

## Применение стационарной гипопластической модели для моделирования движения сыпучей среды\*

И. И. ПОТАПОВ<sup>†</sup>, О. В. РЕШЕТНИКОВА

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Россия

<sup>†</sup>Контактный e-mail: potapov2i@gmail.com

Для моделирования движения гранулированной среды предложен вариант стационарной гипопластической модели. С целью решения задачи выбран метод сглаженных частиц, особенностью реализации которого является использование в расчетах комбинированного ядра, с малым параметром сглаживания.

Выполнен расчет процесса обрушения песчаного столба и проведено сравнение полученных численных результатов моделирования с известными экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* движение гранулированной среды, метод сглаженных частиц, гипопластическая модель напряженно-деформированного состояния, критерий текучести.

*Библиографическая ссылка:* Потапов И.И., Решетникова О.В. Применение стационарной гипопластической модели для моделирования движения сыпучей среды // Вычислительные технологии. 2019. Т. 24, № 6. С. 90–98.

DOI: 10.25743/ICT.2019.24.6.011.

### Введение

Известные попытки применить хорошо разработанный аппарат механики грунтов и статике сыпучей среды к расчету процессов лавинного движения песчаных материалов не дают положительных результатов [1–3] из-за существенных различий процесса устойчивости песчаных материалов и процесса их движения, сопровождающегося потерей грунтом структурной прочности. Возникающие при этом большие сдвиговые деформации определяются напряжениями, существенно превышающими предельное статическое напряженное состояние. Существующие модели сплошных сред не учитывают деформационные изменения, связанные с изменением свойств гранулированной среды, например, из-за структурных изменений песчаного каркаса [4]. Относительно недавно появился новый класс математических моделей, которые описывают динамическое поведение песков через дискретную модель сыпучего тела [5, 6]. Это позволяет рассматривать сыпучую среду как определенное структурное дискретное образование, меняющееся в процессе деформации с позиции сплошных сред. Как теоретически, так и экспериментально [4, 6] установлено влияние плотности на коэффициенты внешнего и внутреннего трения и сцепление.

---

\*Title translation and abstract in English can be found on page 98.

© ИВТ СО РАН, 2019.

В современных теориях предельных напряжений вводится дилатансионная модель сыпучего тела (дилатансия — расширение), которая позволяет учитывать изменение плотности среды при структурных деформациях [4]. Однако дилатансионные модели могут отразить только отдельные свойства структуры сыпучего тела [5], являясь некоторым приближением к дискретным моделям. Объемно-напряженное состояние сыпучего тела при силовом воздействии деформатора требует другого уровня рассмотрения явлений, происходящих внутри сыпучего тела. Это уровень контактного взаимодействия отдельных частиц среды, который позволит описать качественные изменения, происходящие в структуре тела.

В работе для моделирования движения гранулированной среды предложен вариант стационарной гипопластической модели. При решении задачи выбран метод сглаженных частиц, особенностью реализации которого является использование в расчетах комбинированного ядра с малым параметром сглаживания.

### 1. Математическая постановка задачи для плоского случая

Рассмотрим плоское движение гранулированной сыпучей тяжелой среды в процессе обрушения песчаного столба. Расчетная область  $\Omega$  в начальный момент времени с границами  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  представлена на рис. 1. Движение гранулированной среды рассматривается в рамках модели плоской деформации и описывается с помощью упрощенной гипопластической модели [7] следующими уравнениями:

$$\nabla_\alpha (\rho u^\alpha) = 0, \tag{1}$$

$$\rho \frac{du^\alpha}{dt} = \nabla_\beta \sigma^{\alpha\beta} + q^\alpha, \tag{2}$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = -P\delta^{\alpha\beta} + s^{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Здесь  $\rho$  — плотность гранулированной среды,  $u^\alpha$  — компоненты вектора скорости среды,  $x^\alpha$  — компоненты радиуса-вектора материальной точки,  $\nabla_\alpha$  — оператор Гамильтона,

