

## Устойчивость равновесия сжимаемого шара

Е. Б. ОСИПОВА

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, Владивосток, Россия

Контактный e-mail: osipov@poi.dvo.ru

В трехмерной постановке теории конечных деформаций предложен аналитический алгоритм преобразования линеаризованной системы устойчивости равновесия сжимаемого шара для произвольной формы вязкоупругого потенциала. Устойчивость равновесия исследована динамическим методом. Численно-графический тестовый анализ напряженно-деформированного состояния выполнен для сжимаемого упругого трехслойного шара.

*Ключевые слова:* конечная деформация, устойчивость равновесия, сжимаемость, вязкоупругий потенциал.

### Введение

Решение задач нелинейной механики деформируемого твердого тела различной геометрии и реологии в трехмерной постановке численно-аналитическими методами представляется актуальным направлением. Для решения этих задач достаточно распространены и успешно используются различные модификации численных методов [1–4]. Но также представляют интерес алгоритмы, основанные на получении явных решений относительно параметров, имеющих физический смысл.

В работе описан аналитический алгоритм преобразования системы уравнений устойчивости равновесия для вязкоупругого сжимаемого шара, способность к деформированию которого описывается законом состояния в произвольной форме. В сферической системе координат получено описание напряженно-деформированного состояния (НДС) в физических составляющих компонент тензора деформаций Грина, несимметричного тензора напряжений Пиола — Кирхгофа, вектора перемещений и перемещений поворота и их скоростей в явном виде. Данная методика позволяет на уровне счета конкретизировать уравнение состояния, количественно и качественно оценить порядок нелинейности параметров, вклад свойств вязкости и упругости, каждой компоненты в распределение результирующих полей НДС.

### 1. Основные соотношения теории конечных деформаций и линеаризованные уравнения теории устойчивости в ортогональных криволинейных координатах

Теория конечных деформаций позволяет удовлетворительно описывать поведение анизотропных сред без ограничений на величину деформаций с учетом возможных нели-

нейных эффектов. Исследование результирующего состояния устойчивости равновесия разделяется на изучение основного (невозмущенного) состояния и возмущенного НДС, которое представляет собой устойчивую форму равновесия и описывается соответствующими линеаризованными соотношениями [5, 6]. Используем соотношения теории конечных деформаций и их линеаризованные выражения в произвольной ортогональной криволинейной системе координат. В приведенных ниже выражениях все величины, отнесенные к основному состоянию, отмечены индексом “ $o$ ”. В основном состоянии выражения ковариантных составляющих тензора деформаций Грина  $\varepsilon_{ij}^o$  и их скоростей  $\xi_{ij}^o$  имеют вид

$$2\varepsilon_{ij}^o = \nabla_i u_j^o + \nabla_j u_i^o + \nabla_i u_m^o \nabla_j u_o^m, \quad (1)$$

$$2\xi_{ij}^o = 2\dot{\varepsilon}_{ij}^o = \nabla_i \dot{u}_j^o + \nabla_j \dot{u}_i^o + \nabla_i \dot{u}_o^m \nabla_j u_m^o + \nabla_i u_o^m \nabla_j \dot{u}_m^o, \quad (2)$$

где  $\dot{u}$  — скорость перемещений. Здесь и далее точка над переменной означает соответствующее дифференцирование по времени  $\tau$ . В возмущенном состоянии выражения ковариантных составляющих тензора деформаций Грина  $\varepsilon_{ij}$  и их скоростей  $\xi_{ij}$  могут быть записаны так:

$$2\varepsilon_{ij} = (\delta_i^m + \nabla_i u_o^m) \nabla_j u_m + (\delta_j^m + \nabla_j u_o^m) \nabla_i u_m, \quad (3)$$

$$2\xi_{ij} = (\delta_i^m + \nabla_i u_o^m) \nabla_j \dot{u}_m + (\delta_j^m + \nabla_j u_o^m) \nabla_i \dot{u}_m + \nabla_i \dot{u}_o^m \nabla_j u_m + \nabla_j \dot{u}_o^m \nabla_i u_m, \quad (4)$$

где  $\delta_i^m$  — символ Кронекера.

В общем случае для нелинейных сжимаемых вязкоупругих сред зависимость компонент симметричного тензора обобщенных напряжений  $\sigma^{in}$  от перемещений и их скоростей имеет вид [5]

$$\sigma^{in} = \lambda_1^{in\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha + \lambda_2^{in\alpha\beta} \nabla_\beta \dot{u}_\alpha, \quad (5)$$

$$\lambda_1^{in\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[ (g_m^\alpha + \nabla_m u_o^\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{m\beta}^o} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\beta m}^o} \right) + \nabla_m \dot{u}_o^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial \xi_{m\beta}^o} + \frac{\partial}{\partial \xi_{\beta m}^o} \right) \right] \Phi_o^{in},$$

$$\lambda_2^{in\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_m^\alpha + \nabla_m u_o^\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial \xi_{m\beta}^o} + \frac{\partial}{\partial \xi_{\beta m}^o} \right) \Phi_o^{in}, \quad (6)$$

где  $g_m^\alpha$  — метрический тензор;  $\Phi_o^{in} = \Phi^{in}(\varepsilon_{jm}^o, \xi_{jm}^o)$  — вязкоупругий потенциал, являющийся дважды непрерывно-дифференцируемой функцией компонент тензора деформаций Грина и их скоростей.

Используя несимметричный тензор напряжений Кирхгофа с компонентами  $t^{ij}$ , имеем линеаризованное уравнение состояния деформируемой среды:

$$t^{ij} = \varpi_1^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta u_\alpha + \varpi_2^{ij\alpha\beta} \nabla_\beta \dot{u}_\alpha, \quad (7)$$

$$\varpi_1^{ij\alpha\beta} = (g_n^j + \nabla_n u_o^j) \lambda_1^{in\alpha\beta} + g^{\alpha j} \sigma_o^{i\beta}, \quad \varpi_2^{ij\alpha\beta} = (g_n^j + \nabla_n u_o^j) \lambda_2^{in\alpha\beta}, \quad (8)$$

и линеаризованное уравнение движения в контравариантных компонентах несимметричного тензора напряжений Кирхгофа [5]:

$$\nabla_i t^{ij} - \varrho_0 \ddot{u}^j = 0, \quad (9)$$

где  $\varrho_0$  — плотность среды в недеформированном состоянии.

