

Математическая модель деформирования железобетона с учетом контактного взаимодействия его структурных компонентов

А. С. САМОШКИН*, В. М. ТИХОМИРОВ

Сибирский государственный университет путей сообщения, Новосибирск, Россия

*Контактный e-mail: ASsamoshkin.stu@gmail.com

Статья посвящена разработке математической модели деформирования железобетона и ее численной реализации методом конечных элементов. Взаимодействие арматуры с бетоном моделируется с помощью контактного слоя, параметры деформирования которого определяются по данным эксперимента. Для описания предельного состояния бетона применяется теория Друкера—Прагера. Выполнено численное решение практически значимых задач для теории железобетона: вытягивание профилированной арматуры из бетона и изгиб армированной балки. Получено хорошее соответствие расчетных результатов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: железобетон, сцепление арматуры с бетоном, упругопластический материал.

Введение

Основой анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) структурно неоднородных физически нелинейных материалов, к которым относится железобетон, являются методы вычислительной механики. Математическая модель такого материала должна учитывать особенности деформирования его структурных компонентов (арматуры и бетона), а также их контактное взаимодействие (сцепление). Идентификацию параметров математической модели проводят на основе данных натурных экспериментов. Для арматуры и бетона достаточно проведения стандартных механических испытаний материалов. В свою очередь, известные экспериментальные схемы изучения сцепления арматуры с бетоном [1–3] дают только косвенную информацию о характеристиках контакта и разрушении пограничной области. Поэтому для моделирования сцепления разрабатываются математические модели, упрощающие реальные процессы взаимодействия структурных компонентов [4–6].

В настоящей работе представлены результаты исследования процессов деформирования железобетона на основе решения уравнений механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов (МКЭ).

Для описания предельного состояния арматуры и окружающего ее бетона использованы модели пластичности материала, основанные на классических критериях текучести Мизеса и Друкера—Прагера. При моделировании нелинейных процессов, происходящих в зоне сцепления, предлагается выделять на границе с арматурой контактный

слой (КС) [1, 4, 6], параметры которого идентифицируются по экспериментальной кривой податливости арматуры при ее вытягивании из бетона [7, 8]. Такой подход не учитывает детальное распределение деформаций в зоне взаимодействия, однако позволяет рассматривать железобетон как сплошную неоднородную среду с идеальным контактом его структурных компонентов.

Для тестирования предложенной модели железобетона рассмотрены прикладные задачи, в которых учет контактного взаимодействия арматуры с бетоном играет существенную роль при исследовании деформирования объектов. Это вытягивание упругопластической арматуры из бетона и изгиб армированной балки сложной геометрии. Численные процедуры решения этих физически нелинейных задач проводились с использованием программного комплекса COSMOSM.

1. Математическая модель железобетона

1.1. Нелинейное деформирование бетона

Бетон является упругопластическим материалом, прочность которого на сжатие выше, чем на растяжение [9]. Этот факт иллюстрирует диаграмма его деформирования, показанная на рис. 1 штриховой линией. Следовательно, для бетона необходимо выбирать критерии, учитывающие зависимость пластических деформаций от среднего напряжения. Подобные критерии можно разделить на две группы. К первой относятся критерии пластичности, которые имеют коническую форму поверхности текучести, например Друкера — Прагера [10]. Вторую группу составляют законы, соответствующие поверхностям более высокого порядка: параболический закон Друкера — Прагера [11], нелинейный критерий Виллама — Варнке [12]. Последняя теория более точно описывает упругопластическую работу материала, однако для определения ее параметров требуются опытные данные, получение которых вызывает технические трудности. Например, для использования критерия Виллама — Варнке требуется пять видов испытаний: осевое растяжение и сжатие, двухосное сжатие, а также значения прочности при двух различных видах напряженного состояния, соответствующие более высокому уровню гидростатического сжатия.

