

Алгоритмы решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды с учетом ресурсов на устранение локальных источников

И. С. НОВИКОВ

Институт вычислительной математики РАН, Москва, Россия

Контактный e-mail: nissonsiv@mail.ru

Предложены алгоритмы решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды локальными источниками. Приводимые методы решения проблемы основаны на вычислении “управлений” (закономерностей, по которым необходимо уменьшать интенсивности локальных источников) с учетом определенного количества ресурсов, выделенного на ликвидацию источников загрязнений. Проведен численный эксперимент, иллюстрирующий справедливость теоретических положений исследуемой задачи и эффективность работы одного из рассматриваемых алгоритмов.

Ключевые слова: сопряженные уравнения, оптимальное управление, экономический ущерб, численное моделирование загрязнений.

Введение

Проблема оценки и оптимизации экономического ущерба от загрязнений окружающей среды локальными источниками является актуальной в современном мире [1–4]. Локальными источниками могут быть трубы промышленных предприятий, а также лесные и торфяные пожары, которые вносят ощутимый вклад в загрязнение атмосферы (примером служит лето 2010 г.). От эффективности и своевременности решения этой проблемы зависит объем государственных средств (ресурсов), необходимых на ликвидацию загрязнений и их последствий, а также состояние здоровья людей, находящихся в регионе возможных загрязнений.

В [5] исследована задача минимизации экономического ущерба в московском регионе от локальных источников, предложен и обсужден алгоритм ее решения (на основе развития идей, приведенных в [6–8]). С использованием формул, приведенных в монографии [9], получено соотношение для определения экономического ущерба от загрязнения окружающей среды. Следует отметить, что в работе [5] не учитывалась возможная нехватка количества ресурсов, которое выделено на устранение локальных источников; предполагалось, что имеется достаточно средств для удаления источников загрязнений. Кроме того, “управления” (закономерности, по которым необходимо уменьшать интенсивности локальных источников) вычислялись за один шаг и не зависели от количества

ресурсов на устранение источников загрязнений, что могло привести к неполному использованию имеющихся средств, а в случае, если бы все выделенные ресурсы были использованы, первоначальный ущерб (ущерб, который получился бы, если бы управления локальными источниками не проводилось) сократился бы значительно.

В настоящей работе приводятся алгоритмы решения задачи оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды с учетом определенного количества ресурсов, выделенного на решение проблемы. Эти алгоритмы представляют собой модификацию метода, приведенного в [5]. Первый алгоритм — одношаговый, основан на предположении о том, что ресурсов хватает лишь на один шаг вычисления “управлений”. Другой алгоритм — многошаговый, в нем многократно вычисляются и уточняются “управления”. В обоих методах величины “управлений” зависят от количества имеющихся ресурсов. При численном решении задачи используется монотонная схема первого порядка точности, построенная на основе результатов из монографий [10, 11]. Также в работе приведены результаты численного эксперимента по решению поставленной проблемы, которые иллюстрируют справедливость теоретических положений исследуемой задачи и эффективность работы многошагового алгоритма.

1. Исходная и обобщенные постановки задачи

В данном параграфе формулируются исходная и обобщенные постановки задачи оптимизации экономического ущерба от локальных источников в регионе. В качестве математической модели распространения загрязнений, необходимой для постановки задачи, используем уравнение конвекции-диффузии (1) с граничными условиями (2), (3) и начальным условием (4):

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + b_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + b_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + b_z \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = 0 \text{ в } \Omega \cdot (0, T), \quad (1)$$

$$U_n^{(-)} \phi + \frac{\partial \phi}{\partial N} = 0 \text{ на } (\Gamma/\Gamma_2) \cdot (0, T), \quad (2)$$

$$\beta \phi - a_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \sum_{l=1}^{N_L} m_l(x, y, t)(u_l(t) + g_l^{em}(t)) \text{ на } \Gamma_2 \cdot (0, T), \quad (3)$$

$$\phi = 0 \text{ при } t = 0 \text{ в } \Omega. \quad (4)$$

Прежде чем перейти к описанию величин, входящих в уравнения, сделаем следующее замечание. Будем рассматривать группу пожаров, возникшую в нулевой момент времени, от этой группы распространяется лишь один тип поллютанта, а также будем пренебрегать взаимодействием примеси из различных пожаров друг с другом.

Теперь приведем величины, входящие в уравнения. Момент времени $t = 0$ — время старта каждого из $l = \overline{1, N_L}$ пожаров, N_L — число пожаров, T — конечный момент времени. Исследуемая задача рассматривается в декартовой системе координат $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$ в области Ω :

$$\Omega = (A_1, A_2) \cdot (B_1, B_2) \cdot (C_1, C_2),$$

и на поверхности S , состоящей из границ

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \mid x = A_1, B_1 < y < B_2, C_1 < z < C_2\},$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2 &= \{(x, y, z) \mid A_1 < x < A_2, B_1 < y < B_2, z = C_1\}, \\ \Gamma_3 &= \{(x, y, z) \mid x = A_2, B_1 < y < B_2, C_1 < z < C_2\}, \\ \Gamma_4 &= \{(x, y, z) \mid A_1 < x < A_2, B_1 < y < B_2, z = C_2\}, \\ \Gamma_5 &= \{(x, y, z) \mid A_1 < x < A_2, y = B_1, C_1 < z < C_2\}, \\ \Gamma_6 &= \{(x, y, z) \mid A_1 < x < A_2, y = B_2, C_1 < z < C_2\}.\end{aligned}$$

Через $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ обозначается единичный вектор внешней нормали к границе $\Gamma \equiv \bigcup_{i=1}^6 \Gamma_i \equiv \partial\Omega$, а через $\frac{\partial}{\partial N}$ — “конормальная производная”, соответствующая производной второго порядка из (1).

Величины b_x, b_y, b_z — проекции вектора скорости ветра на оси Ox, Oy, Oz соответственно, причем выполняется условие (до высоты 3 км, см. [4])

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{b} \equiv (b_1, b_2, b_3) \equiv (b_x, b_y, b_z),$$

b_x и b_y иногда будем называть “горизонтальными” скоростями ветра, b_z — “вертикальной” скоростью. Отмечаем, что $U_n = (\mathbf{b}, \mathbf{n})$, а $U_n^{(+)} = \frac{|U_n| + U_n}{2}$ (скорость вдоль потока) и $U_n^{(-)} = \frac{|U_n| - U_n}{2}$ (скорость против потока), $U_n = U_n^{(+)} - U_n^{(-)}$. Считаем, что “вертикальная” скорость ветра на нижней границе равна нулю. Величины $a_{11} \equiv a_{xx}, a_{22} \equiv a_{yy}$ — коэффициенты “горизонтальной” диффузии, $a_{33} \equiv a_{zz}$ — коэффициент “вертикальной” диффузии, причем все они являются строго положительными ограниченными функциями, постоянными по времени, β — величина, характеризующая взаимодействие загрязняющих примесей с подстилающей поверхностью (постоянная положительная величина).

Функция $\phi \equiv \phi(x, y, z, t)$ — концентрация загрязнения, которая возникла в области Ω с нулевого момента времени в результате распространения примеси от N_L не пересекающихся локальных источников, $m_l \equiv m_l(x, y, t)$ — характеристическая функция l -го локального источника на нижней границе Γ_2 , $g_l^{em}(t) \in L_2(0, T)$ — концентрация загрязнения, которая распространяется с единицы площади l -го источника на границе Γ_2 (коэффициент эмиссии, значение которого постоянно и положительно для конкретного вещества, будем предполагать, что $g_l^{em}(t) = \overline{g^{em}}, l = \overline{1, N_L}, t \in (0, T)$), $u_l \equiv u_l(t) \in L_2(0, T)$ — “управления” каждым из $l = \overline{1, N_L}$ источников (“дополнительные неизвестные”, или закономерности, по которым нужно устранять загрязнения от локальных источников). Считаем, что все функции, с которыми автор оперирует в настоящей работе, — вещественные.

Для замыкания задачи (1)–(4) введем дополнительное условие вида

$$Q = Q_0 - \delta Q, \quad (5)$$

где Q_0 — первоначальный экономический ущерб, который получился бы, если бы управления локальными источниками не проводилось, т. е. ущерб при $u_l = 0, l = \overline{1, N_L}$, δQ — заданное уменьшение первоначального экономического ущерба, Q — экономический ущерб, полученный в результате управления локальными источниками. Для определения Q_0 и Q введем следующие функции. Через ϕ_0 обозначим решение задачи (1)–(4) при $u_l = 0, l = \overline{1, N_L}$. Также введем $w \equiv w(x, y, z, t)$ — заданную весовую функцию

$$w(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{I_t^{\text{инд}} \tilde{Q}_{2003}^{\text{атм}} A^{\text{атм}} \sigma}{T}, & \{(x, y, z) \in \Omega_{\text{obs}}\} \cap \{t \in (0, T)\}, \\ 0, & \{(x, y, z) \notin \Omega_{\text{obs}}\} \cup \{t \notin (0, T)\}, \end{cases}$$

такую, что определены функционалы

$$Q \equiv (\phi, w) \equiv (\phi, w)_{L_2(\Omega \cdot (0, T))} = \int_0^T \int_{\Omega} \phi w d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega_{\text{obs}}} \phi w d\Omega dt, \quad (6)$$

$$Q_0 \equiv (\phi_0, w) \equiv (\phi_0, w)_{L_2(\Omega \cdot (0, T))} = \int_0^T \int_{\Omega} \phi_0 w d\Omega dt = \int_0^T \int_{\Omega_{\text{obs}}} \phi_0 w d\Omega dt, \quad (7)$$

где Ω_{obs} — “охраняемый регион” (регион, в котором оптимизируется ущерб от загрязнений). Соотношение для определения δQ будет приведено в ходе дальнейшего изложения. Отметим, что Q_0 и δQ — известные неотрицательные величины (т. е. под задачей оптимизации экономического ущерба понимается задача уменьшения первоначального ущерба Q_0 на неотрицательную величину δQ).

Обозначения величин и значения некоторых коэффициентов в формуле для вычисления w взяты из работы [9], здесь напомним их смысл, сразу оговорив, что все они строго положительны. Величина $I_t^{\text{инд}}$ — коэффициент индексации удельного ущерба с учетом инфляции, который приводится в Законе “О федеральном бюджете на t -й год”, $\tilde{Q}_{2003}^{\text{атм}}$ — удельный экономический ущерб от выброса в атмосферу 1 т условного загрязняющего вещества, приведенный к ценам 2003 г., $A^{\text{атм}}$ — коэффициент относительной агрессивности выбрасываемого в атмосферу загрязняющего вещества (вообще говоря, он свой для каждого типа поллютанта, но в нашем случае будет рассматриваться лишь одно вещество, поэтому и коэффициент будет один), σ — коэффициент относительной опасности воздействия для разных типов загрязняемых территорий (фактически весовой коэффициент, влияющий на величину ущерба от загрязнения конкретного типа территории).