## 2. Постановка задачи

В соответствии с общей постановкой задачи в линеаризованной теории устойчивости равновесия [5, 6] рассмотрим неоднородное НДС сжимаемого полого шара. Решение задачи выполним в сферической системе координат  $O_{\rho\varphi\lambda}$  и физических составляющих компонент тензора деформаций Грина  $\varepsilon_{ij}$ , несимметричного тензора напряжений Кирхгофа  $t_{ij}$ , компонент вектора перемещений  $u_k$  в направлении координатных  $k$ -линий.

В основном состоянии имеем невозмущенное состояние шара, которое характеризуется радиально-симметричной деформацией. Решение в лагранжевых переменных позволяет получить в основном состоянии удлинения, перемещения и их скорости по всем координатным направлениям, соответствующие НДС.

Непосредственная подстановка в (9) выражений для физических составляющих тензора напряжений (7) после ряда тождественных преобразований и введения оператора Бельтрами

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{1}{\cos^2\varphi} \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}, \quad (10)$$

переменных  $\Theta$  и  $\omega_1$

$$\Theta = \rho \frac{\partial u_1}{\partial\rho} + \frac{\partial u_2}{\partial\varphi} + 2u_1 + \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial u_3}{\partial\lambda} + u_2 \operatorname{tg}\varphi, \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial\varphi} + u_3 \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{\cos\varphi} \frac{\partial u_2}{\partial\lambda} \right) \quad (11)$$

позволяет преобразовать линеаризованное уравнение движения (9) для произвольной формы вязкоупругого потенциала:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1\Theta + D_1\dot{\Theta} + C_2\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} + D_2\frac{\partial\dot{\Theta}}{\partial\rho} + C_3u_1 + D_3\dot{u}_1 + A_4\frac{\partial u_1}{\partial\rho} + B_4\frac{\partial\dot{u}_1}{\partial\rho} + \\ + A_5\nabla^2 u_1 + B_5\nabla^2\dot{u}_1 + A_6\frac{\partial^2 u_1}{\partial\rho^2} + B_6\frac{\partial^2\dot{u}_1}{\partial\rho^2} - \varrho_0\rho\ddot{u}_1 = 0, \\ A_{11}\nabla^2\Theta + B_{11}\nabla^2\dot{\Theta} + K_1\Theta + N_1\dot{\Theta} + K_2\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} + N_2\frac{\partial\dot{\Theta}}{\partial\rho} + A_{10}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\rho^2} + \\ + B_{10}\frac{\partial^2\dot{\Theta}}{\partial\rho^2} + K_3u_1 + N_3\dot{u}_1 + K_4\frac{\partial u_1}{\partial\rho} + N_4\frac{\partial\dot{u}_1}{\partial\rho} + K_5\frac{\partial^2 u_1}{\partial\rho^2} + N_5\frac{\partial^2\dot{u}_1}{\partial\rho^2} + \\ + K_6\frac{\partial^3 u_1}{\partial\rho^3} + N_6\frac{\partial^3\dot{u}_1}{\partial\rho^3} + A_7\nabla^2 u_1 + B_7\nabla^2\dot{u}_1 + A_8\nabla^2\frac{\partial u_1}{\partial\rho} + B_8\nabla^2\frac{\partial\dot{u}_1}{\partial\rho} - \\ - \varrho_0\rho \left( \ddot{\Theta} - 2\ddot{u}_1 - \rho\frac{\partial\ddot{u}_1}{\partial\rho} \right) = 0, \\ A_{12}\nabla^2\omega_1 + B_{12}\nabla^2\dot{\omega}_1 + L_1\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\rho^2} + M_1\frac{\partial^2\dot{\omega}_1}{\partial\rho^2} + L_2\frac{\partial\omega_1}{\partial\rho} + M_2\frac{\partial\dot{\omega}_1}{\partial\rho} + L_3\omega_1 + \\ + M_3\dot{\omega}_1 - \varrho_0\rho\ddot{\omega}_1 = 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

Линеаризованная система (12) является системой уравнений в частных производных относительно переменных, определяющих в текущей точке радиальное перемещение  $u_1 = u_1(\rho, \varphi, \lambda, \tau)$ , результирующую по главным направлениям деформацию  $\Theta/\rho = \Theta(\rho, \varphi, \lambda, \tau)/\rho$  и перемещение поворота  $\omega_1 = \omega_1(\rho, \varphi, \lambda, \tau)$ . Решение этой системы определяем методом разделения переменных:

$$u_1 = \sum_{m=0}^{\infty} u_{1m}(\rho, \tau) M_m(\mu) \cos m\lambda, \quad \mu = \sin \varphi,$$

$$\Theta = \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_m(\rho, \tau) M_m(\mu) \cos m\lambda, \quad \omega_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{1m}(\rho, \tau) M_m(\mu) \sin m\lambda. \quad (13)$$

Непосредственная подстановка выражений (13) в систему (12) с учетом представления оператора Бельтрами (10) через переменные  $\mu$ ,  $\lambda$  и свойств сферической поверхностной гармоник целого порядка  $n$  для каждого из уравнений системы дает два уравнения. Одно из них, одинаковое для всех уравнений системы, имеет вид

$$\frac{d}{d\mu}(1 - \mu^2) \frac{dM(\mu)}{d\mu} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] M(\mu) = 0.$$

