Вычислительные технологии **Том 22, № 1, 2017**

Об одном подходе к расчету времени ожидания обслуживания при распределенной обработке данных

А. А. Назаров[1,*], Д. М. Сонькин[2]

[1]Томский государственный университет, Россия
[2]Томский политехнический университет, Россия
[*]Контактный e-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Рассматривается система массового обслуживания M|GI|1 с очередью с бесконечным числом мест для ожидания и “прогулками” прибора. Прибор обслуживает заявки, накопившиеся в очереди, пока она не окажется пустой в течение случайного времени. После этого прибор мгновенно уходит на “прогулку”. Во время прогулки заявки в системе накапливаются, но не обслуживаются. После прогулки прибор приступает к обслуживанию накопленных заявок в очереди, а также обслуживает все заявки, которые поступают в течение всего текущего режима доступности до полного исчерпания всех заявок. Ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в очереди и времени ожидания обслуживания в рассматриваемой системе с “прогулками” прибора и полным исчерпанием заявок.

Ключевые слова: система массового обслуживания с “прогулками” прибора, обслуживание до полного исчерпания, поллинг-система, время ожидания.

Введение

При проектировании систем с распределенной обработкой данных, состоящих из множества вычислительных узлов (приборов обслуживания, далее — просто приборов), необходимо учитывать ситуации, когда один или несколько вычислительных узлов становятся недоступными ввиду перегруженности, отсутствия каналов связи и других причин [1]. В течение этого времени вычислительный узел не обслуживает заявки, которые могут накапливаться в очереди или распределяться на другие вычислительные узлы. Математическими моделями таких реальных систем являются системы с ненадежным прибором или системы с “прогулками” прибора [2–4].

Такие системы также широко используются в качестве метода исследования систем с входящими K-потоками (систем поллинга) [5, 6]. Это модели с несколькими очередями и прибором или несколькими приборами, которые подключаются к очередям по определенному правилу и обслуживают находящиеся в них заявки. В этом случае выделяется один поток заявок, а под “прогулкой” понимается время, которое тратит прибор для обслуживания заявок из остальных очередей.

Дисциплина обслуживания очередей для систем с “прогулками” прибора такая же, как и для систем поллинга. Приведем основные дисциплины обслуживания [7, 8]:

1) исчерпывающая дисциплина, при которой сервер обслуживает заявки до тех пор, пока очередь не опустеет;
2) T-ограниченная дисциплина, при которой время пребывания сервера у очереди ограничено величиной T.

Развитие информационных технологий является стимулом для решения задач в различных отраслях экономики, техники, медицины, компьютерных наук, военной промышленности [9, 10, 11]. Для исследования как минимум двух основных составляющих информационных технологий — обработки и передачи данных — применяется аппарат теории массового обслуживания. На основе реальных информационных систем создаются системы и сети массового обслуживания [12, 13], для адекватного моделирования и исследования которых необходимо знать и учитывать специфические особенности изучаемых систем. Это может относиться к числу обслуживающих приборов, количеству очередей, процессу обработки сообщений, дисциплине обслуживания. Не менее важно учитывать приоритетность обслуживания, периоды простоя системы, чтобы обеспечить своевременность передачи некоторых классов сообщений. Все это указывает на практическую необходимость развития аналитических решений в этой области.

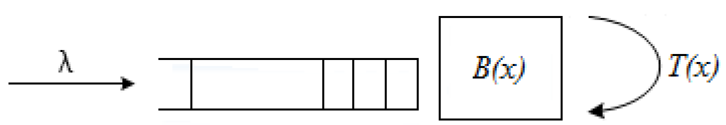
В данной работе получены аналитические формулы для нахождения производящих функций распределения вероятностей состояний системы и характеристическая функция времени ожидания заявки в системе с “прогулками” прибора и обслуживанием до полного исчерпания ($M|GI|1|\infty$ с произвольным временем “прогулки”).

1. Математическая модель

Рассмотрим систему массового обслуживания с одним обслуживающим прибором и очередью с бесконечным числом мест для ожидания, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ (см. рисунок). Прибор обслуживает заявки в течение случайного времени с функцией распределения $B(x)$. Прибор обслуживает накопившиеся в очереди заявки до тех пор, пока она не окажется пустой. После этого прибор мгновенно уходит на “прогулку”, продолжительность которой определяется функцией $T(x)$. Во время “прогулки” заявки в систему поступают, накапливаются, но не обслуживаются. Если в момент возвращения с прогулки в системе нет заявок, то прибор повторно уходит на “прогулку”. В том случае, когда в момент возвращения прибора с “прогулки” в системе накоплены заявки, прибор приступает к их обслуживанию, а также обслуживает все заявки, которые поступают в течение всего текущего режима доступности, до полного исчерпания всех заявок.