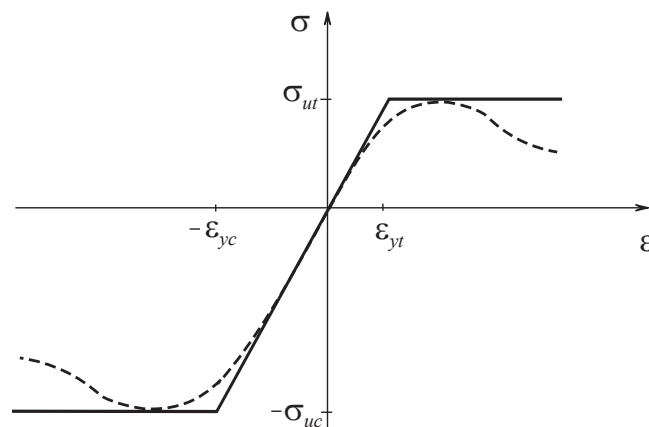


Рис. 1. Экспериментальные и модельные диаграммы деформирования бетона при растяжении и сжатии

Параметры конических законов связаны с двумя характеристиками материала: предельными напряжениями при одноосном растяжении σ_{ut} и сжатии σ_{uc} , значения которых известны для всех стандартных классов бетона. Поэтому для описания НДС бетона выбрана функция текучести Друкера — Прагера:

$$\sqrt{3J_2} + \gamma I_1 = k. \quad (1)$$

Здесь I_1 — первый инвариант тензора напряжений; J_2 — второй инвариант девиатора напряжений:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2],$$

где $\sigma_j, j = 1, 2, 3$, — главные напряжения.

Параметры γ и k в соотношении (1) непосредственно связаны с σ_{ut} и σ_{uc} :

$$\gamma = \frac{\sigma_{uc} - \sigma_{ut}}{\sigma_{uc} + \sigma_{ut}}, \quad k = \frac{2\sigma_{ut}\sigma_{uc}}{\sigma_{uc} + \sigma_{ut}}. \quad (2)$$

При постоянном предельном напряжении k в формуле (1) диаграмма деформирования бетона будет соответствовать диаграмме идеальной текучести, которая представлена сплошной линией на рис. 1.

1.2. Модель материала арматуры

В общем случае для армирования бетона применяется упругопластический материал, работу которого можно описать функцией

$$\sigma_i = \begin{cases} E_a \varepsilon_i, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_y, \\ \sigma_{ya} + E_{th} (\varepsilon_i - \varepsilon_y), & \varepsilon_y < \varepsilon_i \leq \varepsilon_u, \\ \sigma_{ua}, & \varepsilon_i > \varepsilon_u. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь σ_i, ε_i — интенсивность напряжений и деформаций; E_a — модуль упругости; E_{th} — касательный модуль; σ_{ya}, σ_{ua} — пределы текучести и прочности материала арматуры; $\varepsilon_y, \varepsilon_u$ — деформации, соответствующие пределу текучести и прочности.

В отличие от бетона, материал арматуры одинаково сопротивляется растяжению и сжатию $\sigma_{ut} = \sigma_{uc}$. Из формулы (2) получим $\gamma = 0$, и соотношение (1) приобретет вид критерия Мизеса:

$$\sqrt{3J_2} = k. \quad (4)$$

При наличии участка упрочнения на диаграмме, соответствующей функции (3), величина k переменна и зависит от интенсивности пластической деформации и в соответствии с формулой (3) изменяется от σ_{ya} до σ_{ua} .

1.3. Моделирование взаимодействия арматуры с бетоном

Нелинейные процессы, связанные с контактным взаимодействием арматуры с бетоном, оказывают влияние на довольно малую область. Поэтому при моделировании эту зону предлагается рассматривать как контактный слой (КС) из упругопластического материала, отличающегося от бетона механическими характеристиками. Впервые КС был

использован в “технической теории сцепления”, разработанной М.М. Холмянским [1]. Этот слой полагался бесконечно тонким, а условия по контакту описывались нормальным законом сцепления — зависимостью касательных напряжений τ от взаимных продольных смещений бетона и арматуры g :

$$\tau = B \frac{\ln(1 + \alpha g)}{1 + \alpha g}. \quad (5)$$

Эта теория упрощает реальное распределение деформаций в конструкции. Однако зависимость взаимного смещения арматуры и бетона Δ_a от напряжений σ_a согласно этой теории хорошо соответствует экспериментальным данным при вытягивании арматуры из бетона (рис. 2, а):

$$\Delta_a = \frac{1}{\alpha} \left(\exp \left(\frac{\alpha \sigma_a^2}{mB} \right)^{1/2} - 1 \right), \quad m = \frac{pA_b E_a E_b}{A_a (E_b A_b + E_a A_a)}, \quad (6)$$

где A_a и A_b — площадь сечения арматуры и бетона; p — периметр сечения арматурного стержня, E_b — модуль упругости бетона.