Известно [7], что решением этого уравнения являются присоединенные функции Лежандра  $P_n^m(\mu)$  первого рода степени  $m$  и порядка  $n$ ,  $m \leq n$ ;  $n$  и  $m$  — параметры волнообразования, и здесь это целые неотрицательные числа. Каждое второе уравнение, полученное в результате разделения переменных в системе (12), является дифференциальным уравнением относительно коэффициентов разложения (13), зависящих от координаты  $\rho$  и параметра времени  $\tau$ . Для простоты дальнейших записей опустим индекс  $m$  в коэффициентах  $u_{1m}(\rho, \tau)$ ,  $\Theta_m(\rho, \tau)$ ,  $\omega_{1m}(\rho, \tau)$ . Соответствующая система относительно этих коэффициентов преобразуется к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \Theta_m + D_1 \dot{\Theta}_m + C_2 \frac{\partial \Theta_m}{\partial \rho} + D_2 \frac{\partial \dot{\Theta}_m}{\partial \rho} + [C_3 - n(n+1)A_5] u_{1m} + \\ + [D_3 - n(n+1)B_5] \dot{u}_{1m} + A_4 \frac{\partial u_{1m}}{\partial \rho} + B_4 \frac{\partial \dot{u}_{1m}}{\partial \rho} + A_6 \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial \rho^2} + \\ + B_6 \frac{\partial^2 \dot{u}_{1m}}{\partial \rho^2} - \varrho_0 \rho \ddot{u}_{1m} = 0, \\ [K_1 - n(n+1)A_{11}] \Theta_m + [N_1 - n(n+1)B_{11}] \dot{\Theta}_m + K_2 \frac{\partial \Theta_m}{\partial \rho} + \\ + N_2 \frac{\partial \dot{\Theta}_m}{\partial \rho} + A_{10} \frac{\partial^2 \Theta_m}{\partial \rho^2} + B_{10} \frac{\partial^2 \dot{\Theta}_m}{\partial \rho^2} + [K_3 - n(n+1)A_7] u_{1m} + \\ + [N_3 - n(n+1)B_7] \dot{u}_{1m} + [K_4 - n(n+1)A_8] \frac{\partial u_{1m}}{\partial \rho} + \\ + [N_4 - n(n+1)B_8] \frac{\partial \dot{u}_{1m}}{\partial \rho} + K_5 \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial \rho^2} + N_5 \frac{\partial^2 \dot{u}_{1m}}{\partial \rho^2} + K_6 \frac{\partial^3 u_{1m}}{\partial \rho^3} + \\ + N_6 \frac{\partial^3 \dot{u}_{1m}}{\partial \rho^3} - \varrho_0 \rho \left( \ddot{\Theta}_m - 2\ddot{u}_{1m} - \rho \frac{\partial \ddot{u}_{1m}}{\partial \rho} \right) = 0, \\ L_1 \frac{\partial^2 \omega_{1m}}{\partial \rho^2} + M_1 \frac{\partial^2 \dot{\omega}_{1m}}{\partial \rho^2} + L_2 \frac{\partial \omega_{1m}}{\partial \rho} + M_2 \frac{\partial \dot{\omega}_{1m}}{\partial \rho} + \\ + [L_3 - n(n+1)A_{12}] \omega_{1m} + [M_3 - n(n+1)B_{12}] \dot{\omega}_{1m} - \varrho_0 \rho \ddot{\omega}_{1m} = 0. \end{array} \right. \quad (14)$$

В системах (12) и (14) коэффициенты  $A_i, B_j, C_i, D_k, K_n, L_r, M_s, N_m$  — функции параметров основного состояния и физико-механических свойств среды. Дальнейшее преобразование системы (14) в общем виде очень громоздко. Преобразуем систему для

конкретного уравнения физического состояния среды и функциональной зависимости параметров от времени. Исследуем устойчивость равновесия с помощью динамического метода [8], который сводится к изучению поведения малых колебаний тела вблизи положения равновесия. Для этого представим коэффициенты разложения (13)  $u_{1_m}(\rho, \tau)$ ,  $\Theta_m(\rho, \tau)$ ,  $\omega_{1_m}(\rho, \tau)$ , входящие в линеаризованные уравнения и соответствующие граничные условия, в виде произведения амплитудного выражения величин  $u_{1_m}(\rho)$ ,  $\Theta_m(\rho)$ ,  $\omega_{1_m}(\rho)$  на временной множитель  $\exp i\varpi\tau$ , при  $\tau = 0$  имеем основное равновесное состояние. После преобразований система (14) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно собственных функций амплитудных выражений  $u_{1_m}(\rho)$ ,  $\Theta_m(\rho)$ ,  $\omega_{1_m}(\rho)$ , соответствующих собственным значениям  $\varpi_i$ . Для частного случая закона состояния в произвольной форме упругого потенциала  $\Phi^{in} = \Phi^{in}(\varepsilon_{jm})$  система (14) преобразуется к виду

$$\begin{cases} P_1 u_{1_m} + P_2 \frac{\partial u_{1_m}}{\partial \rho} + P_3 \frac{\partial^2 u_{1_m}}{\partial \rho^2} + P_4 \frac{\partial^3 u_{1_m}}{\partial \rho^3} + P_5 \frac{\partial^4 u_{1_m}}{\partial \rho^4} = 0, \\ R_1 \Theta_m + R_2 u_{1_m} + R_3 \frac{\partial u_{1_m}}{\partial \rho} + R_4 \frac{\partial^2 u_{1_m}}{\partial \rho^2} + R_5 \frac{\partial^3 u_{1_m}}{\partial \rho^3} = 0, \\ [H_1 - n(n+1)] \omega_{1_m} + H_2 \frac{\partial \omega_{1_m}}{\partial \rho} + H_3 \frac{\partial^2 \omega_{1_m}}{\partial \rho^2} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Коэффициенты  $P_i, R_j, H_l$  — функции коэффициентов упругости и параметров основного состояния. Общая структура системы дифференциальных уравнений (15) такова, что амплитудные выражения  $u_{1_m}(\rho)$ ,  $\Theta_m(\rho)$ ,  $\omega_{1_m}(\rho)$  являются собственными функциями множества собственных значений  $\varpi_i$ . Перемещения  $u_2$  и  $u_3$  определяются непосредственно из данной системы:

$$\begin{aligned} u_2 &= \sum_{m=0}^n u_{2_m}(\rho, \tau) \Re_2 [P_n^m(\mu)] \cos m\lambda, \\ u_3 &= \sum_{m=0}^n u_{3_m}(\rho, \tau) \Re_3 [P_n^m(\mu)] \sin m\lambda, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\Re_2 [P_n^m(\mu)]$ ,  $\Re_3 [P_n^m(\mu)]$  — дробно-рациональные функции от присоединенных функций Лежандра. Они имеют устранимые разрывы в точках, где их знаменатели обращаются в нуль. Конкретизация закона состояния и подстановка соответствующих перемещений, компонент тензора деформаций и напряжений в граничные условия, в которых имеет место аналогичное разделение переменных, позволяют получить выражения коэффициентов разложения (13) и (16).