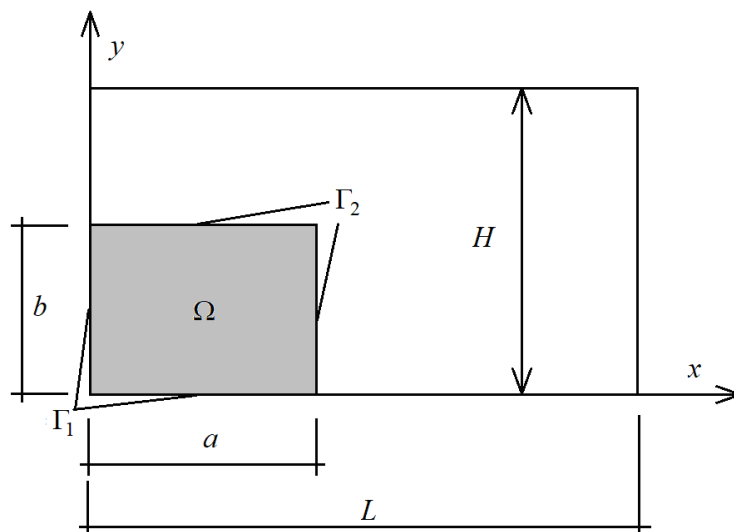


Рис. 1. Схема расчетной области задачи

$P$  — давление,  $\sigma^{\alpha\beta}$  — компоненты тензора напряжений,  $s^{\alpha\beta}$  — компоненты девиатора тензора напряжений,  $q^\alpha$  — компоненты вектора объемных сил,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\delta^{\alpha\beta}$  — единичный тензор.

Девиатор тензора напряжений  $s^{\alpha\beta}$  выразим по упрощенной стационарной гипопластической модели [8]:

$$\begin{aligned} s^{\alpha\beta} &= -c_0 \frac{4P^2}{(s^{ab}e^{bc})\delta^{ac} - PI_1 + \eta} e^{\alpha\beta}, \quad c_0 = \frac{G}{10P_{\max}(1 + \nu)}, \\ 2\epsilon^{\alpha\beta} &= \nabla_\beta u^\alpha + \nabla_\alpha u^\beta, \quad 2\omega^{\alpha\beta} = \nabla_\beta u^\alpha - \nabla_\alpha u^\beta, \quad \eta = 0.0001, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\epsilon^{\alpha\beta}$ ,  $\omega^{\alpha\beta}$  — тензор скоростей деформаций и вихревой тензор соответственно,  $e^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\beta} - 0.5I_1\delta^{\alpha\beta}$  — девиатор тензора скоростей деформаций,  $I_1 = \epsilon^{\alpha\beta}\delta^{\alpha\beta}$  — первый инвариант тензора скоростей деформаций,  $c_0$  — константа усеченной гипопластической модели,  $G$  — модуль сдвига,  $\nu$  — коэффициент Пуассона гранулированной среды.

Используем гипотезу [7] о линейной связи между функцией давления  $P$  и плотностью сыпучей среды  $\rho$ :

$$P = \begin{cases} B(\rho/\rho_0 - 1), & \rho > \rho_0, \\ 0, & \rho \leq \rho_0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь  $B = \rho_0 C_s^2$ ,  $C_s$  — характерная скорость распространения упругой волны в моделируемой среде;  $\rho_0$  — нейтральная плотность сыпучей среды.

В качестве критерия пластического течения сыпучей среды, не испытывающей структурных изменений гранулированного каркаса, принято условие Друкера — Прагера [9]

$$\sqrt{J_{s2}} + \alpha_\varphi I_{\sigma 1} - k_c = 0. \quad (6)$$

Когда эластичный идеально пластичный материал испытывает пластическую деформацию, напряженное состояние всегда должно быть на поверхности текучести во время пластической нагрузки. Однако ошибки в вычислениях могут привести к напряженному состоянию, которое находится далеко от поверхности текучести. В таких случаях используется процедура релаксации напряжений [10], согласно которой, когда рассчитанное по уравнению (4) напряженное состояние превышает поверхность текучести Друкера — Прагера, компоненты девиатора тензора напряжения  $s^{\alpha\beta}$  нормируются, при этом шаровая часть тензора напряжений (давление) остается неизменной:

$$s^{\alpha\beta} = s^{\alpha\beta} \begin{cases} \frac{2\alpha_\varphi P + k_c}{\sqrt{J_{s2} + \eta}}, & \sqrt{J_{s2}} > \alpha_\varphi I_{\sigma 1} + k_c, \\ 1, & \sqrt{J_{s2}} \leq \alpha_\varphi I_{\sigma 1} + k_c. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь  $I_{\sigma 1} = \sigma^{xx} + \sigma^{yy}$  — первый инвариант тензора напряжений;  $J_{s2} = 0.5s^{\alpha\beta}s^{\alpha\beta}$  — второй инвариант от девиатора тензора напряжений;  $\alpha_\varphi$  и  $k_s$  — константы Друкера — Прагера, связанные с параметрами сыпучего материала, коэффициентом когезии  $c$  и углом внутреннего трения  $\varphi$ :

$$\alpha_\varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}}, \quad k_c = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}}. \quad (8)$$