Наконец, формулируем исходную математическую постановку задачи: найти ϕ , $\mathbf{u} \equiv (u_1, \dots, u_{N_L})$, такие, что выполняются (1)–(5).

Приведем теперь обобщенную постановку задачи (1)–(5). Она имеет вид: найти $\phi \in W_2^{1,0}(\Omega \cdot (0, T))$, $u_l \in L_2(0, T)$, $l = \overline{1, N_L}$, такие, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} b_i \phi \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi \hat{\phi} d\Gamma dt + \\ & + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi \hat{\phi} d\Gamma_2 dt = \int_0^T \int_{\Gamma_2} \sum_{l=1}^{N_L} m_l g_l^{em} \hat{\phi} d\Gamma_2 dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \sum_{l=1}^{N_L} m_l u_l \hat{\phi} d\Gamma_2 dt \quad \forall \hat{\phi} \in \hat{W}_2^1(\Omega \cdot (0, T)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$Q = Q_0 - \delta Q,$$

где $\hat{W}_2^1(\Omega \cdot (0, T)) = \{\hat{\phi} \mid \hat{\phi} \in W_2^{1,1}(\Omega \cdot (0, T)); \hat{\phi}|_{t=T} = 0\}$.

Легко проверить, что имеет смысл определять решение ϕ , \mathbf{u} задачи (1)–(5) как функции, удовлетворяющие (8). В дальнейшем, говоря о решении задачи (1)–(5), будем подразумевать, что речь идет о решении в обобщенной постановке. Кроме того, при некотором ограничении на скорости ветра и предположениях о физических коэффициентах задачи, приведенных выше, можно доказать теорему существования обобщенного решения $\phi \in W_2^{1,0}(\Omega \cdot (0, T))$, $u_l \in L_2(0, T)$, $l = \overline{1, N_L}$, задачи (8) (по аналогии с работой [12]). Определение пространств $W_2^{1,0}$, $W_2^{1,1}$ приведено в [12].

Физически приведенная выше постановка означает следующее: необходимо найти такие скорости устранения локальных источников (“управления”), чтобы ущерб Q в “охраняемом регионе” Ω_{obs} и на интервале $(0, T)$ был равен разности $Q_0 - \delta Q$ первоначального ущерба и его уменьшения по значению. Однако в данной постановке задача, вообще говоря, является некорректной (некорректность имеет место, например, из-за условия замыкания (5), из-за которого решение рассматриваемой задачи не единственно). По этой причине, следуя методике, приведенной в [13, 14], перейдем от рассмотрения исходной задачи (1)–(5) к следующей задаче в обобщенной постановке “в смысле наименьших квадратов”.

Найти $\phi \equiv \phi(\alpha)$, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\alpha)$, такие, что выполняются (1)–(4) и $J_\alpha(\phi, \mathbf{u}) \rightarrow \inf_{\mathbf{u}}$, (9)

где

$$J_\alpha(\phi, \mathbf{u}) = \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T u_l^2(t) dt + \frac{1}{2}(Q + \delta Q - Q_0)^2. \quad (10)$$

Здесь $\alpha = \text{const} \geq 0$ — параметр регуляризации, а Pr — стоимость устранения загрязнения с единицы площади (этот коэффициент вводится для того, чтобы размерность обоих слагаемых функционала совпадала, а также чтобы можно было привести размерности “управлений” к денежным единицам). В дальнейшем будет решаться задача оптимального управления вида (9) с функционалом (10). В результате решения будут получены значения ϕ , по которым можно будет вычислить экономический ущерб Q , которого возможно достичь, управляя по закономерностям \mathbf{u} (т. е. оптимизировать экономический ущерб в интересующем нас регионе).

В следующем параграфе приведем алгоритм решения задачи (1)–(5). Кроме того, сформулируем более общую задачу оптимизации экономического ущерба, в математической постановке которой учитываются ресурсы, выделенные на устранение локальных источников, обобщенную постановку этой задачи “в смысле наименьших квадратов” с функционалом, отличным от (10). В конце параграфа приведем одношаговый алгоритм решения этой более общей задачи, построенный на основе метода решения (1)–(5).

Замечание 1. Отметим, что в данной работе задача ставится как получение целевого экономического ущерба, а не его минимизации при ограничениях на ресурсы, поскольку такая постановка позволяет сформулировать алгоритмы решения класса задач оптимального управления, в которых вводятся “апостериорные” ограничения на “управления”. Приводимые в статье методы учитывают также количество ресурсов, имеющихся в наличии, и позволяют вычислять “управления” в аналитическом виде. Эти алгоритмы являются нестандартными и отличными от классических методов, приведенных, например, в работах [15–18], в которых ограничения на “управления” или ресурсы вводятся в математической постановке задачи.

2. Одношаговый алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов на устранение локальных источников

Опишем одношаговый алгоритм решения исследуемой задачи. Введем сначала “вспомогательную” сопряженную задачу:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial q}{\partial t} - b_x \frac{\partial q}{\partial x} - b_y \frac{\partial q}{\partial y} - b_z \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial q}{\partial x} \right) - \\
 & -\frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial q}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial q}{\partial z} \right) \equiv w \quad \text{в } \Omega \cdot (0, T), \\
 & U_n^{(+)} q + \frac{\partial q}{\partial N} = 0 \quad \text{на } (\Gamma/\Gamma_2) \cdot (0, T), \\
 & \beta q - a_{zz} \frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \cdot (0, T), \\
 & q = 0 \quad \text{при } t = T \quad \text{в } \Omega,
 \end{aligned} \tag{11}$$

где $q \equiv q(x, y, z, t)$ — решение “вспомогательной” сопряженной задачи, имеющее смысл функции “чувствительности” определенной точки в определенный момент времени к загрязнению. Будем предполагать, что $q \geq 0 \quad \forall t \in (0, T)$, а также, что $\int_{\Gamma_2} m_i q d\Gamma_2 > 0$

хотя бы для одного источника на всем временном интервале $(0, T)$ (оба предположения справедливы при численном решении в силу монотонности используемой схемы дискретизации).

Обобщенная постановка “вспомогательной” сопряженной задачи имеет следующий вид: найти $q \in \hat{W}_2^1(\Omega \cdot (0, T))$, такую, что выполняется соотношение

$$\begin{aligned}
 & -\int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial t} \hat{q} d\Omega dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} b_i q \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_i} d\Omega dt + \\
 & + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \frac{\partial q}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(-)} q \hat{q} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta q \hat{q} d\Gamma_2 dt = \\
 & = \int_0^T \int_{\Omega} w \hat{q} d\Omega dt \quad \forall \hat{q} \in W_2^{1,0}(\Omega \cdot (0, T)).
 \end{aligned} \tag{12}$$

При некотором ограничении на скорости ветра и предположениях о физических коэффициентах задачи, приведенных выше, следуя [12], можно показать, что обобщенное решение задачи (12) в классе функций $\hat{W}_2^1(\Omega \cdot (0, T))$ существует и единственно.

Легко заметить, что если положить в (12) $\hat{q} \equiv \phi$, где ϕ — решение задачи (1)–(5), а в (8) положить $\hat{\phi} \equiv q$, где q — решение (12), то справедливы следующие тождества (соотношения сопряженности) для Q :

$$Q = -\int_0^T \int_{\Omega} \phi \frac{\partial q}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} b_i \phi \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi q d\Gamma dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi q d\Gamma_2 dt = \left(\sum_{l=1}^{N_L} m_l (u_l + g_l^{em}), q \right)_{L_2(\Gamma_2 \cdot (0, T))}.$$

Полагая в последних соотношениях $\phi = \phi_0$ (т. е. $u_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$), получаем аналогичные соотношения для Q_0 :

$$Q_0 = - \int_0^T \int_{\Omega} \phi_0 \frac{\partial q}{\partial t} d\Omega dt - \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} b_i \phi_0 \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega dt + \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Gamma/\Gamma_2} U_n^{(+)} \phi_0 q d\Gamma dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^3 \int_0^T \int_{\Omega} a_{ii} \frac{\partial \phi_0}{\partial x_i} \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Gamma_2} \beta \phi_0 q d\Gamma_2 dt = \left(\sum_{l=1}^{N_L} m_l g_l^{em}, q \right)_{L_2(\Gamma_2 \cdot (0, T))}.$$

Подставляем полученные выражения для Q и Q_0 в функционал (10) и получаем его “двойственное” представление:

$$J_{\alpha}(\phi, \mathbf{u}) = \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T u_l^2(t) dt + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{N_L} (m_l u_l, q)_{L_2(\Gamma_2 \cdot (0, T))} + \delta Q \right)^2. \quad (13)$$

Варьируя функционал (13) по u_l и используя тот факт, что первая вариация функционала равна нулю $\forall \delta u_l$, а также делая вычисления, аналогичные тем, что приведены в [6, 7], получаем формулу для вычисления “управлений” в явном виде:

$$u_l(t) = - \frac{\delta Q \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt} \quad \text{при } t \in (0, T), \quad l = \overline{1, N_L}. \quad (14)$$

Поскольку первая вариация функционала (13) равна нулю на таких “управлениях” и функционал — квадратичный, “управления”, вычисляемые по формуле (14), доставляют функционалу (13) глобальный минимум [19]. Подставив “управления” (14) в (13), вычисляем минимум (который достигается!):

$$J_{\alpha}(\phi, \mathbf{u}) = \frac{\alpha \text{Pr}^2 \delta Q^2}{2 \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}.$$

Из последнего равенства вытекает

Теорема 1. В предположении, что $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \neq 0$ хотя бы для одного l на всем временном интервале $(0, T)$, выполняется $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_{\alpha}(\phi, \mathbf{u}) = 0$.

Теорема 1 гарантирует, что при малых параметрах регуляризации ущерб Q , получаемый в результате “управлений”, вычисляемых по формуле (14), на практике должен быть близок по значению к $Q_0 - \delta Q$.

Следует отметить, что “управления” (14), вообще говоря, могут быть достаточно большими отрицательными по значению и положительными по модулю величинами (поскольку выше предполагалась неотрицательность δQ), что в результате численного моделирования может привести к получению отрицательной концентрации загрязнения. Поэтому необходимо ввести некоторые ограничения на “управления”, что делается ниже.