### 3. Результаты тестового численно-графического анализа

Рассмотрим устойчивость равновесия сжимаемого трехслойного полого упругого шара под действием внутреннего следящего давления интенсивности  $\tilde{p}$  в поле силы тяжести, дневная поверхность  $\rho = \rho_4$  которого свободна от нагружения. На поверхностях  $\rho = \rho_i$ ,  $i = \overline{2, 3}$ , контакта слоев приняты условия скольжения. При этом учитываем изменение элементарной площадки на внутренней поверхности шара и полагаем, что

изменение интенсивности давления в момент потери устойчивости не происходит. Индекс над параметром определяет его принадлежность к соответствующему слою. Имеем

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{matrix} {}^{(3)} t_{\rho\rho} = {}^{(3)} t_{\rho\varphi} = {}^{(3)} t_{\rho\lambda} \\ \rho = \rho_4 \end{matrix} \right| = 0; \\
& \left. \begin{matrix} {}^{(3)} t_{\rho\rho} = {}^{(2)} t_{\rho\rho} \\ \rho = \rho_3 \end{matrix} \right|, \quad \left. \begin{matrix} {}^{(3)} u_1 = {}^{(2)} u_1 \\ \rho = \rho_3 \end{matrix} \right|, \quad \left. \begin{matrix} {}^{(3)} t_{\rho\varphi} = {}^{(2)} t_{\rho\varphi} = {}^{(3)} t_{\rho\lambda} = {}^{(2)} t_{\rho\lambda} \\ \rho = \rho_3 \end{matrix} \right| = 0; \\
& \left. \begin{matrix} {}^{(2)} t_{\rho\rho} = {}^{(1)} t_{\rho\rho} \\ \rho = \rho_2 \end{matrix} \right|, \quad \left. \begin{matrix} {}^{(2)} u_1 = {}^{(1)} u_1 \\ \rho = \rho_2 \end{matrix} \right|, \quad \left. \begin{matrix} {}^{(2)} t_{\rho\varphi} = {}^{(1)} t_{\rho\varphi} = {}^{(2)} t_{\rho\lambda} = {}^{(1)} t_{\rho\lambda} \\ \rho = \rho_2 \end{matrix} \right| = 0; \\
& \left. \begin{matrix} {}^{(1)} t_{\rho\rho} = -\tilde{p} \lambda^o \left[ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} + \varepsilon_{\lambda\lambda}^{(1)} \right] \\ \rho = \rho_1 \end{matrix} \right|, \quad \left. \begin{matrix} {}^{(1)} t_{\rho\varphi} = {}^{(1)} t_{\rho\lambda} \\ \rho = \rho_1 \end{matrix} \right| = 0. \quad (17)
\end{aligned}$$

Подстановка решения (13) в систему уравнений (15) для каждого слоя шара и граничные условия (17) приводит к системе однородных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с особой регулярной точкой  $\rho = 0$  относительно коэффициентов разложения  $\omega_{1_m}(\rho)$  (третье уравнение системы (15)) и системе однородных линейных дифференциальных уравнений 4-го порядка с особой регулярной точкой  $\rho = 0$  относительно коэффициентов разложения  $u_{1_m}(\rho)$  (первое уравнение системы (15)).

Для решения этих систем и определения коэффициентов используем метод Фробениуса [9]. В результате решения обеих систем имеем множество собственных функций (разложений  $\omega_{1_m}(\rho)$  и  $u_{1_m}(\rho)$ ) с точностью до одной константы в разложении перемещения  $u_{1_m}(\rho)$  и соответствующих собственных значений  $\varpi_i$ . Численное значение этой константы получаем из физически возможного значения для скорости перемещений.

В приведенных расчетах константа вычислена из условия значения средней скорости перемещения  $u_1$ , равного 5 мм в год. Коэффициенты разложения  $\Theta_m(\rho)$  получают непосредственно из второго уравнения системы (15). Коэффициенты разложения (16) находятся также непосредственно в результате тождественных преобразований из определенных ранее выражений для  $\Theta_m(\rho)$ ,  $\omega_{1_m}(\rho)$  и  $u_{1_m}(\rho)$ . Аналитические преобразования и численно-графический анализ выполнены в системе Wolfram Research Mathematica (WRM). Устойчивость численных алгоритмов, используемых в системе WRM, и их сходимость к решению соответствующих уравнений и систем уравнений доказаны в общем виде.

В геофизических исследованиях математическое моделирование НДС упругого шара достаточно распространено [7, 10, 11]. Используем геофизические данные неоднородностей до глубины 420 км, обобщенные в параметрических моделях Земли РЕМ [12]. Модель РЕМ-А является средней и обобщающей свойства континентальной РЕМ-С и океанической РЕМ-О. Численно-графический анализ выполнен для трехслойной модели РЕМ-А с выраженными физико-механическими свойствами слоев шара [12] (табл. 1).

Верхний слой моделирует литосферу мощностью  $h_3 = 80$  км при  $6291 \leq \rho \leq 6371$  км, средний слой — астеносферу мощностью  $h_2 = 140$  км при  $6151 \leq \rho \leq 6291$  км, нижний слой — подастеносферную мантию мощностью  $h_1 = 200$  км при  $5951 \leq \rho \leq 6151$  км,  $H = h_1 + h_2 + h_3 = 420$  км. Для расчетов ограничимся основной частью упругого потенциала Мурнагана [13] в виде

$$\Phi = \frac{\lambda^{(i)}}{2} \left( \varepsilon_{\rho\rho}^{(i)} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)} + \varepsilon_{\lambda\lambda}^{(i)} \right)^2 + \mu^{(i)} \left( \varepsilon_{\rho\rho}^{(i)2} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(i)2} + \varepsilon_{\lambda\lambda}^{(i)2} \right), \quad \Phi = O \left( \varepsilon_{jj}^{(i)2} \right) \text{ при } \varepsilon_{jj}^{(i)} \rightarrow 0. \quad (18)$$

Т а б л и ц а 1. Значения упругих постоянных, коэффициентов жесткости, плотности для  $i$ -го слоя шара в модели РЕМ-А

Постоянные	Нижний слой, $i = 1$	Средний слой, $i = 2$	Внешний слой, $i = 3$
Коэф. упругости $\lambda$ , ГПа $\overset{(i)}{\lambda}$	110.80	83.56	39.65
Коэф. жесткости $\mu$ , ГПа $\overset{(i)}{\mu}$	75.00	63.80	42.73
Плотность $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup> $\overset{(i)}{\rho_0}$	3300	3200	3100

Движение среды в основном состоянии характеризуется радиально-симметричной деформацией [14]. В полярной системе координат приведены графики амплитудных значений компонент тензора и интенсивности деформаций в возмущенном состоянии (рис. 1).