Это позволило значения α и B считать параметрами сцепления, которые связаны с характеристиками бетона и арматуры, и определять их аппроксимацией экспериментальных данных зависимостью (6). Следует отметить, что это соотношение получено для образцов, у которых длина заделки L больше l_{bs} — длины зоны, где напряжения падают до нуля (рис. 2, б). На участке, расположенном выше этой зоны, взаимные смещения арматуры относительно бетона отсутствуют.

На рис. 3 штрихпунктирной линией представлен график нормального закона сцепления (5), который подобен реальным диаграммам растяжения и сжатия бетона (см. рис. 1). Поэтому предложен контактный слой моделировать упругопластическим материалом. Численный анализ НДС модели железобетона с контактным слоем по расчетной схеме вытягивания (рис. 2, а) показал, что его элементы находятся в состоянии,

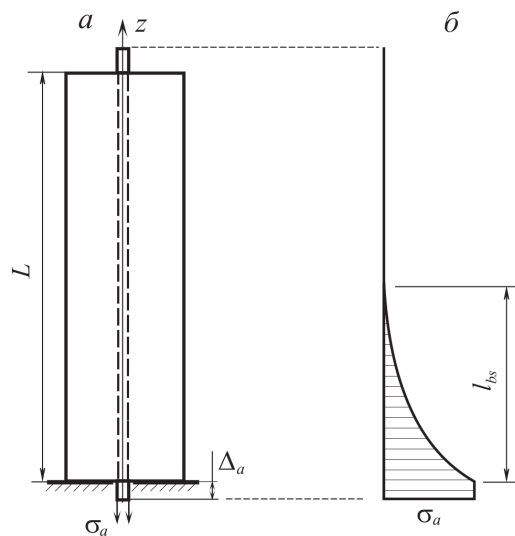


Рис. 2. Схема вытягивания арматуры из бетона (а); эпюра нормальных напряжений в арматурном стержне (б)

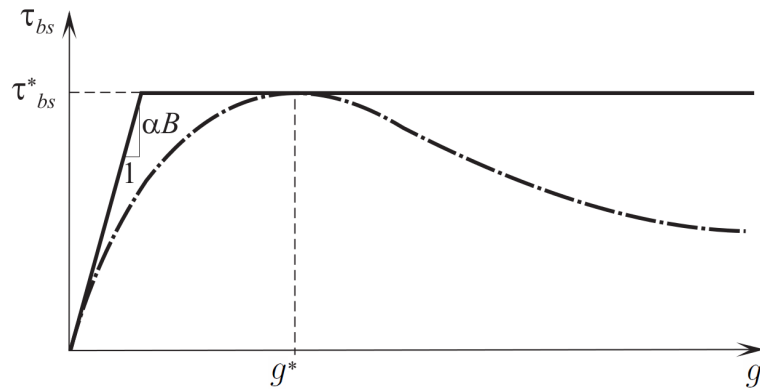


Рис. 3. График нормального закона сцепления и диаграмма условий контакта арматуры с бетоном

близком к чистому сдвигу, при котором $I_1 = 0$, а выражение (1) приобретает вид критерия Мизеса. В этом случае модельные условия по контакту арматуры с бетоном можно представить в виде двухлинейной диаграммы, изображенной на рис. 3 сплошной линией. Механические характеристики модели контактного слоя свяжем с параметрами сцепления α и B .