В силу того, что $\delta Q \geq 0$, “управления” не могут принимать положительные значения ни в один из моментов времени ни для одного источника (что видно из формулы (14)). Напоминаем, что $g_l^{em}(t)$ — постоянная и положительная величина. Предполагается, что $q \geq 0 \forall t \in (0, T)$, а также $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного источника на всем временном интервале $(0, T)$. Обозначим

$$M_{lt}^{zero} = \left\{ l = \overline{1, N_L}, t \in (0, T) \mid \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t) = 0 \right\},$$

$$M_{lt}^{pos} = \left\{ l = \overline{1, N_L}, t \in (0, T) \mid \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t) > 0 \right\}.$$

Очевидно, что множества M_{lt}^{zero} и M_{lt}^{pos} не пересекаются, а их объединение образует множество всех возможных l и t для исследуемой задачи. Поскольку $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$ хотя бы для одного источника на всем временном интервале $(0, T)$,

$$\sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt > 0.$$

Введем условие

$$(A) \quad \delta Q \leq \frac{g_l^{em}(t) \left(\alpha Pr^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}, \quad (l, t) \in M_{lt}^{pos}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Ограничение вида*

$$(B) \quad |u_l(t)| \leq g_l^{em}(t) \quad \forall l = \overline{1, N_L}, \quad \forall t \in (0, T)$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнено ограничение (A).

Доказательство. Сначала докажем, что из (B) следует условие (A). По определению модуля из условия (B) получаем равносильную систему неравенств

$$|u_l(t)| \leq g_l^{em}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} u_l(t) \leq g_l^{em}(t), \\ u_l(t) \geq -g_l^{em}(t). \end{cases} \quad (15)$$

Используя второе неравенство из (15), а также формулу (14), получаем

$$\frac{\delta Q \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt} \geq -g_l^{em}(t) \quad \forall l = \overline{1, N_L}, \quad \forall t \in (0, T). \quad (16)$$

Пусть сначала $(l, t) \in M_{lt}^{zero}$. В этом случае последнее неравенство принимает вид

$$0 \geq -g_l^{em}(t) \quad \forall (l, t) \in M_{lt}^{zero},$$

что верно $\forall \delta Q$. Теперь рассмотрим ситуацию, когда $(l, t) \in M_{lt}^{pos}$. Поскольку в этом случае $\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 > 0$, из (16) получаем условие (А). Таким образом, прямое утверждение теоремы доказано.

Теперь докажем обратное утверждение. В случае, если $(l, t) \in M_{lt}^{zero}$, то $u_l(t) = 0$, а это означает, что выполняется

$$|u_l(t)| \leq g_l^{em}(t), \quad (l, t) \in M_{lt}^{zero}.$$

В случае, когда $(l, t) \in M_{lt}^{pos}$, имеет место условие (А). Переходя от неравенства (А) к (16), а также используя формулу (14), получаем:

$$u_l(t) \geq -g_l^{em}(t), \quad (l, t) \in M_{lt}^{pos}.$$

Поскольку рассматриваемые “управления” — неположительные (что отмечалось выше), справедлива система неравенств из (15), равносильная

$$|u_l(t)| \leq g_l^{em}(t), \quad (l, t) \in M_{lt}^{pos}.$$

Объединение множеств M_{lt}^{zero} и M_{lt}^{pos} образует множество всех возможных l и t для исследуемой задачи, т. е. выполняется ограничение (Б). \square

Замечание 2. Отметим, что условие (А) требуется лишь для $(l, t) \in M_{lt}^{pos}$. В случае, если $(l, t) \in M_{lt}^{zero}$, то из (14) следует, что $u_l(t) = 0$, поэтому ограничение (Б) выполнено всегда и дополнительных условий для δQ вводить не нужно.

Замечание 3. В данной работе δQ — уменьшение первоначального экономического ущерба, т. е. число, а не функция. Поэтому на практике на δQ можно налагать условие вида

$$(B) \quad \delta Q \leq \min_{(l,t)} \left(\frac{g_l^{em}(t)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)} \right) \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right).$$

Отмечаем, что выполнение данного условия является достаточным для выполнения условия (А). Поэтому при его введении сформулированная теорема остается справедливой.

Заменяя нестрогое неравенство в условии (В) равенством, получаем формулу для вычисления уменьшения первоначально ущерба от N_L источников:

$$\delta Q_{phys} = \min_{(l,t)} \left(\frac{g_l^{em}(t)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t)} \right) \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right). \quad (17)$$

Оценка ущерба по такой формуле в силу теоремы 2 гарантирует выполнение неравенства

$$u_l(t) + g_l^{em}(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in (0, T), \quad l = \overline{1, N_L}, \quad (18)$$

что обеспечивает “физичность” (неотрицательность) решений ϕ в дискретном случае при использовании монотонной разностной схемы для дискретизации (1)–(4) с известными “управлениями” (см., например, [11]). В дальнейшем в качестве δQ будем рассматривать (17).

Итак, выше сформулирован и обоснован алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба (9) с функционалом (10). Однако ни в постановке этой задачи, ни в методе ее решения не учитываются ресурсы, выделенные на устранение локальных источников, а статья направлена на описание алгоритмов с учетом ресурсов. По этой причине ниже приведем математическую постановку задачи оптимизации экономического ущерба, в которой в явном виде присутствует количество ресурсов на устранение источников загрязнения. Для этой цели помимо условия (5) введем еще одно условие замыкания

$$- \text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T u_l(t) dt = Res_{av}, \quad (19)$$

в котором Res_{av} — количество ресурсов, имеющееся для устранения N_L локальных источников (заданная величина).

Математическая постановка задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов на ликвидацию локальных источников имеет следующий вид: найти ϕ , $\mathbf{u} \equiv (u_1, \dots, u_{N_L})$, такие, что выполняются (1)–(5), (19).

Система уравнений (1)–(5), (19) отличается от (1)–(5) тем, что в нее добавлено еще одно условие замыкания, содержащее количество ресурсов, выделенное для оптимизации концентрации загрязнения в “охраняемом регионе”. Физически приведенная выше постановка означает следующее: используя все имеющееся в наличии количество ресурсов Res_{av} , необходимо найти такие скорости устранения локальных источников (“управления”), чтобы ущерб Q в “охраняемом регионе” Ω_{obs} и на интервале $(0, T)$ был равен разности $Q_0 - \delta Q$. Отмечаем, что проблема (1)–(5), (19) некорректно поставлена (из-за условий замыкания (5) и (19), наличие которых в постановке задачи приводит к ее неоднозначной разрешимости). Поэтому, как и ранее, вместо исходной задачи будем рассматривать ее обобщенную постановку “в смысле наименьших квадратов”:

$$\text{Найти } \phi \equiv \phi(\alpha), \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\alpha), \quad \text{такие, что выполняются (1)–(4) и } J_\alpha(\phi, \mathbf{u}) \rightarrow \inf_{\mathbf{u}}, \quad (20)$$

где

$$J_\alpha(\phi, \mathbf{u}) = \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T u_l^2(t) dt + \frac{1}{2} (Q + \delta Q - Q_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T u_l(t) dt + Res_{av} \right)^2. \quad (21)$$

В функционал (21) в сравнении с функционалом (10) добавлено третье слагаемое, имеющее смысл разности между правой и левой частями (19) “в смысле наименьших квадратов”.

Обсудим теперь алгоритм решения (20). Обозначим Res — количество ресурсов, необходимое для уменьшения первоначального ущерба Q_0 на величину δQ и будем вычислять его по формуле

$$Res = - \text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T u_l(t) dt = \frac{\text{Pr} \delta Q \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 dt}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt}. \quad (22)$$

Подставляя выражение для δQ из (17) в (22), получаем

$$Res = \min_{(l,t)} \left(\frac{g_l^{em}(t)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)(t)} \right) \text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 dt. \quad (23)$$

Далее рассмотрим два варианта: либо $Res_{av} \leq Res$, либо $Res < Res_{av} \leq Res_{max}$, где Res_{max} — максимальное количество ресурсов, которое возможно (и более которого не нужно) использовать, сохраняя при этом “физичность” решения задачи. Под “физичностью” в описании Res_{max} понимается такое количество ресурсов, которое возможно использовать, чтобы устранить все локальные источники во все моменты времени до нулевого значения (т. е. $u_l(t) = -g_l^{em}(t)$ при $l = \overline{1, N_L} \forall t$), не нарушая при этом неравенство (18). Использование большего количества ресурсов не имеет смысла, поскольку оно нарушит “физичность” решения, так как для какого-то \tilde{l} в некоторый момент времени \tilde{t} будет $u_{\tilde{l}}(\tilde{t}) + g_{\tilde{l}}^{em}(\tilde{t}) < 0$. Формула, по которой вычисляется Res_{max} , приведена при обсуждении результатов численного моделирования. В данном параграфе рассмотрим случай $Res_{av} \leq Res$ и сформулируем одношаговый алгоритм решения исследуемой задачи. Поскольку $Res_{av} \leq Res$, а также Res и δQ связаны соотношением (22) и Res определяется по формуле (23) и если вычислять уменьшение δQ первоначального ущерба Q_0 по формуле

$$\delta Q_{av} = \frac{Res_{av} \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}{\text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 dt}, \quad (24)$$

то условие (B) (а значит, и теорема 2) будет заведомо выполнено, при этом будут израсходованы все ресурсы Res_{av} . Также отметим, что “управления”, вычисляемые по формуле (14), в которой уменьшение первоначального ущерба вычисляется из соотношения (24), доставляют функционалу (21) глобальный минимум:

$$J_{\alpha}(\phi, \mathbf{u}) = \frac{\alpha Pr^2 \delta Q_{av}^2}{2 \left(\alpha Pr^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right)^2 dt \right)}.$$

Поэтому далее можно сразу сформулировать алгоритм решения задачи вида (20) с учетом ресурсов, имеющихся на устранение локальных источников. Он состоит в следующем:

- решаем задачу (1)–(4) при $u_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$, находим ϕ_0 ;
- решаем “вспомогательную” сопряженную задачу (11), находим q ;
- находим уменьшение δQ первоначального ущерба из соотношения (24), а также первоначальный ущерб Q_0 по формуле (7);
- вычисляем “управления” u_l , $l = \overline{1, N_L}$, по формуле (14);
- решаем задачу (1)–(4) с известными “управлениями”, находим ϕ ;
- вычисляем ущерб Q , которого удалось достичь в результате управлений, по формуле (6) и сравниваем с $Q_0 - \delta Q$ (на практике эти две величины должны быть близки, поскольку для функционала (21) справедливо утверждение, аналогичное теореме 1).