2. Вывод системы уравнений Колмогорова

Для исследования времени ожидания в системах с “прогулками” найдем производящую функцию и распределение вероятностей величины $i(t)$ — числа заявок, находящихся



Система массового обслуживания

в очереди в момент времени t. Обозначим $v(t)$ — состояние прибора: 1 — прибор на периоде занятости, 0 — прибор на "прогулке"; $z(t)$ — длина интервала от момента времени t до момента окончания "прогулки" (остаточная продолжительность "прогулки") или до момента окончания обслуживания текущей заявки, если прибор на периоде занятости.

Рассмотрим марковский процесс $\{i(t), v(t), z(t)\}$ и для стационарного распределения вероятностей

$$P_v(i,z) = P\{i(t) = i,\, v(t) = v,\, z(t) < z\},$$

составим прямую систему уравнений Колмогорова [14]:

$$\begin{aligned}
P_1(0,z-\Delta t) &= [P_1(0,z) - P_1(0,\Delta t)](1-\lambda\Delta t) + P_1(1,\Delta t)B(z) + P_0(1,\Delta t)B(z) + o(\Delta t),\\
P_1(i,z-\Delta t) &= [P_1(i,z) - P_1(i,\Delta t)](1-\lambda\Delta t) + P_1(i-1,\Delta t)\lambda\Delta t+\\
&\quad + P_1(i+1,\Delta t)B(z) + P_0(i+1,\Delta t)B(z) + o(\Delta t),\\
P_0(0,z-\Delta t) &= (P_0(0,z) - P_0(0,\Delta t))(1-\lambda\Delta t) + P_0(0,\Delta t)T(z) + P_1(0,\Delta t)T(z) + o(\Delta t),\\
P_0(i,z-\Delta t) &= (P_0(i,z) - P_0(i,\Delta t))(1-\lambda\Delta t) + P_0(i-1,z)\lambda\Delta t + o(\Delta t),
\end{aligned}$$

которую, устремляя $\Delta t \to 0$, перепишем в виде

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial P_1(0,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial P_1(0,0)}{\partial z} - \lambda P_1(0,z) + \left[\dfrac{\partial P_1(1,0)}{\partial z} + \dfrac{\partial P_0(1,0)}{\partial z}\right] B(z) = 0,\\
\dfrac{\partial P_1(i,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial P_1(i,0)}{\partial z} - \lambda P_1(i,z) +\\
+\lambda P_1(i-1,z) + \left[\dfrac{\partial P_1(i+1,0)}{\partial z} + \dfrac{\partial P_0(i+1,0)}{\partial z}\right] B(z) = 0, i \ge 1,\\
\dfrac{\partial P_0(0,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial P_0(0,0)}{\partial z} - \lambda P_0(0,z) + \dfrac{\partial P_1(0,0)}{\partial z}T(z) + \dfrac{\partial P_0(0,0)}{\partial z}T(z) = 0, i = 0,\\
\dfrac{\partial P_0(i,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial P_0(i,0)}{\partial z} - \lambda P_0(i,z) + \lambda P_0(i-1,z) = 0, i \ge 1.
\end{cases} \qquad (1)$$

Здесь для производных по z в нуле от функций $P_v(i,z)$ применяется обозначение

$$\frac{\partial P_v(i,0)}{\partial z} = \left.\frac{\partial P_v(i,z)}{\partial z}\right|_{z=0}.$$

В работе ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в очереди и времени ожидания обслуживания в рассматриваемой системе с "прогулками" прибора и полным исчерпанием заявок.

Введем частичные производящие функции $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y^i P_v(i,z) = G_v(y,z)$. Просуммировав первое уравнение со вторым и третье с четвертым, систему (1) перепишем в виде

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial G_1(y,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} - \lambda G_1(y,z) + \lambda y G_1(y,z) + \dfrac{1}{y}\left[\dfrac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} - \dfrac{\partial P_1(0,0)}{\partial z}\right] B(z) +\\
+\dfrac{1}{y}\left[\dfrac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} - \dfrac{\partial P_0(0,0)}{\partial z}\right] B(z) = 0,\\
\dfrac{\partial G_0(y,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} - \lambda G_0(y,z) + \lambda y G_0(y,z) + \left(\dfrac{\partial P_1(0,0)}{\partial z} + \dfrac{\partial P_0(0,0)}{\partial z}\right) T(z) = 0.
\end{cases}$$