Конфигурация кривых и изменения значений компонент деформаций по глубине шара в сечении  $\varphi = \pi/4$  при  $0 \leq \lambda \leq \pi/2$  определяют осесимметричное устойчивое состояние равновесия. Неоднородность в этих сечениях характеризуется зонами утонения (отрицательная деформация) и утолщения (положительная деформация) слоев и определяющим значением компоненты  $\overset{(i)}{\varepsilon}_{\varphi\varphi}$ . Изменения радиальных деформаций  $\overset{(i)}{\varepsilon}_{\rho\rho}$  внутри каждого слоя являются бесконечно малыми величинами и составляют  $10^{-10}$ – $10^{-9}$ , что соответствует заданным граничным условиям (17). Для оценки результирующего деформирования используем интенсивность деформации — положительную функцию всех компонент тензора деформаций Грина в текущей точке. Имеем

$$\overset{(i)}{\varepsilon}_n = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\overset{(i)}{\varepsilon}_{\rho\rho} - \overset{(i)}{\varepsilon}_{\varphi\varphi}\right)^2 + \left(\overset{(i)}{\varepsilon}_{\varphi\varphi} - \overset{(i)}{\varepsilon}_{\lambda\lambda}\right)^2 + \left(\overset{(i)}{\varepsilon}_{\lambda\lambda} - \overset{(i)}{\varepsilon}_{\rho\rho}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\overset{(i)}{\varepsilon}_{\rho\varphi}^2 + \overset{(i)}{\varepsilon}_{\varphi\lambda}^2 + \overset{(i)}{\varepsilon}_{\rho\lambda}^2\right)}.$$

Из сравнительного анализа расчетных данных компонент деформации и интенсивности деформаций  $\overset{(i)}{\varepsilon}_n$  (рис. 1) очевидно, что в этом сечении внешний слой, моделирующий литосферу, подвержен большему деформированию, чем внутренний. Все компоненты деформирования определяют изменение конфигурации границы слоев от круглой (в основном состоянии) к эллиптической (в возмущенном).

Рассмотрим результаты расчета возможных полей НДС во внешнем слое, моделирующем дневную поверхность литосферы в области Центральных Курил (45.5–48° с.ш., 150.5–155.5° в.д.). На рис. 2 представлены графики интенсивности деформаций и контурные графики, построенные по данным цифровой модели рельефа ЕТОРО2 на дневной поверхности ( $\rho = 6371$  км) [15].

В расчетной области значения интенсивности деформаций изменяются в пределах  $0.0015 \leq \overset{(3)}{\varepsilon}_n \leq 13.9168$ . Но способность к деформированию также характеризуют значения градиентов интенсивности деформаций относительно смежных точек, которые составляют интервал  $0 \leq \overset{(3)}{\varepsilon}'_n \leq 1.33$ . Распределение неоднородностей имеет место и для других параметров НДС. В табл. 2 приведены расчетные значения компонент вектора перемещений и перемещений поворота на дневной поверхности обстановки Централь-ных Курил.