В следующем параграфе рассмотрим случай $Res < Res_{av} \leq Res_{max}$ и сформулируем многошаговый алгоритм решения задачи вида (20). Отметим, что случай $Res_{av} > Res_{max}$ не имеет смысла рассматривать, поскольку невозможно удалить больше загрязняющего вещества, чем может распространиться из всех локальных источников, а Res_{max} — максимальное количество ресурсов, которое возможно использовать, не нарушая при этом соотношение (18) ни для одного источника.

3. Многошаговый алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов на устранение локальных источников

В данном параграфе рассматривается многошаговый алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба. Одношаговый алгоритм, приведенный в предыдущем параграфе, не применим для случая $Res < Res_{av} \leq Res_{max}$, поскольку тогда остается неиспользованным количество ресурсов $Res_{av} - Res$, а если бы оно было использовано, то первоначальный ущерб Q_0 был бы уменьшен значительно. Многошаговый алгоритм основан на многократном вычислении и уточнении “управлений”, однако метод реализуется в “полудискретном” случае, когда временной интервал $(0, T)$ дискретизован и число моментов времени — конечное, а область Ω , в которой рассматривается задача, не обязательно дискретизована (в отличие от одношагового алгоритма, для реализации которого не требуется дискретизации временного интервала). Несмотря на то, что алгоритм не построен для непрерывного по времени случая, он реализуем на практике, поскольку в численных экспериментах происходит дискретизация области и временного интервала.

3.1. Некоторые предположения и обозначения

Пусть временной интервал $(0, T)$, на котором рассматривается задача, дискретизован, N_t — число узлов равномерной сетки, $h_t = T/N_t$ — шаг равномерной сетки. Пусть также некоторая функция $f(t)$ — кусочно-постоянная, интегрируемая, $f(t) = f(t_i)$, $t_{i-1} < t \leq t_i$, $i = \overline{1, N_t}$. Тогда интеграл по времени от функции $f(t)$ можно заменить следующим образом:

$$\int_0^T f(t) dt = \sum_{i=1}^{N_t} f(t_i) h_t. \quad (25)$$

В дальнейшем будет подразумеваться, что для $\int_0^T f(t) dt$ выполняется соотношение (25).

Обозначим через $\tilde{u}_l^0(t_i)$ “управление” l -м источником в момент t_i на нулевом шаге алгоритма, $\tilde{u}_l^1(t_i)$ — “управление” на первом шаге алгоритма, $\tilde{u}_l^p(t_i)$ — “управление” на p -м шаге алгоритма. Тогда $g_{l,1}^{em}(t_i) = g_{l,0}^{em}(t_i) + \tilde{u}_l^0(t_i)$ — коэффициент эмиссии с учетом управлений на первом шаге алгоритма ($g_{l,0}^{em}(t_i) \equiv g^{em}$), $g_{l,p}^{em}(t_i) = g_{l,p-1}^{em}(t_i) + \tilde{u}_l^{p-1}(t_i)$ — коэффициент эмиссии с учетом управлений на p -м шаге. Пусть M_{lt}^0 — множество всех пар (l, t_i) , $l = \overline{1, N_L}$, $i = \overline{1, N_t}$. Тогда

$$\begin{aligned} M_{lt}^1 &= \{(l, t_i) \in M_{lt}^0 : g_{l,1}^{em}(t_i) > 0\}, \\ &\dots \\ M_{lt}^p &= \{(l, t_i) \in M_{lt}^{p-1} : g_{l,p}^{em}(t_i) > 0\}, \\ &\dots \\ M_{lt}^{N_p} &= \{(l, t_i) \in M_{lt}^{N_p-1} : g_{l,N_p}^{em}(t_i) > 0\}, \end{aligned}$$

где N_p — последний шаг алгоритма. В дальнейшем будет показано, что

$$M_{lt}^0 \supset M_{lt}^1 \dots \supset M_{lt}^p \dots \supset M_{lt}^{N_p}$$

и число шагов алгоритма всегда конечно.

Введем p -ю задачу оптимизации экономического ущерба: найти $\phi_{p+1} \equiv \phi_{p+1}(\alpha)$, $\tilde{u}_l^p(t_i) \equiv \tilde{u}_l^p(t_i, \alpha)$, $(l, t_i) \in M_{lt}^p$, такие, что:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial t} + b_x \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial x} + b_y \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial y} + b_z \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_{xx} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_{yy} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_{zz} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{в } \Omega \cdot (0, T), \end{aligned} \quad (26)$$

$$U_n^{(-)} \phi_{p+1} + \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial N} = 0 \quad \text{на } (\Gamma/\Gamma_2) \cdot (0, T), \quad (27)$$

$$\beta \phi_{p+1} - a_{zz} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial z} = \sum_{l=1}^{N_L} m_l(x, y, t_i) (\tilde{u}_l^p(t_i) + g_{l,p}^{em}(t_i)) \quad \text{на } \Gamma_2, \quad i = \overline{1, N_t}, \quad (28)$$

$$\phi_{p+1} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (29)$$

$$J_\alpha(\phi_{p+1}, \tilde{\mathbf{u}}^p) \rightarrow \inf_{\tilde{\mathbf{u}}^p}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{p+1}}{\partial t} &= \frac{\phi_{p+1}^i - \phi_{p+1}^{i-1}}{h_t}, \quad i = \overline{1, N_t}; \\ J_\alpha(\phi_{p+1}, \tilde{\mathbf{u}}^p) &= \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} (\tilde{u}_l^p(t_i))^2 h_t + \frac{1}{2} (Q_{p+1} + \delta Q_p - Q_p)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\text{Pr} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \tilde{u}_l^p(t_i) h_t + \text{Res}_p \right)^2; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}^p \equiv \tilde{\mathbf{u}}^p(t_i) \equiv (\tilde{u}_1^p(t_i), \dots, \tilde{u}_l^p(t_i), \dots, \tilde{u}_{N_L}^p(t_i)), \quad (l, t_i) \in M_{lt}^p;$$

ϕ_{p+1}^i — решение p -й задачи (26)–(30) на i -м шаге по времени; Q_p — первоначальный ущерб на p -м шаге; Q_{p+1} — ущерб после управлений на p -м шаге; δQ_p — уменьшение первоначального ущерба на p -м шаге; Res_p — количество ресурсов, используемое на p -м шаге. Приведем также формулы вычисления Res_p , δQ_p и $\tilde{u}_l^p(t_i)$, которые будут использованы в ходе построения метода решения:

$$\text{Res}_p = \text{Pr} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) h_t \min_{(l,t_i) \in M_{lt}^p} \left(\frac{g_{l,p}^{em}(t_i)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i)} \right), \quad p = \overline{0, N_p}, \quad (32)$$

$$\delta Q_p = \frac{\text{Res}_p \left(\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t \right)}{\text{Pr} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) h_t}, \quad p = \overline{0, N_p}, \quad (33)$$

$$\tilde{u}_l^p(t_i) = - \frac{\delta Q_p \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i)}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{lt}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t}, \quad (l, t_i) \in M_{lt}^p, \quad p = \overline{0, N_p}. \quad (34)$$

Также введем соотношение “физичности”, которое должно выполняться на каждом шаге алгоритма (по аналогии с (18)):

$$\tilde{u}_l^p(t_i) + g_{l,p}^{em}(t_i) \geq 0, \quad (l, t_i) \in M_{lt}^p, \quad p = \overline{0, N_p}. \quad (35)$$

Таким образом, вместо исходной задачи (20) будут рассматриваться N_p задач вида (26)–(30) с функционалами (31). Тем не менее физическая суть остается той же: пошагово оптимизировать первоначальный ущерб Q_0 до конечного ущерба Q_{N_p+1} , используя при этом все имеющиеся в наличии ресурсы Res_{av} . В следующем пункте опишем непосредственно алгоритм решения исследуемой задачи.

3.2. Многошаговый алгоритм решения исследуемой задачи

Вначале решаем “вспомогательную” сопряженную задачу (11), находим ее решение q , а также задачу (1)–(4) при $u_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$, находим ϕ_0 . Кроме того, вычисляем первоначальный ущерб Q_0 из соотношения (7). Далее будем пошагово формулировать алгоритм решения.

Нулевой шаг. На данном шаге решается 0-я задача оптимизации экономического ущерба (26)–(30) при $p = 0$. Все ссылки на формулы (26)–(35) даются на этом шаге для $p = 0$. Поставленную задачу решаем поэтапно. Сначала вычисляем количество ресурсов Res_0 , которое может быть использовано, по формуле (32). Случай $Res_0 \geq Res_{av}$ рассмотрен в предыдущем параграфе. Здесь предполагается, что $Res_0 < Res_{av}$, поэтому на нулевом шаге используем количество ресурсов, вычисленное по формуле (32). Далее рассчитываем уменьшение δQ_0 первоначального ущерба Q_0 на нулевом шаге из соотношения (33). По аналогии с тем, как это было показано в одношаговом алгоритме, здесь можно показать, что при выполнении (33) будет справедливо (35), что обеспечит “физичность” решений задачи (26)–(30). Следующий этап данного шага — вычисление “управлений” по формуле (34). Наконец, решаем задачу (26)–(29) с известными “управлениями”, находим ϕ_1 . Полагая $\phi \equiv \phi_1$ в формуле (6), вычисляем ущерб Q_1 и сравниваем его с величиной $Q_0 - \delta Q_0$. По аналогии с тем, как было показано в предыдущем параграфе, можно доказать, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(\phi_1, \tilde{\mathbf{u}}^0) = 0$. Выполнение последнего соотношения гарантирует, что значения величин Q_1 и $Q_0 - \delta Q_0$ на практике будут близки.

Первый шаг. Сначала вычисляем $g_{\tilde{l},1}^{em}(t_i)$ и строим множество $M_{\tilde{l}t}^1$ методом, описанным в предыдущем пункте. Покажем, что $M_{\tilde{l}t}^1 \subset M_{\tilde{l}t}^0$. Пусть

$$\left(\frac{g_{\tilde{l},0}^{em}(\tilde{t}_i)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_{\tilde{l}} q d\Gamma_2 \right) (\tilde{t}_i)} \right) = \min_{(l, t_i)} \left(\frac{g_{l,0}^{em}(t_i)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i)} \right).$$

Тогда из соотношений (32)–(34) при $p = 0$ получаем, что $\tilde{u}_{\tilde{l}}^0(\tilde{t}_i) = -g^{em}$, поэтому $g_{\tilde{l},1}^{em}(\tilde{t}_i) = 0$, следовательно, $(\tilde{l}, \tilde{t}_i) \notin M_{\tilde{l}t}^1$, но $(\tilde{l}, \tilde{t}_i) \in M_{\tilde{l}t}^0$. Итак, $M_{\tilde{l}t}^1 \subset M_{\tilde{l}t}^0$.