Обозначим

$$\frac{\partial P_1(0,0)}{\partial z} + \frac{\partial P_0(0,0)}{\partial z} = \pi_0,$$

тогда последнюю систему перепишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_1(y,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} - \lambda(1-y)G_1(y,z) + \dfrac{1}{y}\left[\dfrac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} + \dfrac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}\right]B(z) - \\ -\dfrac{1}{y}\pi_0 B(z) = 0, \\ \dfrac{\partial G_0(y,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} - \lambda(1-y)G_0(y,z) + \pi_0 T(z) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Эта система уравнений является основной для дальнейших исследований.

3. Частичные характеристические функции распределения вероятностей состояний системы

Решением системы (2) являются функции [15]

$$G_0(y,z) = e^{\lambda(1-y)z}\left(\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} - \pi_0 T(x)\right]dx\right),$$

$$G_1(y,z) = e^{\lambda(1-y)z}\left(\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} - \frac{1}{y}\left[\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} + \frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}\right]B(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{y}\pi_0 B(x)\right]dx\right), \tag{3}$$

в котором неизвестны константа π_0 и производные в нуле $\dfrac{\partial G_v(y,0)}{\partial z}$. В решении (3) устремим $z \to \infty$,

$$G_0(y) = G_0(y,\infty) = \lim_{z\to\infty} G_0(y,z) = \lim_{z\to\infty} e^{\lambda(1-y)z}\left(\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(1-e^{ju})x}\left[\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} - \pi_0 T(x)\right]dx\right).$$

Первый сомножитель в этом равенстве стремится к бесконечности, второй сомножитель в виде интеграла должен сходиться к нулю, тогда необходимо, чтобы

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(1-e^{ju})x}\left[\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} - \pi_0 T(x)\right]dx = 0.$$

Имеем

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(1-y)x}\left[\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} - \pi_0 T(x)\right]dx = \frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(1-y)x}dx - \pi_0\int\limits_0^\infty T(x)e^{-\lambda(1-y)x}dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda(1-y)}\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} + \frac{1}{\lambda(1-y)}\pi_0\int\limits_0^\infty T(x)de^{-\lambda(1-y)x} = \frac{1}{\lambda(1-y)}\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}+$$

$$+\frac{1}{\lambda(1-y)}\pi_0\left(T(x)e^{-\lambda(1-y)x}\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda(1-y)x}dT(x)\right) = \frac{1}{\lambda(1-y)}\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}-$$

$$-\frac{1}{\lambda(1-y)}\pi_0 T^*(\lambda-\lambda y) = 0.$$

Получим, что

$$\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} = \pi_0 T^*(\lambda-\lambda y), \tag{4}$$

где $T^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}dT(x)$ — преобразование Лапласа—Стилтьеса функции распределения $T(x)$.

Аналогично для

$$G_1(y) = \lim_{z\to\infty} G_1(y,z) = \lim_{z\to\infty}\left\{\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}dx-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{y}\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}+\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}-\pi_0\right]B(x)dx\right\} = \frac{1}{\lambda(1-y)}\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}+$$

$$+\frac{1}{\lambda y(1-y)}\int\limits_0^\infty\left[\left(\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}+\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}-\pi_0\right)B(x)\right]de^{-\lambda(1-y)x} =$$

$$= \frac{1}{\lambda(1-y)}\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}+\frac{1}{\lambda y(1-y)}\left[\left(\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}+\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}-\pi_0\right)B(z)e^{-\lambda(1-y)z}\Big|_0^\infty-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}+\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}-\pi_0\right)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda(1-y)x}dB(x)\right] = \frac{1}{\lambda(1-y)}\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}-$$

$$-\frac{1}{\lambda(1-y)}\left(\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}+\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}-\pi_0\right)B^*(\lambda-\lambda y) = 0,$$

где $B^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}dB(x)$ — преобразование Лапласа—Стилтьеса функции распределения $B(x)$. Имеем

$$\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} - \frac{1}{y}\left(\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}+\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}-\pi_0\right)B^*(\lambda-\lambda y) = 0,$$

$$\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}(y - B^*(\lambda-\lambda y)) = \left(\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}-\pi_0\right)B^*(\lambda-\lambda y),$$

$$\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} = \frac{\left(\frac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}-\pi_0\right)B^*(\lambda-\lambda y)}{y-B^*(\lambda-\lambda y)}.$$

