // ФТПРПИ. 2013. № 1. С. 61–69.  
**Cherdantsev, S.V.** Theoretical basis for calculation of pontoons used in open pit mines // J. of Mining Sci. 2013. Vol. 49, No. 1. P. 52–59.
- [3] **Черданцев Н.В., Черданцев С.В.** Остойчивость понтонов в зумпфах угольных разрезов на больших углах крена // Вестник КузГТУ. 2013. № 4. С. 32–37.  
**Cherdantsev, N.V., Cherdantsev, S.V.** Stability of pontoon at coal pit under greater corners tumbling // Bulletin KuzSTU. 2013. No. 4. P. 32–37. (in Russ.)
- [4] **Черданцев Н.В., Черданцев С.В.** Проблема остойчивости понтонов, применяемых на угольных разрезах // Безопасность труда в промышленности. 2013. № 7. С. 45–49.  
**Cherdantsev, N.V., Cherdantsev, S.V.** Problem of stability of pontoons used at open-pit coal mines // Bezopasnost Truda v Promyshlennosti. 2013 No. 7. P. 45–49. (in Russ.)
- [5] **Черданцев С.В.** Уравнения движения понтонов в зумпфах угольных разрезах // Вестник КузГТУ. 2013. № 1. С. 7–10.  
**Cherdantsev, S.V.** Equations of motion of pontoons in the pump sump of coal open-casts // Bulletin KuzSTU. 2013. No. 1. P. 7–10. (in Russ.)

- [6] **Черданцев С.В., Черданцев Н.В.** Формы движения понтона в зумпфе угольного разреза // ВЕСТНИК Научного центра по безопасности работ в угольной промышленности. 2013. № 1.2. С. 45–54.  
**Cherdantsev, S.V., Cherdantsev, N.V.** Forms of pontoon movement in the sump of the open pit coal mine // VESTNIK Of Safety in Coal Mining Scientific Center. 2013. No. 1.2. P. 45–54. (in Russ.)
- [7] **Черданцев С.В., Черданцев Н.В.** Математическое моделирование качки понтона в зумпфе угольного разреза // Вычисл. технологии. 2014. Т. 19, № 1. С. 74–86.  
**Cherdantsev, S.V., Cherdantsev, N.V.** Mathematical modeling of pitching of the pontoon in zumpf of a coal mine // Comput. Technologies. 2014. Vol. 19, No. 1. P. 74–86. (in Russ.)
- [8] **Статика** корабля / Р.В. Борисов, В.В. Луговский, Б.М. Мирохин, В.В. Рождественский. СПб.: Судостроение, 2005. 256 с.  
**Static** of a Ship / R.V. Borisov, V.V. Lugovskiy, B.M. Mirokhin, V.V. Rozhdestvenskiy. Saint Petersburg: Sudostroenie, 2005. 256 p. (in Russ.)
- [9] **Ремез Ю.В.** Качка корабля. Л.: Судостроение, 1983. 328 с.  
**Remez, Yu.V.** Tossing of Ship. Leningrad: Sudostroenie, 1983. 328 p. (in Russ.)
- [10] **Мэтьюз Дж., Уокер Р.** Математические методы в физике: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1972. 392 с.  
**Mathews, J., Walker, R.L.** Mathematical Methods of Physics. N.Y.; Amsterdam: California Institute of Technology, 1964. 392 p.
- [11] **Болотин В.В.** Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1956. 600 с.  
**Bolotin, V.V.** Dynamic Stability of Elastic Systems. Moscow: Gos. izd-vo tekhn.-teor. lit., 1956. 600 p. (in Russ.)
- [12] **Пановко Я.Г.** Введение в теорию механических колебаний. М.: Наука, 1991. 256 с.  
**Panovko, Ya.G.** Introduction to Theory of Mechanical Fluctuations. Moscow: Nauka, 1991. 256 p. (in Russ.)

*Поступила в редакцию 12 ноября 2014 г.*

### **Analysis of the mathematical model for stability of a pontoon in process of the vertically-lateral fluctuations in the sump of an open coal mine**

CHERDANTSEV, SERGEY V.<sup>1,\*</sup>, CHERDANTSEV, NIKOLAY V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>T.F. Gorbachev Kuzbass State Technical University, Kemerovo, 650000, Russia

<sup>2</sup>Institute of Coal SB RAS, Kemerovo, 650065, Russia

\*Corresponding author: Cherdantsev, Sergey V., e-mail: svch01@yandex.ru

Sumps in the soil faces are constructed to prevent flooding of coal mines faces by ground and underground water, As sump is filled with water, water is then pumped out, to do that a floating dewatering plants are placed directly to the sump. They float with the help of pontoons equipped with the drainage equipment. Safe operation of the pontoons on the cuts can be achieved by correctly calculating their buoyancy, static stability and sustainable modes of motion. Buoyancy and static stability has been

discussed by the authors in a number of papers, and sustainable modes of motion was only partially discussed.

In particular, a number of works of authors demonstrated that different modes of movement of the pontoon can be identified as part of the solution of the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations of the 2nd order with constant coefficients that describe the vertical, lateral and pitching pontoon occurring independently of each other.

In this article, we found that if a heave pontoon gets a small roll, it will start to make side and lateral pitching. These motions are independent of each other. The authors showed that the joint vertical lateral pitching can be described by a differential equation of the 2nd order with variable coefficients (Mathieu equation), depending on the ratio of the natural frequencies of the two types of pitching and the characteristics of the buoyancy of the pontoon on the “calm water”.

The most significant results of this paper the authors are as follows:

– graphs and relations between parameters of the pontoon and variable coefficients Mathieu equation;

– we found that under the assumption of small amplitude, heave motion of all pontoons with the sizes considered in this paper are stable under the vertical side pitching.

*Keywords:* pontoon, floatability, metacentric height, added masses of liquid, vertical and lateral pitching pontoon, Mathieu equation, stability diagram Ince – Strutt.

*Received 11 November 2014*