Также важно подчеркнуть, что на каждом шаге из рассмотрения исключается хотя бы по одному локальному источнику на одном временном интервале, поэтому число шагов описываемого здесь алгоритма будет конечным даже при наличии достаточно большого количества ресурсов, имеющегося в наличии для решения задачи оптимизации экономического ущерба.

На первом шаге решается 1-я задача оптимизации экономического ущерба (26)–(30) при $p = 1$. Метод ее решения практически дословно повторяет алгоритм решения 0-й задачи оптимизации (только на данном шаге ссылки на (26)–(35) даются при $p = 1$).

Сначала вычисляем количество ресурсов, которое может быть использовано для решения (26)–(30) по формуле (32). Отмечаем, что суммирование, как и поиск минимума в (32), происходит только по $(l, t_i) \in M_{lt}^1$. Если $Res_1 + Res_0 \geq Res_{av}$, то полагаем $Res_1 = Res_{av} - Res_0$ и решаем задачу с этим количеством ресурсов. Заметим, что в таком случае первый шаг алгоритма будет последним. Если же оказывается, что $Res_1 + Res_0 < Res_{av}$, то на первом шаге используем количество ресурсов, вычисленное по формуле (32), а первый шаг алгоритма не будет последним.

Затем рассчитываем уменьшение δQ_1 первоначального ущерба Q_1 на первом шаге, используя (33), которая гарантирует выполнение соотношения “физичности” (35). Первоначальный ущерб Q_1 — это ущерб после управлений на нулевом шаге алгоритма, он известен. Следующий этап данного шага — вычисление “управлений” из соотношения (34). Наконец, решаем задачу (26)–(29) с известными “управлениями”, находим ϕ_2 . По формуле (6) (при $\phi \equiv \phi_2$) вычисляем ущерб Q_2 и сравниваем его с величиной $Q_1 - \delta Q_1$. На практике эти две величины должны быть близки, поскольку $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(\phi_2, \tilde{\mathbf{u}}^1) = 0$ (по аналогии с доказанным ранее).

N_p -й шаг. Как и на предыдущих N_p шагах, вычисляем $g_{l, N_p}^{em}(t_i)$, строим множество $M_{lt}^{N_p}$. Пусть нами доказано, что $M_{lt}^{N_p-1}$ вложено во все построенные ранее множества M_{lt}^p , $p = \overline{0, N_p - 2}$. Покажем, что $M_{lt}^{N_p} \subset M_{lt}^{N_p-1}$. Пусть

$$\left(\frac{g_{l, N_p-1}^{em}(\hat{t}_i)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_i q d\Gamma_2 \right)(\hat{t}_i)} \right) = \min_{(l, t_i) \in M_{lt}^{N_p-1}} \left(\frac{g_{l, N_p-1}^{em}(t_i)}{\left(\int_{\Gamma_2} m_i q d\Gamma_2 \right)(t_i)} \right).$$

Тогда из (32)–(34) при $p = N_p - 1$ получаем, что $\tilde{u}_i^{N_p-1}(\hat{t}_i) = -g_{l, N_p-1}^{em}(\hat{t}_i)$, поэтому $g_{l, N_p}^{em}(\hat{t}_i) = 0$, следовательно, $(\hat{l}, \hat{t}_i) \notin M_{lt}^{N_p}$, но $(\hat{l}, \hat{t}_i) \in M_{lt}^{N_p-1}$. Итак, $M_{lt}^{N_p} \subset M_{lt}^{N_p-1}$.

На данном шаге решается N_p -я задача вида (26)–(30) при $p = N_p$, ссылки на (26)–(35) даются при $p = N_p$. Для ее решения сначала вычисляем максимальное количество ресурсов, которое может быть использовано для решения задачи, по формуле (32). Поскольку ранее предполагалось, что N_p -й шаг алгоритма — последний, то $\sum_{p=0}^{N_p} Res_p \geq Res_{av}$ и количество ресурсов, необходимое для решения задачи на N_p -м шаге, находим из уравнения

$$Res_{N_p} = Res_{av} - \sum_{p=0}^{N_p-1} Res_p. \quad (36)$$

Если бы использовалось количество ресурсов, полученное из соотношения (32), то мог бы быть перерасход ресурсов Res_{av} , имеющих в наличии, что недопустимо.

На следующем этапе рассчитываем уменьшение δQ_{N_p} первоначального ущерба Q_{N_p} из (33) (при этом используется Res_{N_p} , вычисленное по формуле (36), которое меньше максимального числа ресурсов, которое может быть использовано на данном шаге для выполнения (35), поэтому расчет δQ_{N_p} по (33) и в данном случае обеспечивает справедливость (35)). Первоначальный ущерб Q_{N_p} является ущербом после управлений на $(N_p - 1)$ -м шаге алгоритма, он известен. Далее вычисляем “управления” по фор-

муле (34). Наконец, решаем задачу (26)–(29) с известными “управлениями”, находим ϕ_{N_p+1} , вычисляем ущерб Q_{N_p+1} и сравниваем его с величиной $Q_{N_p} - \delta Q_{N_p}$. На практике эти две величины должны быть близки, поскольку, как и на всех предыдущих шагах, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(\phi_{N_p+1}, \tilde{\mathbf{u}}^{N_p}) = 0$.

Итак, многошаговый алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов на устранение источников загрязнений состоит в многократных вычислениях “управлений” $\tilde{u}_l^p(t_i)$, $p = \overline{0, N_p}$, и многократных решениях задач вида (26)–(29), он позволяет уменьшить первоначальный ущерб Q_0 до значения Q_{N_p+1} за конечное число шагов, используя при этом все выделенные ресурсы Res_{av} . Самый затратный в вычислительном плане этап на каждом шаге — решение задач вида (26)–(29) с известными “управлениями”. Отметим, что максимально $N_p = N_t \cdot N_L - 1$ (если на каждом шаге исключается лишь по одному источнику на одном временном отрезке), поэтому алгоритм, сформулированный в этом пункте, может оказаться трудно применимым на практике при $N_p \gg 1$. Обсудим далее модификацию многошагового алгоритма, в которой решаются не множество задач (26)–(29), $p = \overline{0, N_p}$, а один раз решается система уравнений, аналогичная (1)–(4).

3.3. Модификация многошагового алгоритма решения исследуемой задачи

Пусть нами уже решена “вспомогательная” сопряженная задача (11), а также задача (1)–(4) при $u_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$, нам известны их решения q и ϕ_0 соответственно. Отметим, что при решении задачи оптимизации экономического ущерба нас, как правило, интересует конечный ущерб Q , до которого возможно уменьшить первоначальный ущерб Q_0 . В терминах алгоритма, сформулированного в предыдущем пункте, $Q \equiv Q_{N_p+1}$, а Q_0 вычисляется по формуле (7). Покажем, что для гарантированного уменьшения первоначального ущерба Q_0 до конечного ущерба Q достаточно решить следующую задачу.

$$\text{Найти } \phi \equiv \phi(\alpha), \quad u_l(t_i) \equiv u_l(t_i, \alpha),$$

$$l = \overline{1, N_L}, \quad i = \overline{1, N_t}, \quad \text{такие, что выполняются (1)–(4)}$$

$$\text{и } J_\alpha(\phi, \mathbf{u}) \rightarrow \inf_{\mathbf{u}}, \quad (37)$$

где

$$J_\alpha(\phi, \mathbf{u}) = \frac{\alpha \text{Pr}^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} u_l^2(t_i) h_t + \frac{1}{2} (Q + \delta Q - Q_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} u_l(t_i) h_t + Res_{av} \right)^2; \quad (38)$$

$$u_l(t_i) = \sum_{p=0}^{N_p} \tilde{u}_l^p(t_i), \quad l = \overline{1, N_L}, \quad i = \overline{1, N_t}; \quad (39)$$

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(t_i) \equiv (u_1(t_i), \dots, u_l(t_i), \dots, u_{N_L}(t_i)) \quad \text{на } (0, T).$$

Уменьшение первоначального ущерба вычисляется из соотношения

$$\delta Q = \sum_{p=0}^{N_p} \delta Q_p. \quad (40)$$

Для вычисления Q_0 , δQ_p и $\tilde{u}_l^p(t_i)$, $p = \overline{0, N_p}$, используются формулы (7), (33) и (34) соответственно. Из формулы (36) делаем вывод, что

$$Res_{av} = \sum_{p=0}^{N_p} Res_p.$$

Отметим, что сформулированная задача (37) отличается от задачи (20) лишь тем, что интервал $(0, T)$ считается дискретизованным, вследствие чего вид функционала (38) несколько отличен от (21).

Распишем более подробно выражение в скобках во втором слагаемом функционала (38):

$$\begin{aligned} Q + \delta Q - Q_0 &= Q_{N_p+1} + \sum_{p=0}^{N_p} \delta Q_p - Q_0 = \\ &= Q_{N_p+1} \pm \sum_{p=1}^{N_p} Q_p + \sum_{p=0}^{N_p} \delta Q_p - Q_0 = \sum_{p=0}^{N_p} (Q_{p+1} + \delta Q_p - Q_p). \end{aligned}$$

Далее отметим, что

$$Q_{p+1} - Q_p = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{it}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\int_{\Gamma_2} m_l \tilde{u}_l^p q d\Gamma_2 \right) (t_i) h_t = - \frac{\delta Q_p \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{it}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{it}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{N_p} (Q_{p+1} + \delta Q_p - Q_p) &= \sum_{p=0}^{N_p} \left(\delta Q_p - \frac{\delta Q_p \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{it}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{it}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t} \right) = \\ &= \sum_{p=0}^{N_p} \left(\frac{\alpha \text{Pr}^2 \delta Q_p}{\alpha \text{Pr}^2 + \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{it}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t} \right). \end{aligned}$$

Распишем теперь выражение в скобках в третьем слагаемом функционала (38):

$$\text{Pr} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} u_l(t_i) h_t + Res_{av} = \sum_{p=0}^{N_p} \left(\text{Pr} \sum_{\substack{l=1 \\ (l,t_i) \in M_{it}^p}}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \tilde{u}_l^p(t_i) h_t + Res_p \right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N_p} \left(\frac{Res_p \Pr \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) h_t}{\Pr \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) h_t} + Res_p \right) = 0.$$

Функционал (38), таким образом, принимает вид

$$J_\alpha(\phi, \mathbf{u}) = \frac{\alpha \Pr^2}{2} \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} u_l^2(t_i) h_t + \frac{1}{2} \left(\sum_{p=0}^{N_p} \left(\frac{\alpha \Pr^2 \delta Q_p}{\alpha \Pr^2 + \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} \left(\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \right)^2 h_t} \right) \right)^2. \quad (41)$$

Из (41) следует

Теорема 3. В предположении, что $\left(\int_{\Gamma_2} m_l q d\Gamma_2 \right) (t_i) \neq 0$ хотя бы для одной пары

(l, t_i) , выполняется $\lim_{\alpha \rightarrow 0} J_\alpha(\phi, \mathbf{u}) = 0$.