Уравнения (1)–(8) замыкаются начальными и граничными условиями

$$u^\alpha(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

$$u^\alpha(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad (10)$$

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, t)n^\beta = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad (11)$$

где  $n^\beta$  — нормаль к свободной поверхности сыпучего материала,  $\mathbf{x} = (x^\beta)$ .

## 2. Дискретизация задачи методом SPH

Выполним дискретизацию задачи (1)–(11) методом сглаженных частиц (SPH) [7]. Будем считать, что сыпучий материал определяется совокупностью  $N$  частиц. Для аппроксимации плотности  $\rho_i$ , скорости  $u_i^\alpha$ , напряжений  $\sigma^{\alpha\beta}$  в каждой  $i$ -й частице были использованы следующие SPH-зависимости [7]:

$$A_i = \sum_j A_j S_j W_{ij}, \quad \nabla_\alpha A_i = \sum_j (A_j - A_i) S_j \nabla_\alpha W_{ij},$$

$$\nabla_\alpha W_{ij} = \frac{dW_{ij}}{dr} \frac{x_i^\alpha - x_j^\alpha}{|x_i^\alpha - x_j^\alpha|}, \quad (12)$$

где  $A_i$  — аппроксимируемая функция,  $W_{ij} = W(r_{ij})$  — комбинированное интерполяционное ядро,  $S_i = \frac{m_i}{R_0 \rho_i}$  — площадь частицы,  $m_i$  — постоянная масса частицы,  $R_0$  — ширина слоя гранулированной среды. В расчетах для аппроксимации функций  $\rho, u^\alpha$  использовалось интерполяционное ядро

$$W_f = \frac{10}{3\pi h^2} \begin{cases} (1 - q^2)^2(1 - aq^2), & 0 \leq q \leq 1, \\ 0, & q > 1, \end{cases} \quad (13)$$

где  $q = r/h$ ,  $a = 4 - 12/\pi$ ,  $h = a_s d$  — длина сглаживания ядра,  $d$  — диаметр частиц,  $a_s = 1.1$  — коэффициент перекрытия частиц,  $r = r_{ij} = |x_i^\alpha - x_j^\alpha|$  — расстояние между частицами. Для аппроксимации градиентов искомых функций использовалось интерполяционное ядро вида

$$W_f = \frac{22}{\pi h^2} \begin{cases} (1 - q)^3, & 0 \leq q \leq 1, \\ 0, & q > 1. \end{cases} \quad (14)$$

С учетом (12)–(14) дискретный вид задачи (1)–(11) примет форму

$$\rho_i = \sum_j m_j S_j W_{ij}, \quad (15)$$

$$P_i = \begin{cases} B(\rho_i/\rho_0 - 1), & \rho_i > \rho_0, \\ 0, & \rho_i \leq \rho_0, \end{cases} \quad (16)$$

$$s_i^{\alpha\beta} = -c_0 \frac{4P^2}{(s_i^{ab} e_i^{bc}) \delta^{ac} - P_i I_{1i}} e_i^{\alpha\beta}, \quad (17)$$

$$\rho \frac{du_i^\alpha}{dt} = \sum_j \left( \frac{s_j^{\alpha\beta} + s_i^{\alpha\beta}}{\rho_i} + C_{ij} \delta^{\alpha\beta} \right) S_j \nabla_\beta W_{ij} + \sum_j \left( \frac{P_j + P_i}{\rho_i} \right) S_j \nabla_\alpha W_{ij}, \quad (18)$$

$$\rho \frac{dx_i^\alpha}{dt} = u_i^\alpha. \quad (19)$$

Здесь

$$g_i^\alpha = (0, -g),$$

$$-2\epsilon_i^{\alpha\beta} = \sum_j u_{ij}^\alpha S_j \nabla_\beta W_{ij} + \sum_j u_{ij}^\beta S_j \nabla_\alpha W_{ij},$$

$$C_{ij} = \begin{cases} -\frac{2a_\mu h C_s}{\rho_i + \rho_j} \frac{m_{ij}}{|x_{ij}^\alpha|^2 + e_r h^2}, & m_{ij} < 0, \\ 0, & m_{ij} \geq 0, \end{cases}$$