Из формулы (4) получим связь максимального касательного напряжения с напряжением, при котором начинается пластическое деформирование контактного слоя:

$$\sqrt{3}\tau_{bs}^* = k = k_{bs}. \tag{7}$$

Определим значение k_{bs} . Из формулы (5) получим

$$\frac{d\tau}{dg} = B\alpha \frac{1 - \ln(1 + \alpha g)^2}{1 + \alpha g}, \tag{8}$$

откуда выразим смещение g^* , соответствующее τ_{bs}^* , подставляя которое в (5), определим [8]

$$\tau_{bs}^* = \frac{B}{e} = 0.368B.$$

Учитывая соотношение (7), получим характеристику контактного слоя

$$k_{bs} = 0.638B. \tag{9}$$

Модуль упругости контактного слоя E_{bs} соответствует линейному участку графика функции (5)

$$\tau = \left. \frac{d\tau}{dg} \right|_{g=0} g.$$

Из соотношения (8) получим

$$\left. \frac{d\tau}{dg} \right|_{g=0} = \alpha B.$$

Из этих уравнений следует, что

$$\frac{\tau}{g} = \alpha B. \tag{10}$$

Смещение g определим как сдвиг по толщине слоя t_{bs} , считая, что сдвиговые деформации в основном сосредоточены в элементах контактного слоя:

$$g \approx \int_0^{t_{bs}} \gamma_{zr} dr,$$

где z и r — координаты точки в цилиндрической системе. Интеграл выразим через площадь эпюры γ_{zr} по толщине КС

$$g \approx n\gamma_0 t_{bs}, \quad (11)$$

где n — коэффициент заполнения эпюры; γ_0 — упругая деформация сдвига на границе КС и арматуры.

Касательные напряжения τ определим по закону Гука

$$\tau = \frac{E_{bs}}{2(1+\nu)} \gamma. \quad (12)$$

Из уравнений (10)–(12) получим соотношение, связывающее параметры сцепления α и B с модулем упругости контактного слоя:

$$E_{bs} = 2\alpha B(1+\nu) t_{bs} n. \quad (13)$$

Здесь коэффициент n зависит от характера разбиения контактного слоя на конечные элементы.

2. Практическое использование модели армированного бетона

Валидация предложенной математической модели проводилась на двух прикладных задачах: вытягивание профилированной арматуры из бетонного цилиндра и изгиб железобетонной балки сложной геометрии. Такие нелинейные задачи могут быть решены только методами вычислительной механики, среди которых следует выделить метод конечных элементов как наиболее разработанный и универсальный [13, 14].

При составлении системы уравнений МКЭ относительно приращений узловых перемещений учитывалась степень геометрической нелинейности моделей материалов. В контактном слое могут возникать большие сдвиговые деформации, поэтому для описания его деформирования выбрана текущая лагранжева формулировка (UL). Для моделей бетона и арматуры это нехарактерно, поэтому для них применялась геометрически линейная формулировка (MNO).

Задача решалась пошаговым интегрированием линеаризованных уравнений МКЭ. В качестве меры шага выбиралось фиктивное время, изменение которого соответствовало приращению управляющего параметра. Модели бетона, арматуры и КС представляют собой идеально-пластичные материалы, поэтому для сходимости решения выбрана стратегия управления по перемещениям [15], т. е. управляющим параметром являлось перемещение одного из узлов. На каждом шаге определялась соответствующая внешняя нагрузка с учетом физической и геометрической нелинейности задачи.

При относительно большом шаге численное решение может достаточно далеко уйти от истинного. Для того чтобы исправить эту ситуацию, применяются итерационные

процедуры уточнения решения. В нашем случае используется стандартный метод Ньютона — Рафсона, который хоть и трудоемок, так как требует вычисления и триангуляризации матрицы касательной жесткости на каждой итерации, но обладает наилучшей сходимостью.

Для определения геометрических параметров конечных элементов были проведены численные эксперименты с вариацией их размеров. Установлено, что значительное влияние на результат решения оказывает размер r_0 конечного элемента КС, расположенного на границе с арматурой. В результате определены рациональные размеры конечного элемента и толщина контактного слоя, а также коэффициент наполнения эшпур γ_{zr} :

$$r_0 \leq 0.125d_a, \quad t_{bs} \leq 0.05D_b, \quad n = 0.78, \quad (14)$$

где d_a — номинальный диаметр арматуры, D_b — характерный размер бетонной обоймы.