В последнее равенство подставим выражение (4):

$$\frac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}=\pi_0\frac{\left(T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-1\right)B^*(\lambda-\lambda y)}{y-B^*(\lambda-\lambda y)}. \tag{5}$$

Тогда, подставляя равенства (4) и (5) в решение (3), имеем

$$G_0(y,z)=e^{\lambda(1-y)z}\pi_0\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[T^*(\lambda-\lambda y)-T(x)\right]dx,$$

$$yG_1(y,z)=\pi_0e^{\lambda(1-y)z}\times$$

$$\times\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[\left(y-B\left(x\right)\right)\frac{\left(T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-1\right)B^*(\lambda-\lambda y)}{y-B^*(\lambda-\lambda y)}-\left[T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-1\right]B(x)\right]dx,$$

$$y\left[y-B^*\left(\lambda-\lambda y\right)\right]G_1(y,z)=\pi_0e^{\lambda(1-y)z}\left(T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-1\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[\left(y-B(x)\right)B^*(\lambda-\lambda y)-\left[y-B^*(\lambda-\lambda y)\right]B(x)\right]dx,$$

$$\frac{y\left[y-B^*(\lambda-\lambda y)\right]}{T^*(\lambda-\lambda y)-1}G_1(y,z)=\pi_0e^{\lambda(1-y)z}\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}y\left[B^*\left(\lambda-\lambda y\right)-B(x)\right]dx,$$

$$\frac{y-B^*(\lambda-\lambda y)}{T^*(\lambda-\lambda y)-1}G_1(y,z)=\pi_0e^{\lambda(1-y)z}\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[B^*\left(\lambda-\lambda y\right)-B(x)\right]dx.$$

Откуда

$$G_0(y,z)=e^{\lambda(1-y)z}\pi_0\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-T(x)\right]dx,$$

$$G_1(y,z)=\pi_0\frac{T^*(\lambda-\lambda y)-1}{y-B^*(\lambda-\lambda y)}e^{\lambda(1-y)z}\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[B^*\left(\lambda-\lambda y\right)-B(x)\right]dx. \tag{6}$$

В решении (4), (5) устремим $z\to\infty$, найдем предельные значения $G_0(y)$, $G_1(y)$:

$$G_0(y)=\lim_{z\to\infty}G_0(y,z)=\lim_{z\to\infty}\frac{\pi_0}{e^{-\lambda(1-e^{ju})z}}\left(\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-T(x)\right]dx\right)=$$

$$=\pi_0\lim_{z\to\infty}\frac{e^{-\lambda(1-y)z}\left[T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-T(z)\right]}{-\lambda(1-y)e^{-\lambda(1-y)z}}=\pi_0\lim_{z\to\infty}\frac{\left[T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-T(z)\right]}{-\lambda(1-y)}=\pi_0\frac{T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-1}{\lambda(y-1)},$$

$$G_1(y)=\lim_{z\to\infty}G_1(y,z)=$$

$$=\pi_0\frac{T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-1}{y-B^*\left(\lambda-\lambda y\right)}\lim_{z\to\infty}\frac{1}{e^{\lambda(1-y)z}}\int\limits_0^z e^{-\lambda(1-y)x}\left[B^*\left(\lambda-\lambda y\right)-B(x)\right]dx=$$

$$=\pi_0\frac{T^*\left(\lambda-\lambda y\right)-1}{y-B^*\left(\lambda-\lambda y\right)}\frac{B^*\left(\lambda-\lambda y\right)-1}{\lambda(y-1)}.$$

Таким образом, имеем

$$G_0(y)=\pi_0\frac{T^*(\lambda-\lambda y)-1}{\lambda(y-1)},\quad G_1(y)=\pi_0\frac{T^*(\lambda-\lambda y)-1}{y-B^*(\lambda-\lambda y)}\frac{B^*(\lambda-\lambda y)-1}{\lambda(y-1)},$$

$$G(y)=G_0(y)+G_1(y)=\pi_0\frac{T^*(\lambda-\lambda y)-1}{\lambda(y-1)}\left(1+\frac{B^*(\lambda-\lambda y)-1}{y-B^*(\lambda-\lambda y)}\right)=$$

$$=\pi_0\frac{T^*(\lambda-\lambda y)-1}{\lambda(y-1)}\frac{y-1}{y-B^*(\lambda-\lambda y)}. \tag{7}$$

Равенства (4)–(7) с точностью до константы π_0, которая будет определена ниже из условия нормировки, определяют вид производящих функций $G_0(y,z)$, $G_1(y,z)$, $G_0(y)$, $G_1(y)$.