$C_{ij}$  — искусственная диссипация по Маногану [13],  $u_{ij}^\alpha = u_i^\alpha - u_j^\alpha$ ,  $x_{ij}^\alpha = x_i^\alpha - x_j^\alpha$ ,  $m_{ij} = u_{ij}^\alpha x_{ij}^\alpha$ ,  $a_\mu = 0.01$ ,  $e_r = 0.001$ .

При решении задачи (15)–(19) выбрана схема Верле [13]. Для поддержки согласованности вычислений на каждом временном шаге после расчета тензора напряжения выполняется контроль нарушения критерия текучести, при необходимости проводится коррекция (7). Устойчивость схемы интегрирования определялась выполнением условия Куранта–Фридрихса–Леви

$$\Delta t \leq C_u \frac{d}{C_s + \max_j (|u_j^\alpha|)},$$

где  $C_u = 0.2$  — коэффициент Куранта.

### 3. Численные исследования

Верификация модели движения гранулированной сыпучей среды, описываемой уравнениями (1)–(11), в SPH-реализации проводилась на модельной задаче об обрушении гранулированной колонны (рис. 1). Процесс обрушения гранулированной колонны в настоящее время достаточно хорошо описан экспериментально, что позволяет исследовать особенности реализации задачи. В расчетах принимались следующие физико-механические и геометрические параметры:  $\rho_s = 26\,500$  — сухая плотность кварца,  $\rho_0 = (1 - \omega)\rho_s$  — нейтральная плотность песка,  $\omega = 0.35$  — пористость песка,  $\varphi = 28^\circ$  — угол внутреннего трения;  $C_s = 600$  м/с — “характерная” скорость распространения упругой волны в моделируемой среде,  $d = 0.78$  мм — диаметр частиц,  $a = 0.1$  м,  $b = 0.05$  м — размеры песчаного столба,  $c_0 = 0.1$  — константы модели.

Для удобства сравнительного анализа с экспериментальными данными [14] использовано безразмерное время обрушения  $t_b = t/\sqrt{b/g}$ . Пример расчета обрушения песчаной колонны приведен на рис. 2, где видно, что полученная расчетная форма осыпавшейся песчаной колонны качественно и количественно согласуется с экспериментальными данными [14].