Параметры моделей определялись по исходным данным для арматуры, бетона и КС: постоянные пластичности γ и k — по формулам (2), характеристики сцепления α и B — аппроксимацией экспериментальных данных с использованием зависимости (6), напряжение пластического деформирования контактного слоя k_{bs} — по формуле (9), модуль упругости КС E_{bs} — по формуле (13), геометрические параметры КС — по формулам (14).

Во всех моделях арматура сложной геометрии заменялась на сплошной однородный цилиндр равной площади поперечного сечения.

2.1. Вытягивание профилированной арматуры из бетона

Профилированная арматура номинального диаметра 8 мм статически вытягивалась из бетонного цилиндра диаметром 152 мм и длиной 400 мм. По схеме, приведенной на рис. 2, проведены испытания для пяти подобных образцов, результаты которых представлены на рис. 4 светлыми точками. Параметры модели указаны в табл. 1.

На рис. 4 сплошной линией приведены результаты численного моделирования. Можно отметить удовлетворительную сходимость расчета с экспериментальными данными при упругой и пластической деформациях арматуры.

Т а б л и ц а 1. Параметры модели вытягивания профилированной арматуры из бетона

	Модуль упругости, ГПа	Коэффициент Пуассона	α , мм ⁻¹	B , МПа	Коэффициенты критерия пластичности	
					γ	k , МПа
Арматура	200	0.3	—	—	0	400–600
Бетон	38	0.2	—	—	0.874	5.23
Контактный слой	6.38	0.2	30.4	44.9	0	28.66

Примечание. Для арматуры коэффициент пластичности k изменяется в диапазоне $400 \leq k \leq 600$ МПа.

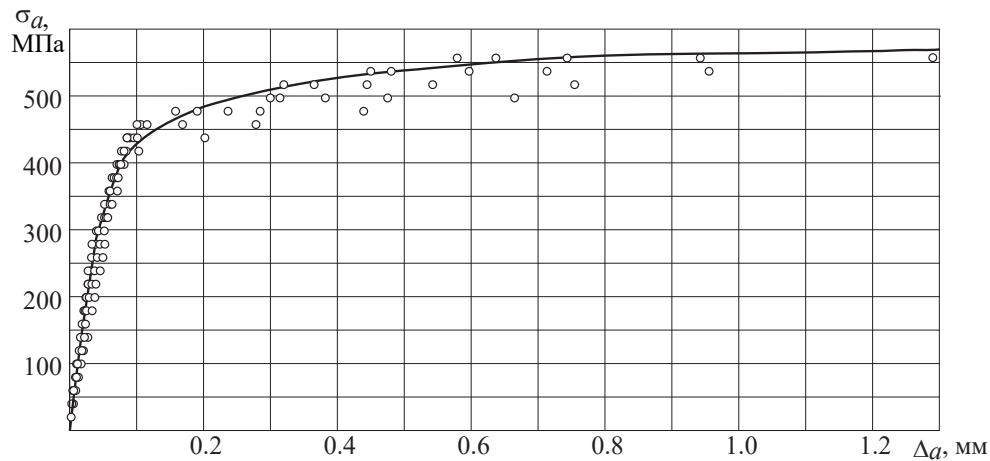


Рис. 4. Результаты численного (кривая) и физического (светлые кружки) моделирования вытягивания арматуры

2.2. Изгиб железобетонной балки

Для проверки математической модели сцепления арматуры с бетоном, который испытывает неоднородное деформирование, были проведены исследования изгиба железобетонной балки, геометрия и схема нагружения которой показаны на рис. 5. Балка армирована тремя арматурными стержнями номинального диаметра 16 мм. В работе [4] представлены экспериментальные данные испытаний такого образца. Здесь методом тензометрирования были измерены деформации среднего стержня по длине заделки 300 мм. Экспериментальные результаты показаны на рис. 6 светлыми точками.