Из теоремы 3 делаем вывод, что на практике, как и в одношаговом алгоритме, величина конечного ущерба Q будет близка к величине $Q_0 - \delta Q$ при малых α .

Итак, многошаговый алгоритм решения задачи оптимизации экономического ущерба (37) с учетом ресурсов на устранение источников загрязнений состоит из следующих этапов:

- решаем задачу (1)–(4) при $u_l = 0$, $l = \overline{1, N_L}$, находим ϕ_0 ;
- решаем “вспомогательную” сопряженную задачу (11), находим q ;
- вычисляем величины Q_0 , Res_0 , δQ_0 и $\tilde{u}_l^0(t_i)$ по формулам (7), (32)–(34) (при $p = 0$) соответственно;
- производим следующий цикл по p , начиная с $p = 1$, вводя при этом величину Res_{sum} (суммарное количество ресурсов за все совершенные шаги цикла), $Res_{sum} = Res_0$: (начало описания цикла по p) $p_{cur} = p$ (текущий шаг алгоритма), вычисляем Res_p из соотношения (32), если $Res_{sum} + Res_p \geq Res_{av}$, то $N_p = p$ (последний шаг алгоритма), $Res_{N_p} = Res_{av} - Res_{sum}$, пересчитываем $Res_{sum} = \sum_{\bar{p}=0}^p Res_{\bar{p}}$, вычисляем δQ_p , $\tilde{u}_l^p(t_i)$ из уравнений (33) и (34) соответственно, пересчитываем $p = p_{cur} + 1$ (фактически увеличиваем p на единицу) (конец описания цикла по p). Описанный цикл по p проводим до тех пор, пока $Res_{sum} \neq Res_{av}$ (в конце каждого шага цикла проверяем, выполняется ли это неравенство и если оно справедливо, то переходим к следующему шагу), а как только $Res_{sum} = Res_{av}$, завершаем цикл;
- вычисляем “управления” $u_l(t_i)$, $l = \overline{1, N_L}$, $i = \overline{1, N_t}$, по формуле (39) и уменьшение δQ первоначального ущерба по формуле (40);

- решаем задачу (1)–(4) с известными “управлениями”, находим ϕ ;
- вычисляем ущерб Q , которого удалось достичь в результате управлений, по формуле (6) и сравниваем с $Q_0 - \delta Q$ (на практике эти величины должны быть близки в силу теоремы 3).

В следующем параграфе приведем результаты численного эксперимента по решению рассматриваемой задачи, которые продемонстрируют эффективность работы алгоритма.

4. Результаты численного эксперимента по решению исследуемой задачи

В первом пункте настоящего параграфа приведем размерности всех величин и значения постоянных величин, а также схему дискретизации рассматриваемой задачи. Во втором пункте продемонстрируем результаты численного эксперимента по решению задачи оптимизации экономического ущерба с учетом ресурсов на устранение локальных источников.

4.1. Аспекты численной реализации

Сначала приведем размерности всех величин и функций задачи (1)–(4). Если величина постоянная, то будем приводить ее значение. Концентрация загрязнений ϕ измеряется в $\text{мг}/\text{м}^3$, вектор “управлений” \mathbf{u} — в $\text{мг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$. Коэффициент эмиссии измеряется в тех же величинах, что и “управления”, причем он постоянный во все моменты времени. Поскольку расчеты проводятся на примере СО (оксид углерода), этот коэффициент принимает постоянное значение и $g_l^{em}(t) \equiv g^{em} = 270 \text{ мг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, $l = \overline{1, N_L} \forall t$. Величины $b_x, b_y, b_z, U_n^{(-)}, U_n^{(+)}$ и β измеряются в $\text{м}/\text{с}$, причем $\beta = 0.05 \text{ м}/\text{с}$ (значение взято из [4]). Коэффициенты горизонтальной диффузии постоянны по величине, и $a_{xx} = a_{yy} = 2000 \text{ м}^2/\text{с}$, а коэффициент вертикальной диффузии — переменный, его значения здесь не приводим, а лишь отметим, что он много меньше коэффициентов горизонтальной диффузии (единица измерения $\text{м}^2/\text{с}$).

Теперь опишем размерности величин и коэффициентов, входящих в сопряженную задачу (11), а также в определение ущерба. $I_t^{\text{ннд}} \approx 2.2$ (на конец 2013 г.) — безразмерная величина, $Q_{2003}^{\text{атм}} = 144 \text{ руб.}/\text{усл. т.}$, $A^{\text{атм}} = 1 \text{ усл. т.}/\text{т}$ (для СО), σ — переменный безразмерный коэффициент. Отметим, что при численном моделировании тонны переводились в миллиграммы (мг). Учитывая, что временные параметры (T, \dots) измеряются в секундах, и вспоминая определение w , приведенное ранее в настоящей работе (которая является правой частью сопряженной задачи (11)), получаем, что w измеряется в $\text{руб.}/(\text{мг} \cdot \text{с})$. Из этой размерности и из вида “вспомогательной” сопряженной задачи получаем, что единица измерения q — $\text{руб.}/\text{мг}$, экономического ущерба Q — руб. . Стоимость тушения пожара средней интенсивности $\text{Pr} \approx 0.557 \text{ руб.}/(\text{мг}/\text{м}^2)$ (на основе информации, взятой с сайта о лесной промышленности <http://www.lesonline.ru/news/?id=210600> $\text{Pr} \approx 4.3 \text{ руб.}/(\text{мг}/\text{м}^2)$, но конкретного вещества не указано, поэтому происходил перевод этой стоимости в аналогичную для СО). Из уравнения (19), а также из размерностей \mathbf{u} и Pr заключаем, что единица измерения Res_{av} — руб. . Наконец, параметр регуляризации $\alpha = 10^{-5} \text{ с}$.

Приведем далее параметры области и сетки. Область выбиралась следующей:

$$\Omega = (35^\circ \text{ в.д.}, 42^\circ \text{ в.д.}) \times (54^\circ \text{ с.ш.}, 57^\circ \text{ с.ш.}) \times (0 \text{ км}, 1 \text{ км}),$$

где $A_1 = 35^\circ \text{ в.д.}$, $A_2 = 42^\circ \text{ в.д.}$, $B_1 = 54^\circ \text{ с.ш.}$, $B_2 = 57^\circ \text{ с.ш.}$, $C_1 = 0 \text{ км}$, $C_2 = 1 \text{ км}$.

Отметим, что при численных расчетах все эти величины переводились в метры, приближенные значения перевода данных величин показаны ниже:

$$A_1 = 2\,225\,000 \text{ м}, \quad A_2 = 2\,670\,000 \text{ м}, \quad B_1 = 5\,994\,000 \text{ м}, \quad B_2 = 6\,327\,000 \text{ м}, \\ C_1 = 0 \text{ м}, \quad C_2 = 1000 \text{ м}.$$

Расчет проводился со следующими параметрами сетки по пространству:

$$h_x = (A_2 - A_1)/N_x, \quad N_x = 147, \quad h_x \approx 3000 \text{ м}, \\ h_y = (B_2 - B_1)/N_y, \quad N_y = 110, \quad h_y \approx 3000 \text{ м}, \\ h_z = (C_2 - C_1)/N_z, \quad N_z = 20, \quad h_z = 50 \text{ м}.$$

Еще нам потребуются следующие обозначения (для “охраняемого региона” Ω_{obs}):

$A_{o,max}$ — максимальная координата по Ox , $A_{o,min}$ — минимальная координата по Ox ,

$B_{o,max}$ — максимальная координата по Oy , $B_{o,min}$ — минимальная координата по Oy .

В качестве “охраняемой зоны” Ω_{obs} брались регионы Москвы и Московской области, приближенные прямоугольниками (рис. 1). На рис. 2 показаны зоны, в которых могут возникать локальные источники (территории лесов и торфяников). Из рис. 1 видно, что в данном случае $A_{o,min} = 35^\circ 19' 48'' \text{ в.д.}$, $A_{o,max} = 39^\circ 52' 48'' \text{ в.д.}$, $B_{o,min} = 54^\circ 16' 12'' \text{ с.ш.}$, $B_{o,max} = 56^\circ 57' 00'' \text{ с.ш.}$

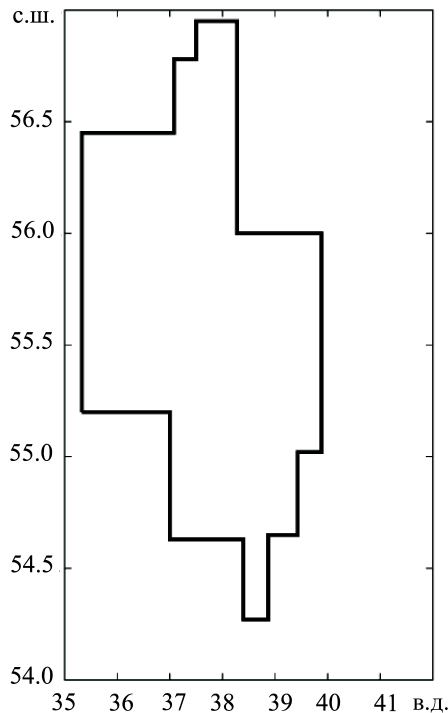


Рис. 1. “Охраняемый регион” Ω_{obs}

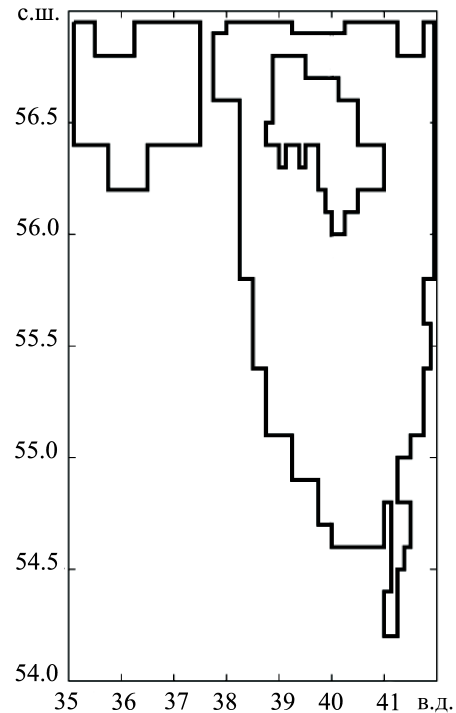


Рис. 2. Зоны лесов и торфяников

Теперь приводим временные величины:

$$T = 259\,200 \text{ с}, \quad N_t = 72, \quad h_t = 3600 \text{ с}.$$

Всего рассматривалось $N_L = 50$ локальных источников, каждый из которых был площадью в одну расчетную ячейку на границе (приблизительно 9 км^2).