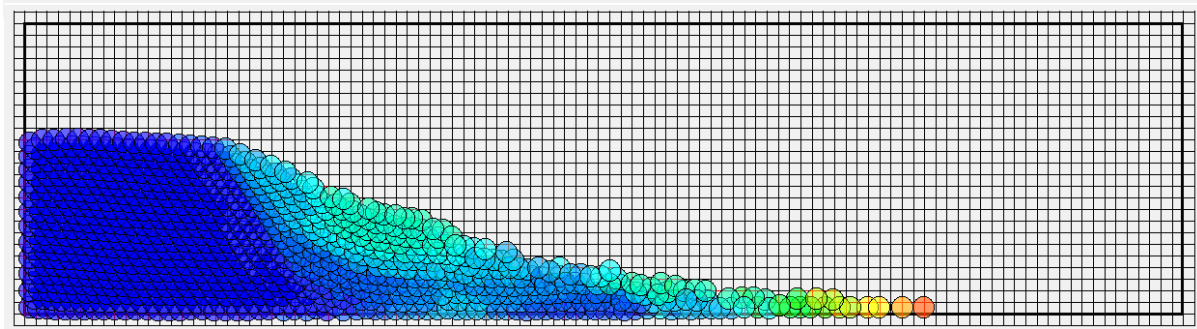


Рис. 2. Обрушение песчаной колонны,  $t_b = 4$

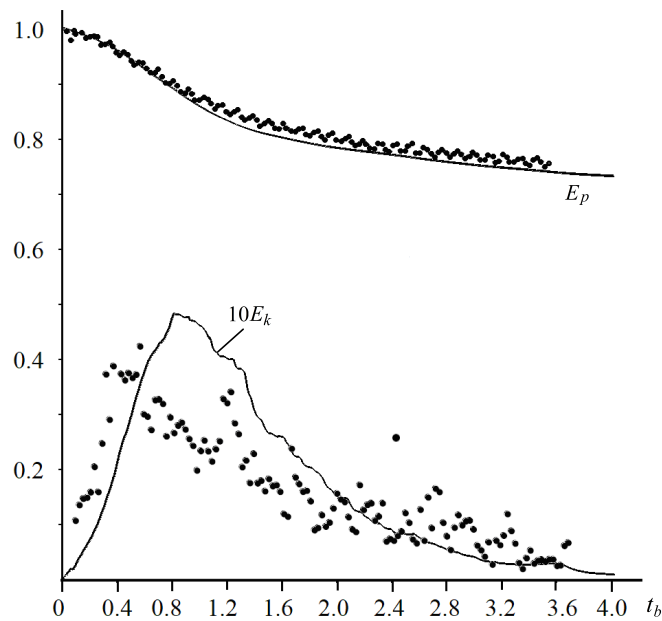


Рис. 3. Изменение энергии системы в процессе осыпания песчаной колонны:  $E_p$  — верхняя кривая,  $10E_k$  — нижняя кривая; точки — экспериментальные данные

Контроль осыпания колонны (рис. 3) проводился по эволюции кинетической и потенциальной энергии системы:

$$E_k = \frac{\sum_i m_i |u(t_b)_i^\alpha|^2}{\sum_i m_i g y_i(0)}, \quad E_p = \frac{\sum_i m_i y_i(t_b)}{\sum_i m_i y_i(0)}.$$

Из сравнительного анализа  $E_k$  и  $E_p$  видно, что полученное решение согласуется с экспериментальными данными. Таким образом, можно отметить, что упрощенная гипопластическая модель сыпучего материала позволяет выполнить адекватное моделирование обрушения песчаной колонны.

Важно отметить, что все расчеты проводились с малым параметром сглаживания, мотивацией для такого выбора послужили необходимость в обеспечении минимальной связности между гранулярными частицами, с одной стороны, и увеличение производительности метода, с другой. Однако, несмотря на довольно хорошие макрохарактеристики, полученные в работе, такой подход требует дальнейшего изучения, в частности сравнения напряженно-деформированного состояния системы с экспериментальными значениями напряжений.

## Заключение

Полагая, что скорость распространения упругих волн, определяющих напряженно-деформированное состояние в песчаных частицах, намного выше скорости движения частиц, возникающих при осыпании песка, в работе предложена приближенная модель расчета напряженного состояния движущейся гранулированной среды на основе стационарной гипопластической модели.

Для решения задачи выбран метод сглаженных частиц, особенностью реализации которого является использование в расчетах нового комбинированного интерполяционного ядра, с малым параметром сглаживания. С целью верификации математической модели и выбранного метода решения задачи выполнена реализация метода сглаженных частиц и решена задача об обрушении песчаной колонны. Полученное решение задачи хорошо качественно и количественно согласуется с экспериментальными данными.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-05-00530 А).

## Список литературы / References

- [1] **Зеленин А.Н.** Физические основы теории резания грунтов. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 335 с.  
**Zelenin, A.N.** Physical foundations of the theory of soil cutting. M.: Izd-vo AN SSSR, 1959. 335 p. (In Russ.)
- [2] **Зенков Р.Л.** Механика насыпных грузов. М.: Машиностроение, 1964. 216 с.  
**Zenkov, R.L.** Mechanics of loose cargo. M.: Mashinostroenie, 1964. 216 p. (In Russ.)
- [3] **Ветров Ю.А.** Резание грунтов землеройно-транспортными машинами. М.: Машиностроение, 1971. 357 с.  
**Vetrov, Yu.A.** Soil cutting by earth-moving machines. Moscow: Mashinostroenie, 1971. 357 p. (In Russ.)
- [4] **Николаевский В.Н., Сырников И.Н.** О плоском предельном течении сыпучей дилатирующей среды // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 2. С. 159–166.  
**Nikolaevsky, V.N., Syrnikov, I.N.** On the plane limiting flow of a loose dilating medium // Izv. AN SSSR. Mechanika Tverdogo Tela. 1970. No. 2. P. 159–166. (In Russ.)
- [5] **Слюсарев А.С.** Разработка основ расчета и конструирования рабочих органов подъемно-транспортных машин, подвергающих сыпучий материал объемному сжатию: Дис. д.т.н. Нижний Новгород, 1991. 392 с.  
**Slyusarev, A.S.** Development of the fundamentals for the calculation and design of the working bodies of hoisting-and-transport machines, subjecting loose material to volume compression: Dis. d.t.n. Nizhny Novgorod, 1991. 392 p. (In Russ.)
- [6] **Клейн Г.К.** Строительная механика сыпучих тел. М.: Стройиздат, 1977. 256 с.  
**Kleyn, G.K.** Structural mechanics of loose solids. Moscow: Stroyizdat, 1977. 256 p. (In Russ.)
- [7] **Monaghan, J.J.** Simulating free surface flows with SPH // J. of Comput. Physics. 1994. Vol. 110(2). P. 399–406.
- [8] **Wu, W., Bauer, E.** A simple hypoplastic constitutive model for sand // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 1994. Vol. 18(12). P. 833–862.