Так как $B^{*\prime}(0)=-b$, $T^{*\prime}(0)=-T_1$, где b и T_1 — средние времена обслуживания и “прогулки” соответственно, имеем

$$1=\lim_{y\to1}G(1)=\pi_0\lim_{y\to1}\frac{T^*(\lambda-\lambda y)-1}{\lambda(y-1)}\frac{y-1}{y-B^*(\lambda-\lambda y)}=$$

$$=\pi_0\lim_{y\to1}\frac{T^{*\prime}(\lambda-\lambda y)}{\lambda}\lim_{y\to1}\frac{1}{1-B^{*\prime}(\lambda-\lambda y)}=\pi_0\frac{\lambda T_1}{\lambda(1-\lambda b)}=\pi_0\frac{T_1}{1-\lambda b}$$

или

$$R_0=\lim_{y\to1}G_0(y)=\pi_0\lim_{y\to1}\frac{T^{*\prime}(\lambda-\lambda y)}{\lambda}=\pi_0T_1,$$

$$R_1=\lim_{y\to1}G_1(y)=\pi_0\lim_{y\to1}\frac{T^{*\prime}(\lambda-\lambda y)}{1-B^{*\prime}(\lambda-\lambda y)}\lim_{y\to1}\frac{B^{*\prime}(\lambda-\lambda y)}{\lambda}=\pi_0\frac{T_1\lambda b}{(1-\lambda b)}.$$

Так как

$$1=R_1+R_2=\pi_0T_1\left(\frac{\lambda b}{1-\lambda b}+1\right)=\frac{\pi_0T_1}{1-\lambda b},$$

тогда

$$\pi_0=\frac{1-\lambda b}{T_1}. \tag{8}$$

Здесь $R_0=1-\lambda b$, $R_1=\dfrac{1-\lambda b}{T_1}$ — стационарные вероятности состояний прибора.

Таким образом, частичные производящие функции

$$G_0(y)=\frac{1-\lambda b}{T_1}\frac{T^*(\lambda-\lambda y)-1}{\lambda(y-1)},$$

$$G_1(y)=\frac{1-\lambda b}{T_1}\frac{T^*(\lambda-\lambda y)-1}{y-B^*(\lambda-\lambda y)}\frac{B^*(\lambda-\lambda y)-1}{\lambda(y-1)}$$

решают поставленную задачу нахождения распределения $P_v(i)$.

4. Распределение вероятностей состояний системы

Сделаем замену в производящих функциях $y = e^{ju}$ и перейдем к характеристическим функциям числа заявок в очереди

$$H_0(u) = \frac{\lambda(1-b)}{T_1}\frac{T^*(\lambda - \lambda e^{ju}) - 1}{\lambda(e^{ju}-1)},$$
$$H_1(u) = \frac{\lambda(1-b)}{T_1}\frac{T^*(\lambda - \lambda e^{ju}) - 1}{y - B^*(\lambda - \lambda e^{ju})}\frac{B^*(\lambda - \lambda e^{ju}) - 1}{\lambda(e^{ju}-1)}.$$

Обратным преобразованием Фурье численно можно найти дискретное распределение числа заявок в очереди по следующей формуле:

$$P_v(i) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-jui}H_v(u)du, \tag{9}$$

которое позволит найти распределение вероятностей виртуального времени ожидания обслуживания.

5. Время ожидания заявки в системе с “прогулками” прибора и обслуживанием до полного исчерпания

Рассмотрим заявку, поступившую в систему в некоторый момент времени t. Время ее ожидания в системе до начала обслуживания обозначим через $W(t)$, а характеристическую функцию этого времени ожидания — через

$$F(u) = Me^{juW(t)}. \tag{10}$$

Время ожидания начала обслуживания заявки равно либо суммарному времени обслуживания (незавершенной работе) всех заявок, находящихся в системе в момент времени t, если рассматриваемая заявка поступает в систему, когда прибор находится в режиме обслуживания, либо складывается из остаточной продолжительности “прогулки” и величины незавершенной работы, если рассматриваемая заявка поступает в систему, когда прибор находится на “прогулке”. Обозначим условные характеристические функции

$$F_v(u,i,z) = M\{e^{juW(t)}|v(t)=v,\, i(t)=i,\, z(t)=z\} = e^{juz}(\beta(u)^i). \tag{11}$$