В завершение описания параметров задачи оговорим, что при численном моделировании значения коэффициентов σ брались не из монографии [9], а задавались следующим соотношением (при $(x, y) \in \Omega_{obs}$):

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} 1.2 & \text{при } A_{o,\min} \leq x < \frac{A_{o,\max} + A_{o,\min}}{2}, \quad B_{o,\min} \leq y < \frac{B_{o,\max} + B_{o,\min}}{2}, \\ 3.0 & \text{при } \frac{A_{o,\max} + A_{o,\min}}{2} \leq x \leq A_{o,\max}, \quad B_{o,\min} \leq y < \frac{B_{o,\max} + B_{o,\min}}{2}, \\ 2.0 & \text{при } A_{o,\min} \leq x < \frac{A_{o,\max} + A_{o,\min}}{2}, \quad \frac{B_{o,\max} + B_{o,\min}}{2} \leq y \leq B_{o,\max}, \\ 0.7 & \text{при } \frac{A_{o,\max} + A_{o,\min}}{2} \leq x \leq A_{o,\max}, \quad \frac{B_{o,\max} + B_{o,\min}}{2} \leq y \leq B_{o,\max}. \end{cases}$$

По порядку величины эти тестовые коэффициенты совпадают с теми, что приведены в [9]. В дальнейших работах предполагается брать уже реальные коэффициенты для каждой из точек Ω_{obs} .

Отмечаем, что при численном решении задачи используется монотонная схема первого порядка точности, аналогичная той, что построена в монографии [11]. Для дискретизации по пространству использовался метод конечных объемов, а по времени — неявная схема.

Замечание 4. Следует подчеркнуть, что разностная схема, полученная по методу конечных объемов, с точностью до величин первого порядка точности по пространственным переменным совпадает со схемой, получаемой методом интегральных тождеств (см. [10], с. 324) на прямоугольной сетке с базисными функциями, которые являются произведением трех кусочно-линейных функций, поэтому применение конечно-объемного метода для численного решения исследуемой задачи оправдано. Доказательство этого факта здесь не приводится, этому предполагается посвятить отдельную публикацию.

4.2. Результаты численного эксперимента по решению рассматриваемой задачи

В рассматриваемом эксперименте расчет производился со следующими скоростями ветра:

$$b_x(x, y, z, t) = -30 \frac{T - 4t}{4T} \frac{A_2 + A_1 - 2x}{2(A_2 - A_1)}, \quad b_y(x, y, z, t) = 40 \frac{T - 4t}{4T} \frac{B_2 + B_1 - 2y}{2(A_2 - A_1)},$$

$$b_z(x, y, z, t) = -10 \frac{T - 4t}{4T} \frac{C_2 + C_1 - 2z}{2(A_2 - A_1)}.$$

Для них выполняется соотношение бездивергентности, но они — переменные по времени и по пространству. Все остальные параметры указаны в предыдущем пункте, здесь не будем их касаться.

На рис. 3 приведена зависимость “управлений” от времени, когда m_l заданы в некоторых точках. Координаты точек следующие: $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1) = (39^\circ 33' 18'' \text{ в.д.}, 55^\circ 06' 00'' \text{ с.ш.})$, $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2) = (39^\circ 39' 00'' \text{ в.д.}, 55^\circ 47' 24'' \text{ с.ш.})$, $(\tilde{A}_3, \tilde{B}_3) = (37^\circ 21' 00'' \text{ в.д.}, 56^\circ 31' 48'' \text{ с.ш.})$, $(\tilde{A}_4, \tilde{B}_4) = (36^\circ 57' 54'' \text{ в.д.}, 56^\circ 42' 00'' \text{ с.ш.})$.

“Управления” физически в основном определяются направлением и значением вектора скорости ветра: если он направлен в сторону “охраняемого региона”, то устранять локальные источники нужно с большей скоростью, чем в противном случае. Также

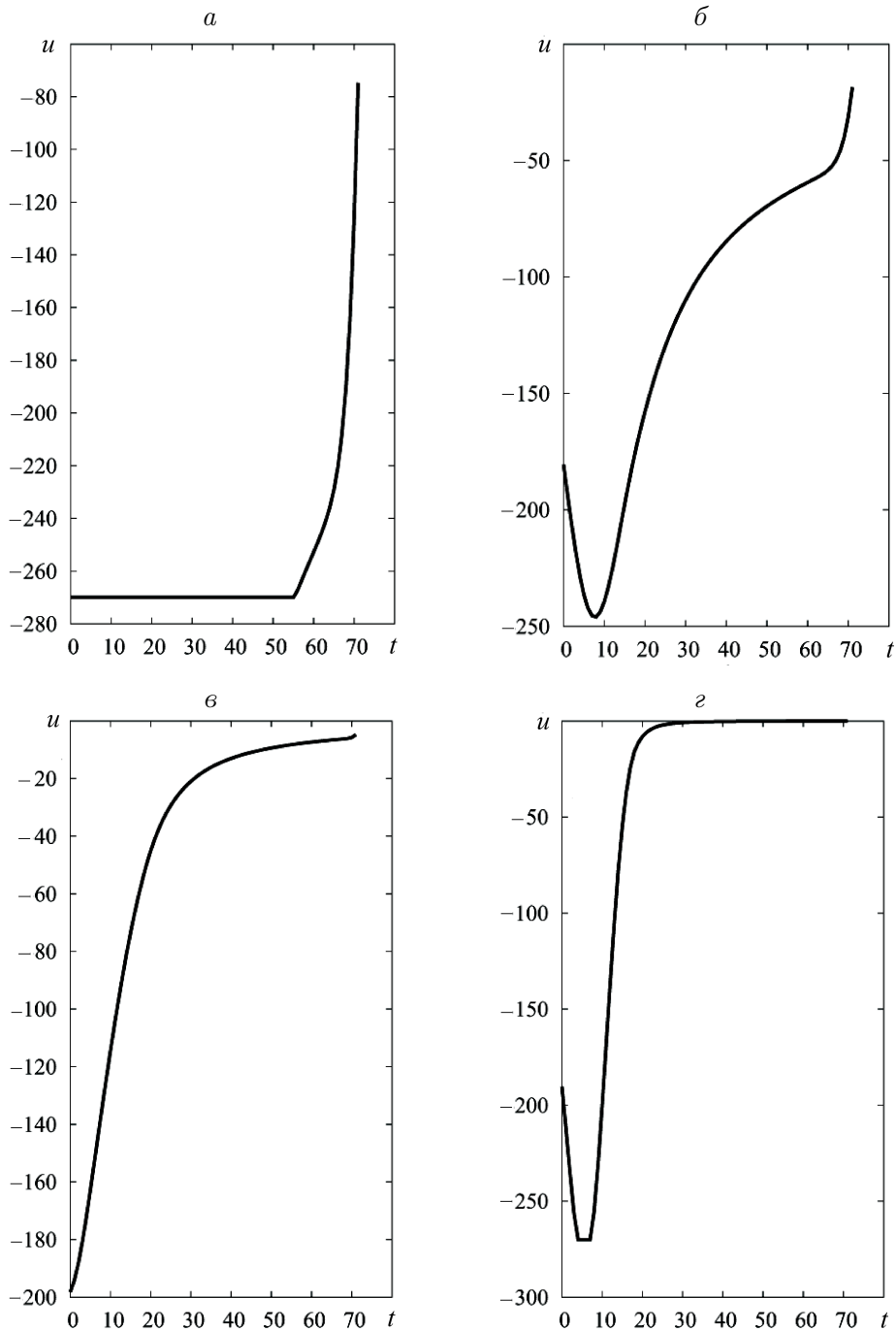


Рис. 3. “Управление” u , $\text{мг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$, в точках $(\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)$ (а), $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$ (б), $(\tilde{A}_3, \tilde{B}_3)$ (в) и $(\tilde{A}_4, \tilde{B}_4)$ (г) в зависимости от времени t , ч

значения “управлений” определяются месторасположением локальных источников: чем ближе источник загрязнений к “охраняемому региону” (или месту региона, коэффициент σ в котором наибольший), тем с большей скоростью его надо устранять. Из приведенных рисунков следует, что, решая поставленную задачу по приведенному в предыдущем параграфе алгоритму, можно оценить, на какие из регионов необходимо тратить наибольшее количество ресурсов из имеющегося количества Res_{av} (что согласуется с результатами работ [6–8]).

Математически величина “управлений” определяется функцией “чувствительности” q , которая является решением (11), а само решение зависит от скорости ветра, координаты в пространстве и др. Кроме того, величины “управлений” зависят от количества ресурсов Res_{av} .

На рис. 4 показаны значения концентрации ϕ в исследуемой области на высоте 50 м в случае, когда задача решалась с “управлениями”, вычисляемыми по формуле (39), и без “управлений”. Как и следовало ожидать, значение концентраций на графиках слева меньше, чем та же величина справа, а скорость ее устранения в конкретном месте в конкретный момент времени зависит от “управлений” (например, две группы источников, которые находятся в “охраняемом регионе”, устраняются практически до нуля, поскольку модуль величины “управлений” наибольший в этих регионах).