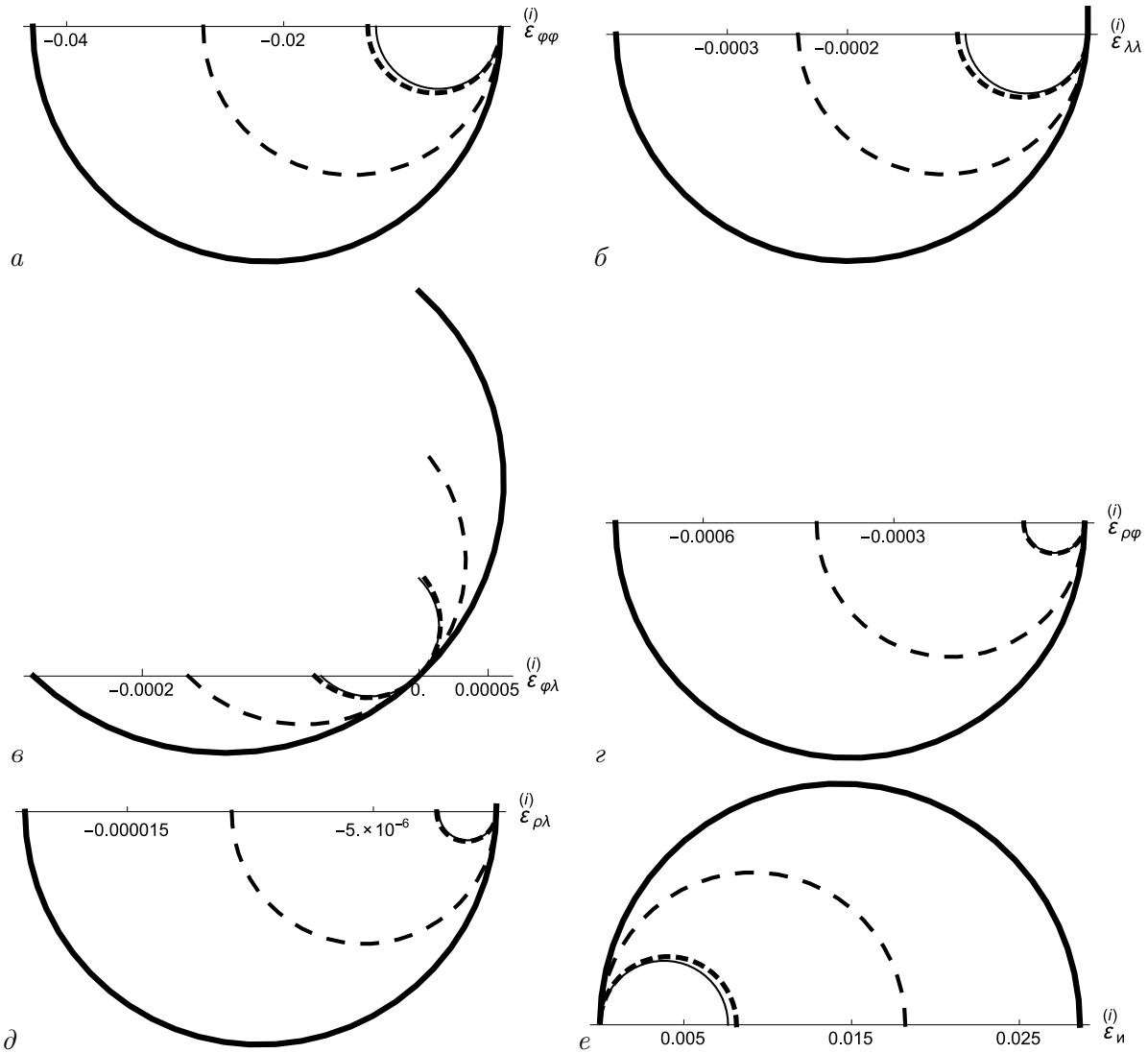


Рис. 1. Графики амплитудных значений компонент тензора деформаций (a-d) и интенсивности (e) деформаций в возмущенном состоянии при  $0 \leq \lambda \leq \pi/2$  в сечениях:  $\varphi = \pi/4$ ,  $\rho = 5951$  (тонкие сплошные линии);  $\varphi = \pi/4$ ,  $\rho = 6151$ ,  $\rho = 6291$  (штриховые линии);  $\varphi = \pi/4$ ,  $\rho = 6371$  (сплошные линии)

Т а б л и ц а 2. Значения компонент вектора перемещений  $u_i^{(3)}$  и перемещений поворота  $\omega_i^{(3)}$  обстановки Центральных Курил

Компонента	Значения на дневной поверхности ( $\rho = 6371$ км)
$u_1^{(3)}$	$[-10^{-6}; 10^{-9}]$
$u_2^{(3)}$	$[-0.102; 144.844]$
$u_3^{(3)}$	$[0.025; 0.453]$
$\omega_1^{(3)}$	$[-0.958; -0.725]$
$\omega_2^{(3)}$	$[-0.0002; -10^{-6}]$
$\omega_3^{(3)}$	$[-0.045; -0.00005]$



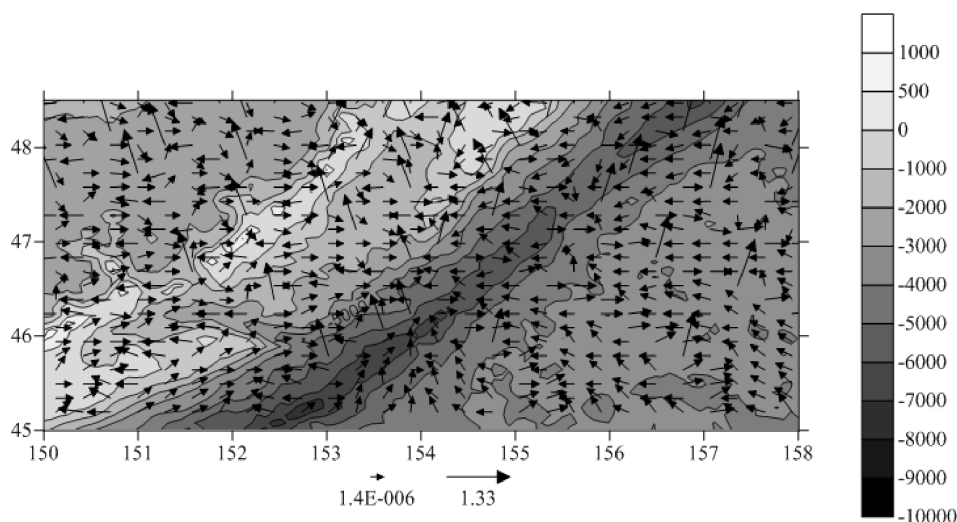


Рис. 2. Распределение градиентов интенсивности деформаций на дневной поверхности (6371 км) и контурные графики обстановки Центральных Курил, построенные по данным цифровой модели ЕТОРО2

В общем случае малое перемещение среды как твердого тела является геометрической суммой линейных перемещений  $u_i$  точки и перемещений поворота  $\omega_j$  вокруг этой точки. В радиально-симметричном основном состоянии составляющие перемещения поворота равны нулю [7]. В возмущенном состоянии распределение перемещений поворота характеризует перемещение поворота точек и они имеют такой же порядок, как и линейные перемещения точек, указанные в табл. 2. В табл. 3 приведены расчетные значения компонент тензора Кирхгофа на дневной поверхности и на глубине 20 км обстановки Центральных Курил.