По формуле полной вероятности можно записать равенство

$$F(u) = \sum_{i=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} F_0(u,i,z)d_zP_0(i,z) + \sum_{i=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} F_1(u,i,z)d_zP_1(i,z) =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{juz}(\beta(u))^i d_zP_0(i,z) + \sum_{i=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{juz}(\beta(u))^i d_zP_1(i,z) =$$
$$= \int\limits_0^{\infty} e^{juz}d_zG_0(\beta(u),z) + \int\limits_0^{\infty} e^{juz}d_zG_1(\beta(u),z) = G_0^*(\beta(u),u) + G_1^*(\beta(u),u). \tag{12}$$

Здесь $G_v^*(\beta(u), u)$ — преобразование Фурье—Стилтьеса. Найдем эти функции непосредственно из формулы (6) либо из уравнений (2), используя равенства (4), (5):

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} - [ju + \lambda(1-y)]\, G_1^*(y,u) + \dfrac{1}{y}\left[\dfrac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} + \dfrac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}\right]\beta(u) - \dfrac{1}{y}\pi_0\beta(u) = 0, \\ -\dfrac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} - [ju + \lambda(1-y)]\, G_0^*(y,u) + \pi_0\tau(u) = 0, \end{cases}$$

где $\tau(u)$, $\beta(u)$ — преобразования Фурье—Стилтьеса функций $T(x), B(x)$ соответственно.

Запишем

$$G_0^*(y,u) = \frac{\pi_0\tau(u) - \dfrac{\partial G_0(y,0)}{\partial z}}{ju + \lambda(1-y)} = \pi_0\frac{\tau(u) - T^*(\lambda - \lambda y)}{ju + \lambda(1-y)},$$

$$yG_1^*(y,u) = \frac{\left[\dfrac{\partial G_1(y,0)}{\partial z} + \dfrac{\partial G_0(y,0)}{\partial z} - \pi_0\right]\beta(u) - y\dfrac{\partial G_1(y,0)}{\partial z}}{ju + \lambda(1-y)} =$$

$$= \pi_0\frac{\dfrac{(T^*(\lambda - \lambda y) - 1)B^*(\lambda - \lambda y)}{y - B^*(\lambda - \lambda y)}(\beta(u) - y) + (T^*(\lambda - \lambda y) - 1)\beta(u)}{ju + \lambda(1-y)} =$$

$$= \pi_0\frac{(T^*(\lambda - \lambda y) - 1)B^*(\lambda - \lambda y)(\beta(u) - y) + (T^*(\lambda - \lambda y) - 1)\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]\,\beta(u)}{[ju + \lambda(1-y)]\,[y - B^*(\lambda - \lambda y]} =$$

$$= \pi_0\frac{(T^*(\lambda - \lambda y) - 1)(-yB^*(\lambda - \lambda y) + y\beta(u))}{[ju + \lambda(1-y)]\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]} = \pi_0 y\frac{(T^*(\lambda - \lambda y) - 1)(\beta(u) - B^*(\lambda - \lambda y))}{[ju + \lambda(1-y)]\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]},$$

тогда имеем

$$G_1^*(y,u) = \pi_0\frac{(T^*(\lambda - \lambda y) - 1)(\beta(u) - B^*(\lambda - \lambda y))}{[ju + \lambda(1-y)]\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]}.$$

Найдем сумму

$$G_0^*(y,u) + G_1^*(y,u) = \pi_0\frac{\tau(u) - T^*(\lambda - \lambda y)}{ju + \lambda(1-y)} + \pi_0\frac{(T^*(\lambda - \lambda y) - 1)(\beta(u) - B^*(\lambda - \lambda y))}{[ju + \lambda(1-y)]\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]} =$$

$$= \pi_0\left[\frac{(\tau(u) - T^*(\lambda - \lambda y))\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]}{[ju + \lambda(1-y)]\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]} + \frac{(T^*(\lambda - \lambda y) - 1)(\beta(u) - B^*(\lambda - \lambda y))}{[ju + \lambda(1-y)]\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]}\right] =$$

$$= \pi_0\left[\frac{\tau(u)y - yT^*(\lambda - \lambda y) - \tau(u)B^*(\lambda - \lambda y)}{[ju + \lambda(1-y)]\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]} + \frac{T^*(\lambda - \lambda y)\beta(u) - \beta(u) + B^*(\lambda - \lambda y)}{[ju + \lambda(1-y)]\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]}\right] =$$

$$= \pi_0\frac{T^*(\lambda - \lambda y)\,[\beta(u) - y] - \beta(u) + B^*(\lambda - \lambda y) + \tau(u)\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]}{[ju + \lambda(1-y)]\,[y - B^*(\lambda - \lambda y)]}. \tag{13}$$