- [9] **Drucker, D.C., Prager, W.** Soil mechanics and plastic analysis for limit design // Quarterly of Applied Math. 1952. Vol. 10, No. 2. P. 157–165.
- [10] **Bui, H.H., Fukagawa, R., Sako, K., Ohno, S.** Lagrangian meshfree particles method (SPH) for large deformation and failure flows of geomaterial using elastic-plastic soil constitutive model // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 2008. Vol. 32(12). P. 1537–1570.
- [11] **Hongbin, J., Xin, D.** On criterions for smoothed particle hydrodynamics kernels in stable field // J. of Comput. Physics. 2005. Vol. 202(2). P. 699–709.
- [12] **Müller, M., Charypar, D., Gross, M.** Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications // Proc. of 2003 ACM SIGGRAPH Symp. on Computer Animation. 2003. P. 154–159.
- [13] **Monaghan, J.J.** Smoothed particles hydrodynamics // Reports on Progress in Physics. 2005. Vol. 68. P. 1703–1759.
- [14] **De Vet, S.J., Bereket, Y., Hill, K.M., De Bruyn, J.R.** Collapse of a rectangular well in a quasi-two-dimensional granular bed // Physical Rev. 2010. E. 82(4). P. 041304.

*Поступила в редакцию 30 октября 2019 г.*

### **The use of a stationary hypoplastic model for modelling the motion of granular medium**

POTAPOV, IGOR I., RESHETNIKOVA, OLGA V.

Computing Center FEB RAS, Khabarovsk, 680000, Russia

\*Corresponding author: Potapov, Igor I., e-mail: potapov2i@gmail.com

**Purpose.** The aim of this study is a development of mathematical models that describe the complex motion of a granular medium in the process of its disintegration that allows evaluating the possibility of using a simplified stationary hypoplastic model to describe this process.

**Methodology.** To describe the motion of a granular medium, the classical equations of motion and mass conservation were used. The calculation of the deviator of the stress tensor is performed within the framework of a simplified hypoplastic model. The work uses the hypothesis of a linear relationship between the pressure function and the density of the granular medium. This hypothesis is typical for smoothed particle methods, one of the variants of which is proposed for the numerical implementation of the problem.

**Results.** A new mathematical model of the problem of the motion of a granular medium in the process of its disintegration is formulated. An algorithm for solving the problem based on the method of smoothed particles is proposed. The problem of disintegration of a sand pillar is solved numerically. A comparative analysis of the obtained solutions with experimental data is accomplished.

**Findings.** Using the assumption that the propagation velocity of elastic waves that determine the stress-strain state in sand particles is much higher than the velocities of particles arising from sand shedding, an approximate model for calculating the stress state of a moving granular medium based on a stationary hypoplastic model is presented. To solve the problem, the method of smoothed particles with a small



smoothing parameter was implemented with the help of a new combined interpolation core in the calculations. To verify the mathematical model and the selected method, the implementation of the smoothed particle method was performed and the problem of disintegration of the sand column was solved. The obtained solution of the problem shows satisfactory agreement with the experimental data.

*Keywords:* granular medium motion, smoothed particle method, hypoplastic model of stress-strain state, yield criterion.

*Cite:* Potapov, I.I., Reshetnikova, O.V. The use of a stationary hypoplastic model for modeling the motion of a granular medium // Computational Technologies. 2019. Vol. 24, No. 6. P. 90–98. (In Russ.) DOI: 10.25743/ICT.2019.24.6.011.

**Acknowledgements.** The study was funded by RFBR project No. 18-05-00530 A.

*Received October 30, 2019*