Учитывая, что асимметрия заделки арматуры в бетон сказывается только при предельном состоянии балки, конечно-элементная модель построена для правой четверти образца из 25 306 восьмиузловых объемных конечных элементов. Сетка сгущалась

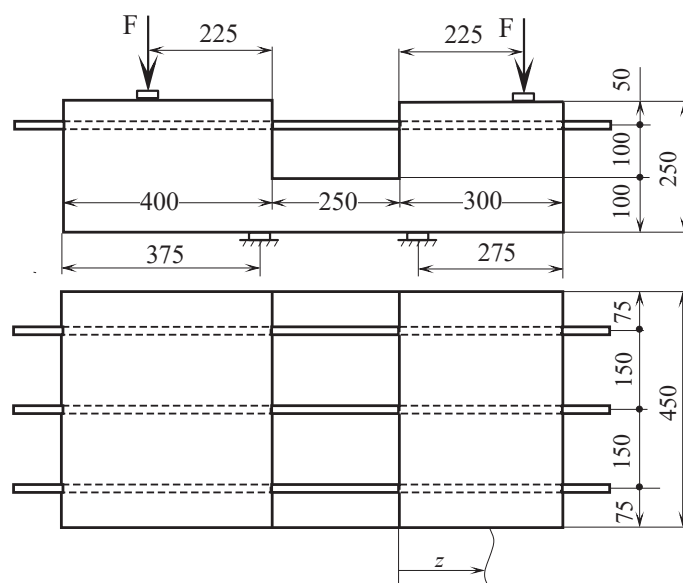


Рис. 5. Схема нагружения железобетонной балки

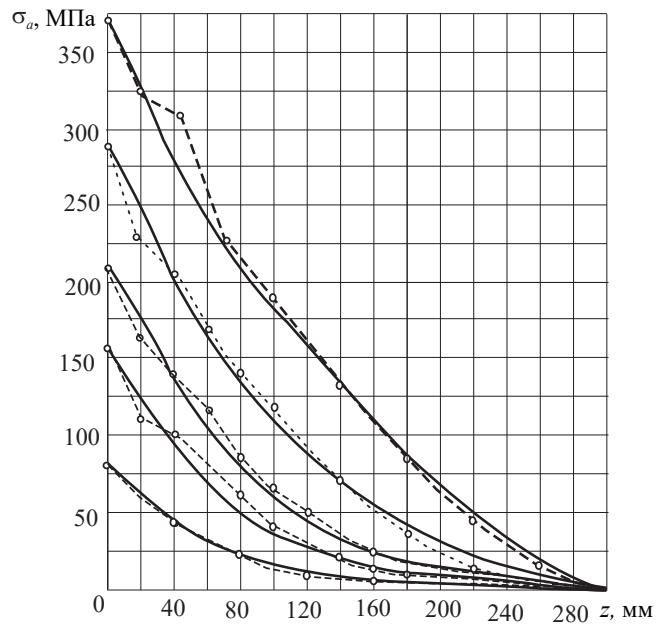


Рис. 6. Распределение напряжений по длине заделки среднего арматурного стержня

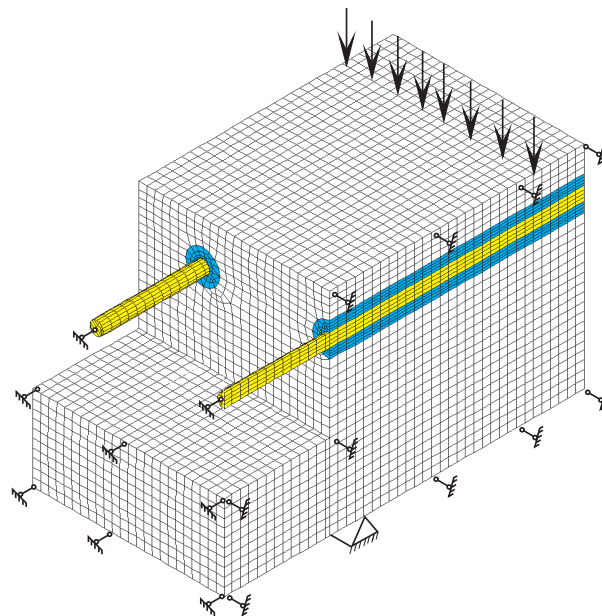


Рис. 7. Конечно-элементная модель железобетонной балки

Т а б л и ц а 2. Параметры модели изгиба балки

	Модуль упругости, ГПа	Коэффициент Пуассона	α , мм ⁻¹	B , МПа	Коэффициенты критерия пластичности	
					γ	k , МПа
Арматура	210	0.3	—	—	0	400–600
Бетон	30	0.2	—	—	0.8654	4.47
Контактный слой	4.88	0.2	10.1	21.5	0	13.2

в контактном слое, в направлении армирования выбрано равномерное распределение размеров элементов (рис. 7). Расчетные параметры модели представлены в табл. 2.

На рис. 6 сплошной линией представлены результаты расчета напряжений в среднем арматурном стержне по длине его заделки 300 мм при разных уровнях нагружения. Видно, что расчетные графики соответствуют экспериментальным данным.

Заключение

Разработана математическая модель нелинейного деформирования железобетона. Обоснован выбор критериев пластичности для арматуры, бетона и контактного слоя, введенного для учета нелинейных процессов, происходящих в области взаимодействия. Разработаны процедуры идентификации параметров материала КС, в которых используются данные испытаний вытягивания арматуры из бетона.

Численная реализация модели для осесимметричного и пространственного объектов показала, что предложенные теоретические выводы хорошо воспроизводят деформирование реальных железобетонных конструкций и адекватно описывают взаимодействие арматуры с бетоном при длине заделки больше нелинейной зоны контактного взаимодействия.