Подставляя равенство (13) в формулу (12), получим характеристическую функцию времени ожидания

$$F(u) = \pi_0\frac{-\beta(u) + B^*(\lambda - \lambda y) + \tau(u)\,[\beta(u) - B^*(\lambda - \lambda y)]}{[ju + \lambda(1 - \beta(u))]\,[\beta(u) - B^*(\lambda - \lambda\beta(u))]} = \pi_0\frac{\tau(u) - 1}{ju + \lambda(1 - \beta(u))} =$$

$$= \frac{1-\lambda b}{T_1}\frac{\tau(u)-1}{ju+\lambda(1-\beta(u))} = \frac{\tau(u)-1}{T_1}\frac{1-\lambda b}{1+\dfrac{\lambda}{ju}(1-\beta(u))}. \tag{14}$$

Получив вид характеристической функции $F(u)$, плотность $f(u)$ распределения вероятностей величины $W(t)$ можно найти, применяя обратное преобразование Фурье, по формуле

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-jux}F(u)du.$$

Характеристическая функция $F(u)$ имеет вид произведения характеристических функций остаточного времени "прогулки" и времени ожидания в классической системе $M|GI|l|\infty$.

Заключение

Основными результатами работы являются формулы (8), которые определяют в явном виде производящие функции распределения вероятностей состояний системы.

Из полученного вида формулы (14) характеристической функции $F(u)$ следует, что плотность $f(x)$ распределения вероятностей времени $W(t)$ ожидания заявки в очереди является сверткой плотностей указанных случайных величин, а величина $W(t)$ определяется суммой

$$W(t) = z(t) + \gamma(t)$$

независимых случайных величин $z(t)$ и $\gamma(t)$, что существенно облегчает нахождение моментов времени ожидания $W(t)$.

Применяя найденную плотность $f(x)$, можно найти все характеристики времени $W(t)$ ожидания заявки в рассматриваемой системе обслуживания.

Список литературы / References

[1] **Шлумпер Л.О.** Исследование однолинейной системы массового обслуживания конечной емкости с фоновыми заявками: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва, 2005. 100 с.
Shlumper, L.O. Queuing ultimate capacity study a single-line system with background applications: Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk. Moscow, 2005. 100 p. (In Russ.)

[2] **Nazarov, A.A., Paul, S.V.** Number of customers in the system with server vacations // Communications in Comput. and Inform. Sci. Switzerland: Springer, 2016. Vol. 601. P. 334–343.

[3] **Назаров А.А., Пауль С.В.** Исследование системы массового обслуживания с "прогулками" прибора, управляемой T-стратегией // Матер. Междунар. конф., посвящ. 80-летию проф., д-ра физ.-мат. наук Г.А. Медведева "Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения". Минск: РИВШ, 2015. С. 202–207.
Nazarov, A.A., Paul, S.V. Research queuing system with the "walking" of the device, managed by T-strategy // Proc. Intern. Conf. dedicated to G.A. Medvedev 80th anniversary: Probability Theory, Stochastic Processes, Mathematical Statistics and Applications. Minsk: RIVSh, 2015. P. 202–207. (In Russ.)

[4] **Назаров А.А., Ямпольский В.З., Пауль С.В., Сонькин Д.М.** Исследование математической модели циклической сети связи множественного доступа // Матер. 10-й Всерос. науч.-практ. конф. “Перспективные системы и задачи управления”. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2015. Т. 1. С. 204–214.
Nazarov, A.A., Yampolsky, V.Z., Paul, S.V., Sonkin, D.M. Investigation of the mathematical model of cyclic multiple access communications network // Proc. 10th All-Russia Scientific and Applied Conf. “Perspective Systems and Control Problems”. Rostov-na-Donu: Izd-vo YuFU, 2015. Vol. 1. P. 204–214. (In Russ.)

[5] **Вишневский В.М., Семенова О.В.** Системы поллинга: теория и применение в широкополосных беспроводных сетях. М.: Техносфера, 2007. 312 с.
Vishnevskiy, V.M., Semenova, O.V. Polling systems: theory and applications in broadband wireless networks. Moscow: Tekhnosfera, 2007. 312 p. (In Russ.)

[6] **Вишневский В.М., Семенова О.В.** Математические методы исследования систем поллинга // Автоматика и телемеханика. 2006. Вып. 2. С. 3–56.
Vishnevskii, V.M., Semenova, O.V. Mathematical methods to study the polling systems // Automation and Remote Control. 2006. Vol. 67(2). P. 173–220.