Количество ресурсов, которое было выделено на устранение локальных источников в данном эксперименте, $Res_{av} = 500\,000\,000$ руб. Отметим, что максимальное количество ресурсов Res_{max} вычислялось из соотношения

$$Res_{max} = Pr \sum_{l=1}^{N_L} \int_0^T g_l^{em}(t) dt \approx Pr \sum_{l=1}^{N_L} \sum_{i=1}^{N_t} g_l^{em}(t_i) h_t$$

и получилось равным $Res_{max} = 1\,950\,450\,000$ руб. (т. е. имеет место неравенство $Res_{av} \leq Res_{max}$). Уменьшение первоначального ущерба вычислялось по формуле (40), и его значение $\delta Q = 112\,538\,000$ руб. Первоначальный ущерб и ущерб, которого удалось достичь

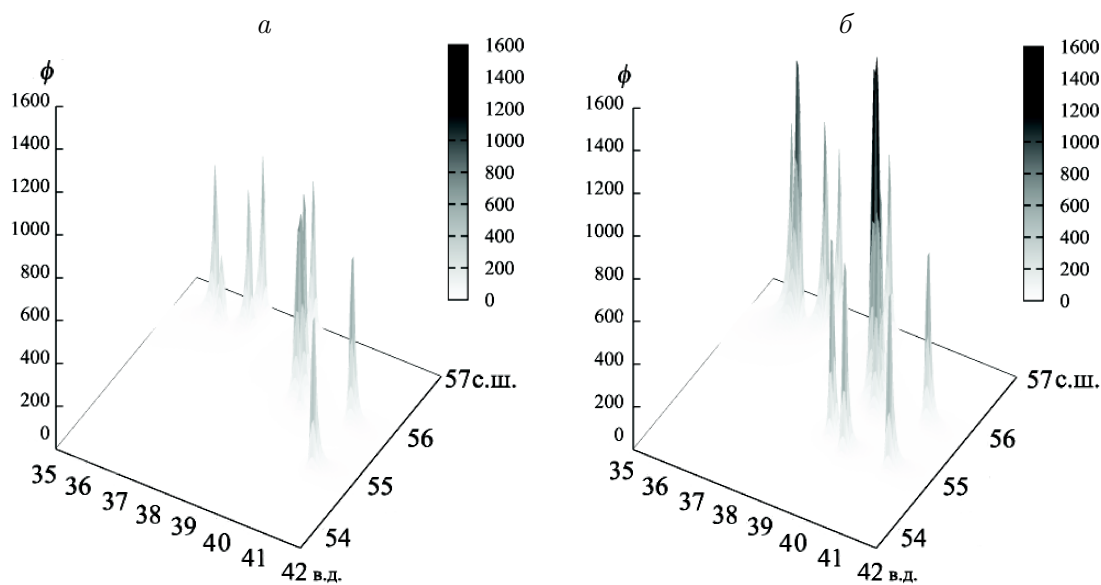


Рис. 4. Концентрация ϕ , $\text{мг}/\text{м}^3$, на высоте 50 м в момент времени $t = 12$ ч: *а* — задача с “управлениями”; *б* — задача без “управлений”

в результате “управлений”, рассчитывались из соотношений (7) и (6) соответственно, $Q_0 = 133\,762\,000$ руб. и $Q = 20\,694\,300$ руб. Разность $Q_0 - \delta Q = 21\,224\,000$ руб., что достаточно близко к величине Q (различие составляет приблизительно 2.5%). Равенства между этими величинами быть не может, поскольку в расчетах использовалась схема первого порядка точности, на каждом шаге вычислений (например, решений СЛАУ) имеют место ошибки аппроксимации и параметр регуляризации брался положительным, ненулевым. Тем не менее значения этих величин близки и результаты эксперимента иллюстрируют справедливость теоретических положений, о которых речь шла ранее. Также отметим, что в данном эксперименте первоначальный ущерб был уменьшен приблизительно в 6.5 раза.

Таким образом, в работе поставлена задача оптимизации экономического ущерба от загрязнения окружающей среды локальными источниками, предложены алгоритмы ее решения с учетом ресурсов, выделенных на ликвидацию источников загрязнений, а также приведены результаты численного эксперимента, которые иллюстрируют эффективность одного из алгоритмов и справедливость теорем, сформулированных в статье.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 14-11-00609).

Автор выражает благодарность В.И. Агошкову, В.П. Шутяеву и Н.А. Асееву за обсуждение работы и ценные замечания.

Список литературы / References

- [1] **Марчук Г.И.** Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
Marchuk, G.I. Mathematical modeling in the environmental problem. Moscow: Nauka, 1982. 319 p. (in Russ.)
- [2] **Пененко В.В., Алоян А.Е.** Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
Penenko, V.V., Aloyan, A.E. Models and methods for environmental objectives. Novosibirsk: Nauka, 1985. 256 p. (in Russ.)
- [3] **Пененко В.В.** Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 352 с.
Penenko, V.V. Methods of numerical modeling of atmospheric processes. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1981. 352 p. (in Russ.)
- [4] **Алоян А.Е.** Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей. М.: Наука, 2008. 415 с.
Aloyan, A.E. Simulation of the dynamics and kinetics of gas impurities and aerosols. Moscow: Nauka, 2008. 415 p. (in Russ.)
- [5] **Новиков И.С., Агошков В.И.** Исследование и численное решение задачи минимизации экономического ущерба от локальных источников // Тезисы докл. конф. “Ломоносовские чтения 2014”. Москва, 2014. С. 45.
Novikov, I.S., Agoshkov, V.I. Study and numerical solving the minimization problem of economic damage from local sources // Tezisy Dokl. Konf. “Lomonosov Readings 2014”. Moscow, 2014. P. 45. (in Russ.)
- [6] **Агошков В.И., Асеев Н.А., Новиков И.С.** Методы исследования и решения задач о локальных источниках при локальных или интегральных наблюдениях. М.: ИВМ РАН, 2012. 151 с.

- Agoshkov, V.I., Aseev, N.A., Novikov, I.S.** Methods of study and solving the problems on local sources under local or integrated observations. Moscow: INM RAS, 2012. 151 p. (in Russ.)
- [7] **Агошков В.И., Новиков И.С.** Задача минимизации концентрации загрязнений от пожаров в регионе // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа: Сб. науч. тр. НАН Украины, МГИ, ИГН, ОФ ИнБЮМ. Вып. 26, Т. 2. Севастополь, 2012. С. 321–338.
Agoshkov, V.I., Novikov, I.S. Problem of minimization of pollution concentration related to fires in region // Ecological safety of coastal and shelf zones and complex using of shelf resources: NAN Ukrayny. Vol. 26, No. 2. Sevastopol, 2012. P. 321–338. (in Russ.)
- [8] **Novikov, I.S.** Problem of minimization of pollution concentration related to fires in Moscow region // Russ. J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2013. Vol. 28, No. 1. P. 13–35.
- [9] Оценка воздействия промышленных предприятий на окружающую среду / **Н.П. Тарасова, Б.В. Ермоленко, В.А. Зайцев, С.В. Макаров.** М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2012. 230 с.
Impact evaluation of industry on the environment / N.P. Tarasova, B.V. Ermolenko, V.A. Zaytseva, S.V. Makarov. Moscow: BINOM, Laboratoriay Znaniy, 2012. 230 p. (in Russ.)
- [10] **Марчук Г.И., Агошков В.И.** Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
Marchuk, G.I., Agoshkov, V.I. Introduction to FEMs. Moscow: Nauka, 1981. 416 p. (in Russ.)
- [11] **Самарский А.А.** Теория разностных схем. 3-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 616 с.
Samarskii, A.A. Theory of difference schemes. Moscow: Nauka, 1989. 616 p. (in Russ.)
- [12] **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. 407 с.
Ladyzhenskaya, O.A. Boundary-value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1973. 407 p. (in Russ.)
- [13] **Агошков В.И.** Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2003. 256 с.
Agoshkov, V.I. Methods of optimal control and adjoint equations in mathematical physics. Moscow: INM RAS, 2003. 256 p. (in Russ.)
- [14] **Лионс Ж.Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных. М.: Мир, 1972. 414 с.
Lions, J.L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. New York: Springer-Verlag, 1971.
- [15] **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 552 с.
Vasiliev, F.P. Numerical methods for solving the extremal problems. Moscow: Nauka, 1988. 552 p. (in Russ.)
- [16] Математическая теория оптимальных процессов / **Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко.** М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 392 с.
Mathematical theory of optimal processes / L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskiy, R.V. Gamkrelidze, E.F. Mishchenko. Moscow: Nauka, 1983. 392 p. (in Russ.)
- [17] **Гурин Л.С., Дымарский Я.С., Меркулов А.Д.** Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. М.: Советское радио, 1968. 463 с.
Gurin, L.S., Dymarskiy, Ya.S., Merkulov, A.D. Problems and methods in optimal allocation of resources. Moscow: Soviet Radio, 1968. 463 p. (in Russ.)

- [18] **Фурсиков А.В.** Оптимальное управление распределенными системами. Новосибирск: Науч. книга, 1999. 352 с.
Fursikov, A.V. Optimal control of distributed systems. Novosibirsk: Nauchnaya Kniga, 1999. 352 p. (in Russ.)
- [19] **Вайнберг М.М.** Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979. 128 с.
Waynberg, M.M. Functional analysis. Moscow: Prosveshchenie, 1979. 128 p. (in Russ.)

*Поступила в редакцию 17 апреля 2015 г.,
с доработки — 2 июля 2015 г.*

Algorithms for solving the problem of optimization of the economic impact from environmental pollution that account the resources to eliminate local sources

NOVIKOV, IVAN S.

Institute of Numerical Mathematics RAS, Moscow, 119333, Russia

Corresponding author: Novikov, Ivan S., e-mail: nissonsiv@mail.ru

The problem of evaluation and optimization for economic damage from environmental pollution produced by local sources is an actual problem in the world today. Local sources can act as industrial pipes, as well as forest and peat fires, which make a significant contribution to air pollution (for example, summer 2010). Amount of public resources needed to eliminate pollution and its consequences. Health of people in the region of possible contamination depends on effectiveness and timeliness for solving the problem.

In this paper algorithms for solving the optimization problem of economic damage from environmental pollution, that takes into account a certain amount of resources allocated to solve the problem are presented. The solution of the problem is based on the method of “dual” representation of the residual functional and optimal control methods. The first algorithm is one-step method. It is based on the assumption that resources are sufficient only for a single-step calculation of “controls” (the laws by which it is necessary to reduce the intensity of the local sources). Another algorithm is a multistep method. “Controls” are repeatedly evaluated and refined in this method. In both methods values of “controls” depend on the available amount of resources. A monotone scheme of the first order of accuracy is used for numerical solution of the problem. In this paper the results of numerical experiment for solving the problem that illustrate the validity of the theoretical propositions of the problem and the effectiveness of the multistep algorithm are presented.

Keywords: adjoint equations, optimal control, economic damage, numerical modeling of pollutions.

Acknowledgements. The work was supported by Russian Science Foundation (project No. 14-11-00609).

Author is grateful to V.I. Agoshkov, V.P. Shutyaev and N.A. Aseev for discussions and valuable comments.

Received 17 April 2015

Received in revised form 2 July 2015