Список литературы / References

- [1] **Холмянский М.М.** Бетон и железобетон. Деформативность и прочность. М: Стройиздат, 1997. 576 с.
Kholmyanskiy, M.M. Concrete and reinforcing concrete. The deformability and strength. Moscow: Stroyizdat, 1997. 576 p. (In Russ.)
- [2] **Диаковский В.Г.** Деформационные характеристики и расчет усилий взаимодействия арматурных канатов с бетоном: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Новосибирск: НИИЖТ, 1988. 20 с.
Diakovskiy, V.G. Deformation characteristics and analysis of forces for contacting wire rope reinforcement with concrete: Avtoref. dis. ... kand. tekhn. nauk. Novosibirsk: NIIZhT, 1988. 20 p.
- [3] **Оатул А.А., Кутин Ю.Ф.** Экспериментальное определение дифференцированного закона сцепления стержневой арматуры с бетоном // Исследования по бетону и железобетону: Сб. науч. тр. / Челяб. политехн. ин-т, 1967. Вып. 46. С. 72–84.
Oatul, A.A., Kutin, Yu.F. Research on concrete and reinforced concrete // Research on Concrete and Reinforced Concrete. Chelyabinskii Politekhn. in-t, 1967. Iss. 46. P. 72–84. (In Russ.)
- [4] **De Groot, A.K., Kausters G.M.A., Monnier, Th.** Numerical modelling of bond-slip behavior // Heron. 1981. Vol. 26(1B). P. 1–90.
- [5] **Lundgren, K.A.** A model for the bond between concrete and reinforcement // Magazine of Concrete Research. 2000. No. 52 (1). P. 53–63.
- [6] **Назаренко П.П.** Контактное взаимодействие арматуры и бетона при кратковременном нагружении. Самара: Изд-во СамГУПС, 2012. 171 с.
Nazarenko, P.P. The contact interaction of fiber reinforcement and concrete under short loading. Samara: Izd-vo SamGUPS, 2012. 171 p. (In Russ.)
- [7] **Тихомиров В.М., Астахов Ю.В., Самошкин А.С.** Исследование стадии обжатия элемента бетонной конструкции, армированной канатом // Изв. вузов. Строительство. 2015. № 6. С. 5–13.