Т а б л и ц а 3. Значения компонент тензора Кирхгофа  $t_{ij}^{(3)}$  обстановки Центральных Курил, ГПа

Компонента тензора Кирхгофа	На дневной поверхности	На глубине 20 км
$t_{\rho\rho}^{(3)}$	[-137.333; 37.640]	[-0.065; 450.197]
$t_{\varphi\varphi}^{(3)}$	[1.948; 17801.700]	[1.940; 17690.700]
$t_{\lambda\lambda}^{(3)}$	[-33.039; 22.801]	[-33.039; 22.801]
$t_{\rho\varphi}^{(3)}$	[0.095; 83.210]	[1.686; 1480.030]
$t_{\rho\lambda}^{(3)}$	[-0.088; -0.004]	[-0.088; -0.004]
$t_{\varphi\lambda}^{(3)}$	[0.142; 20.559]	[0.142; 20.559]
$t_{\varphi\rho}^{(3)}$	[-5.862; -0.007]	[-1403.930; -1.599]
$t_{\lambda\varphi}^{(3)}$	[-0.341; 19.970]	[-0.341; 19.970]
$t_{\lambda\rho}^{(3)}$	[0.012; 0.328]	[0.012; 0.328]
$T_{и}^{(3)}$	[1.920; 17848.387]	[3.843; 17721.250]

Распределение возможных полей НДС обусловлено граничными условиями, неоднородностью физико-механических свойств слоев и законом состояния, которым определяется способность к деформированию слоев среды. Как следствие, имеем соответствующие поля градиентного распределения компонент и результирующих параметров НДС. По данным расчетов компонент напряжений  $t_{\rho\rho}^{(3)}$ ,  $t_{\rho\varphi}^{(3)}$ ,  $t_{\varphi\rho}^{(3)}$  определена вертикальная неоднородность по плотности, упругости и жесткости, что соответствует заданным условиям — кусочной однородности по слоям. По значениям других компонент тензора напряжений очевидно, что горизонтальной дифференциации свойств слоев шара нет, но при этом отсутствуют симметрия распределения напряжений и горизонтальная неоднородность градиентов компонент.

На рис. 3 представлено поле распределения градиентов интенсивности напряжений на дневной поверхности и на глубине 20 км. В расчетной области значения интенсивности напряжений на дневной поверхности изменяются в пределах  $1.920 \leq T_{\text{и}}^{(3)} \leq 17\,848.387$ , значения градиентов интенсивности напряжений относительно смежных точек составляют интервал  $0.0012 \leq T_{\text{и}}^{(3)} \leq 1704.73$ ; значения интенсивности напряжений на глубине 20 км изменяются в пределах  $3.843 \leq T_{\text{и}}^{(3)} \leq 17\,721.250$ , значения градиентов интенсивности напряжений относительно смежных точек составляют интервал  $0.0021 \leq T_{\text{и}}^{(3)} \leq 1690.21$ .

Установлено, что усложненное взаимодействие и активные зоны определяются на глубине 20 км, на дневной поверхности имеем их проекцию. При этом выход на дневную поверхность сопровождается расширением зоны и интервального значения напряжений. Но, как следует из графиков полей распределения интенсивности напряжений (рис. 3), горизонтальная и вертикальная дифференциация среды в значительной степени зависит от градиентного распределения значений напряжений — чем больше значения градиентов напряжений в определенном направлении, тем более вероятно в этом месте и направлении усиление движения. Каждая из этих зон активна, но они имеют в резерве разные градиенты напряжений, соответственно и разные потенциалы к дефор-

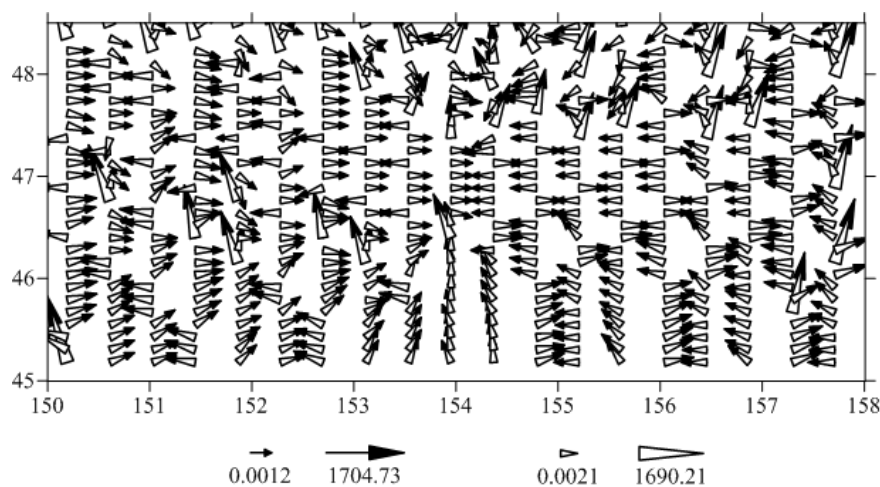


Рис. 3. Графики распределения градиентов интенсивности напряжений на дневной поверхности (черные стрелки) и на глубине 20 км (светлые треугольные стрелки) обстановки Центральных Курил

мированию. Поэтому при любом тектоническом (любого происхождения и механизма) воздействии на область в указанных зонах будем иметь разные деформационные отклики по величине и направлению. Некоторые из указанных зон могут разрядиться, напряжения в текущих точках достигнут равных значений, одновременно в других зонах моделируемой области может произойти усиление градиента напряжений. Закономерности “разрядки и усиления” указанных зон можно смоделировать дополнительно с учетом направленности и механизма тектонического воздействия.

## Выводы

Полученное решение позволяет детально описать НДС шара заданной реологии и способность к деформированию его в каждой текущей точке, определить вклад каждой компоненты векторов линейных перемещений и перемещений поворота, тензоров деформаций и напряжений в возможные поля градиентного распределения результирующих параметров. При этом особенности распределения возможных полей, характеризующих НДС, обусловлены граничными условиями, неоднородностью заданных физико-механических свойств слоев и законом состояния, которым определяется способность к деформированию слоев среды. Поведение всех параметров отражает общую картину устойчивого состояния равновесия, которое характеризуется: зонами искривления сферического контура шара, полями перемещений, перемещений поворотов с преобладанием горизонтальных перемещений над вертикальными, связью напряжений и деформаций на поверхностных и глубинных уровнях, результирующим полем распределения интенсивности градиентов НДС, обеспечивающим возможное локальное проявление активности и вероятное пространственное структурно-вещественное перераспределение слоев, появление зон уплотнения (разуплотнения).

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-05-06638).