[7] **Shanthikumar, J.G.** On stochastic decomposition in $M/G/l$ type queues with generalized server vacations // Oper. Res. 1988. Vol. 36, No. 4. P. 566–569.

[8] **Takagi, H.** Queueing analysis of vacation models, part I: $M/G/l$ and part II: $M/G/l$ with vacations: Techn. Report TR87-0032. Tokyo: IBM Tokyo Res. Lab., 1987.

[9] **Сонькин М.А., Ямпольский В.З.** Обобщенные свойства специальных систем связи и мониторинга для труднодоступных и подвижных объектов // Изв. ТПУ. Матем. и механика. Физика. 2008. Т. 312, № 2. С. 154–156.
Sonkin, M.A., Yampolsky, V.Z. Generalized properties of special communication and monitoring systems for remote and mobile objects // Bulletin of the Tomsk Polytechnic Univ. Matematika i Mekhanika. Fizika. 2008. Vol. 312, No. 2. P. 154–156. (In Russ.)

[10] **Сонькин М.А., Погребной В.К., Погребной А.В.** Оптимизация использования ресурсов связи в наземной метеорологической наблюдательной сети // Изв. ТПУ. Вычисл. техника и информ. 2008. Т. 313, № 5. С. 46–50.
Sonkin, M.A., Pogrebnoy, V.K., Pogrebnoy, A.V. Optimizing the use of communication resources in a surface weather observation network // Bulletin of the Tomsk Polytechnic Univ. Upravlenie, Vychislitel’naya Tekhnika i Informatika 2008. Vol. 313, No. 5. P. 46–50. (In Russ.)

[11] **Сонькин Д.М., Ямпольский В.З.** Навигационно-телекоммуникационные системы мониторинга и управления труднодоступными объектами и мобильными группами. Томск: Изд-во НТЛ, 2013. 220 с.
Sonkin, D.M., Yampolskiy, V.Z. Navigation and telecommunications monitoring and control system for remote objects and mobile groups. Tomsk: Izd-vo NTL, 2013. 220 p. (In Russ.)

[12] **Назаров А.А., Терпугов А.Ф.** Теория массового обслуживания: Учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. 228 с.
Nazarov, A.A., Terpugov, A.F. Queueing theory: Ucheb. Posobie. Tomsk: Izd-vo NTL, 2004. 228 p. (In Russ.)

[13] **Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.** Введение в теорию массового обслуживания. 4-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 400 с.
Gnedenko, B.V., Kovalenko, I.N. Introduction to queuing theory. 4 ed. Moscow: Izd-vo LKI, 2007. 400 p. (In Russ.)

[14] **Назаров А.А., Моисеева С.П.** Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
Nazarov, A.A., Moiseeva, S.P. Asymptotic analysis in queuing theory method. Tomsk: Izd-vo NTL, 2006. 112 p. (In Russ.)

[15] **Филиппов А.Ф.** Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2007. 240 с.
Filippov, A.F. Introduction to the theory of differential equations. Moscow: KomKniga, 2007. 240 p. (In Russ.)

Поступила в редакцию 29 октября 2016 г.,
с доработки — 30 декабря 2016 г.

The single-server queueing model with vacations and exhaustive service

Nazarov, Anatoly A.[1,*], Sonkin, Dmitry M.[2]

[1]National Research Tomsk State University, Tomsk, 634050, Russia

[2]National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, 634050, Russia

[*]Corresponding author: Nazarov, Anatoly A., e-mail: nazarov.tsu@gmail.com

Single-line queueing systems with server vacations are common mathematical models of telecommunication systems. In real systems “vacations” are considered as a temporal suspension of service to perform any other operation of the device, or its breakdown or repair. Queueing system with server vacations is one of the known methods for research of cyclic or polling systems.

Let us review the queueing system with one service device and a queue with unlimited number of waiting seats. The system receives Poisson process of customers with intensity λ. Device operation mode consists of two consecutive intervals. During first interval customers are handled at the device, distributed by function $B(x)$. The device serves the customers who have collected in queue until it does not turn out empty. When this interval ends, the server goes on a vacation. During vacations, all requests coming into the system are gathered in the queue and are waiting for device to return to the operating mode. Duration of this interval is random and determined by distribution function $T(x)$.

We have found generating function distribution of probabilities for a number of customers in the queue and the characteristic function of waiting time in the single-line queueing systems with server vacations and exhaustive service.

Keywords: queueing system with server vacations, exhaustive service, polling, waiting time.

Received 29 October 2016
Received in revised form 30 December 2016