- Tikhomirov, V.M., Astakhov, Yu.V., Samoshkin, A.S.** Analysis of compressing stage of the stressed cord-reinforced concrete construction // News of Higher Educational Institutions. Construction. 2015. No. 6. P. 5–13. (In Russ.)
- [8] **Тихомиров В.М., Астахов Ю.В., Самошкин А.С.** Моделирование упругопластического сцепления арматуры с бетоном // Изв. вузов. Строительство. 2015. № 2. С. 103–109. **Tikhomirov, V.M., Astakhov, Yu.V., Samoshkin, A.S.** The modelling of elastic-plastic interaction fiber reinforcement with concrete // News of Higher Educational Institutions. Construction. 2015. No. 2. P. 103–109. (In Russ.)
- [9] **Мурашов, В.И.** Трещиноустойчивость, жесткость и прочность железобетона (основы сопротивления железобетона). М.: Изд-во Министерства строительства предприятий машиностроения, 1950. 268 с.
Murashov, V.I. Crack resistance, toughness and durability of reinforced concrete (concrete foundations resistance). Moscow: Izd-vo Ministerstva Stroitel'stva Predpriyatii Mashinostroeniya, 1950. 268 p. (In Russ.)
- [10] **Drucker, D. C., Prager, W.** Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quarterly of Applied Mathematics. 1952. Vol. 10, No. 2. P. 157–165.
- [11] **Коробейников С.Н., Ревердатто В.В., Полянский О.П., Свердлова В.Г.** О влиянии выбора реологического закона на результаты компьютерного моделирования субдукции плит // Сиб. журн. вычисл. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 71–90.
Korobeynikov, S.N., Reverdatto, V.V., Polyanskii, O.P., Sverdlova, V.G., Babichev, A.V. Influence of the choice of a rheological law on computer simulation results of slab subduction // Numerical Analysis and Applications. 2011. Vol. 4, No. 1. P. 56–70.
- [12] **Willam, K.J., Warnke, E.P.** Constitutive model for the triaxial behavior of concrete // Intern. Assoc. Bridge. Struct. Eng. Proc. 1975. No. 19. P. 1–31.
- [13] **Zienkiewicz, O.C.** The Finite Element Method in Engineering Science. London: McGraw-Hill Publishing Co., 1971. 521 p.
- [14] **Коробейников С.Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
Korobeynikov, S.N. Nonlinear deformation of solids. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2000. 262 p. (In Russ.)
- [15] COSMOSM User Guide. Vol. 4: Advanced Modules. Pt 1. NSTAR — Santa Monica (CA) Structural Research and Analysis Corporation, 2007. 328 p.

Поступила в редакцию 19 января 2017 г.

Mathematical model of reinforced concrete deformation with considering contact interaction of its structural components

SAMOSHKIN, ANTON S.*, ТИХОМИРОВ, ВИКТОР М.

Siberian Transport University, Novosibirsk, 630049, Russia

*Corresponding author: Samoshkin, A.S., e-mail: ASsamoshkin.stu@gmail.com

Reinforced concrete is a composite material. Its structural components have different deformation character. Mechanical interaction with concrete reinforcement is associated with complex processes such as short-term creep, plastic deformation and damage.

In this paper the objective was to create a mathematical model of a structurally inhomogeneous material and its numerical realization using the finite element method (FEM). To simplify the problem of the contact between the armature and concrete a contact layer (CL) was entered. This approach allowed us to consider concrete as a solid heterogeneous environment with ideal contact. The procedure for identification of the model parameters was developed.

The action of reinforcement and concrete materials were described by the plasticity theory of Von Mises and Drucker-Prager. Mechanical properties of the contact layer were determined by the pull-out test date.

Finite element analysis is implemented in the software package COSMOSM. FEM procedures are used for solving nonlinear problems of solid mechanics. The problem of pulling the profiled reinforcement from concrete and reinforced concrete beam bending has been resolved.

Is shown that the mathematical model adequately describes the interaction of reinforcement and concrete and reproduces the real deformation of reinforced concrete structures. The model is limited by the assumption that sealing length must be greater than the nonlinear deformation of the contact layer zone. This leads to the conclusion on the correctness of the proposed regulations.

Keywords: reinforced concrete; interaction fiber reinforcement with concrete; elastoplastic material.

Received 19 January 2017