## Список литературы / References

- [1] **Солодовников В.Н.** К теории деформирования изотропных гиперупругих тел // ПМТФ. 2004. № 1. С. 99–106.  
**Solodovnikov, V.N.** Theory of deformation of isotropic hyperelastic bodies // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2004. Vol. 45, No. 3. P. 82–88.
- [2] **Голованов А.И., Султанов Л.У.** Численное исследование гиперупругих тел с использованием левого тензора Коши – Грина // Вест. МАИ. Прикладная математика, механика, физика. 2009. Т. 16, № 7. С. 110–118.  
**Golovanov, A.I., Sultanov, L.U.** Computational investigation of hyperelastic solids using left Cauchy-Green deformation tensor // Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta. 2009. Vol. 16, No. 7. P. 110–118. (in Russ.)
- [3] **Бажин А.А., Мурашкин Е.В.** Математическое моделирование усложненных реологических свойств материалов в условиях больших деформаций // Вест. Чувашского гос. пед. ун-та. им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 71–76.  
**Bazhin, A.A., Murashkin, E.V.** The mathematical modelling of the complicated rheological properties of the materials in the conditions of the big deformations // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Mechanics of Limit State. 2010. No. 2(8). P. 71–76. (in Russ.)

- [4] **Бажин А.А., Лемза А.О., Мурашкин Е.В.** Сферически симметричное деформирование упругоползучепластических материалов // Вест. Чувашского гос. пед. ун-та. им. И.Я. Яковлева. Механика предельного состояния. 2013. № 2(16). С. 16–22.  
**Bazhin, A.A., Lemza, A.O., Murashkin, E.V.** Spherical and symmetrical deformation of creeping elastoplastic material // I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University Bulletin. Mechanics of Limit State. 2013. No. 2(16). P. 16–22. (in Russ.)
- [5] **Гузь А.Н.** Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 511 с.  
**Guz, A.N.** Fundamentals of three dimensional stability theory of deformable bodies. Kiev: Vishcha Shkola, 1986. 511 p. (in Russ.)
- [6] **Biot, M.A.** Non-linear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress // Philosophical Magazine. 1939. Vol. 27. P. 89–115.
- [7] **Лурье А.И.** Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.  
**Lurye, A.I.** Theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1970. 939 p. (in Russ.)
- [8] **Болотин В.В.** Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.  
**Bolotin, V.V.** A non-conservative problem of stability in elasticity theory. Moscow: Fizmatgiz, 1961. 339 p. (in Russ.)
- [9] **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.  
**Kamke, E.** Differential gleichungen losungsmethoden und losungen. Leipzig: Akademische Verlags gesellschaft, 1959. 576 p. (in Russ.)
- [10] **Лейбензон Л.С.** Деформация упругой сферы в связи с вопросом о строении Земли // Собр. трудов. М.: Изд-во АН СССР, 1955. Т. 10. С. 186–270.  
**Leibenzon, L.S.** The strain in elastic sphere with application to the Earth structure // Sbornie trudov. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1955. Vol. 10. P. 186–270. (in Russ.)
- [11] **Медведев Н.И.** Об одной модели распределения деформаций в коре и мантии сферически симметричной Земли // Геофизические поля и моделирование тектоносферы. Геодинамика тектоносферы зоны сочленения Тихого океана с Евразией. Южно-Сахалинск: Ин-т морской геологии и геофизики ДВО РАН, 1997. Т. 3. С. 149–152.  
**Medvedev, N.I.** On the strain allocation model in crust and mantle of spherically symmetrical Earth // Geophysical field and modelling tectonosphere. Geodynamics of a junction zone of the Pacific and Eurasia tectonosphere. Yuzhno-Sakhalinsk: Institut Morskoy Geologii i Geofiziki DVO RAN, 1997. Vol. 3. P. 149–152. (in Russ.)
- [12] **Dziewonski, A.M., Hales, A.L., Lapwood, E.R.** Parametrically simple Earth models consistent with geophysical data // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 1975. Vol. 10. P. 12–48.
- [13] **Murnaghan, F.D.** Finite deformation of an elastic solid. New York: Wiley, 1951. 140 p.
- [14] **Осипова Е.Б.** Конечные деформации и устойчивость равновесия сжимаемого упругого полого шара при следящем внутреннем давлении // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12, № 6. С. 79–86.  
**Osipova, E.B.** Finite strain and equilibrium stability in a compressed elastic hollow sphere with the internal follow-up pressure // Fizicheskaya Mezomekhanika. 2009. Vol. 12, No. 6. P. 79–86. (in Russ.)
- [15] National Geophysical Data Center. Available at: <http://topex.ucsd.edu> (accessed 15.04.2015).

*Поступила в редакцию 27 мая 2015 г.,  
с доработки — 4 сентября 2015 г.*

## On the stability of equilibrium in a compressed sphere

OSIPOVA, ELENA B.

V.I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch of RAS, Vladivostok, 690041, Russia

Corresponding author: Osipova, Elena B., e-mail: [osipov@poi.dvo.ru](mailto:osipov@poi.dvo.ru)

Using the general three-dimensional formulation of finite deformation theory, an analytical algorithm for transforming a linearized equilibrium stability system in a compressed sphere is proposed for an arbitrary viscoelastic potential. The stress and strain state of the medium is described using the asymmetric Piola-Kirchhoff stress tensor and the Green strain tensor components. Study of the stability of equilibrium is divided into the basic (unperturbed) state and the perturbed stress and strain state, which is the stable form of equilibrium and is described by relevant linearized relations. The solution of the problem in the spherical coordinate system is obtained using the method of separation of variables with respect to the radial displacement, displacement due to rotation, the resulting strain in the principal directions and to their velocities. Equilibrium stability is determined dynamically. Numerical and graphical analysis for stress and strain state is carried out for a compressed elastic three-layer sphere. The analysis is used to investigate the tectonic effects of its own gravitation and the internal follow-up pressure at boundaries of the spheres, which model the lithosphere, the asthenosphere and the subasthenospheric mantle. The obtained displacement, rotation, and strain fields are determined by the set of physical and mechanical properties and boundary conditions. The behavior of the parameters describes the state of stable equilibrium, which is characterized by the presence of curvature zones of the contour of the sphere, the resulting field of stress gradients, the predominance of horizontal displacements over vertical displacements, and the relationship between the strains at the surface and deep levels.

*Keywords:* finite strain, equilibrium stability, compressibility, viscoelastic potential.

**Acknowledgements.** This research was partly supported by RFBR (grant No. 15-05-06638).

*Received 27 May 2015*

*Received in revised form 4 September 2015*