К ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ В ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ*

Ю. И. Шокин
Институт вычислительных технологий СО РАН
Новосибирск, Россия
e-mail: shokin@adm.ict.nsc.ru

З. Х. Юлдашев
Ташкентский государственный университет, Узбекистан

The control problem is considered in the interval logical-dynamic system serving as a structured model for multi-regime technological cycles where uncertain parameters with a given oscillation amplitude are treated for by interval methods. On the basis of the suggested interval analogue of the Bellman's optimality principle the algorithm of construction of the optimal solution has been developed and substantiated for a certain local structure which can simulate a specific technological regime.

Известно, что современное производство отличается многоцелевым характером функционирования, многорежимностью и многостадийностью. В работах [1–13] рассмотрены вопросы моделирования подобных технологических процессов в условиях интервальной недетерминированности параметров. Наряду с проблемой адекватного моделирования другой важной производственной задачей является задача оптимального управления на всех этапах технологического цикла, решению которой и посвящена данная работа.

Пусть некоторый n-режимный производственный цикл моделируется следующей интервальной логико-динамической системой (ИЛДС):

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^{n} L_i^F F_i\Big(L_i^x X(t),\ \sum_{r\in S_i} L_r^u u_r(t),\ L_i^t t\Big), \tag{1}$$

$$X(0) = X_0, \tag{2}$$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)) \in \Omega, \tag{3}$$

$$Q = \Big|\int_0^T G(X(t), u(t), t)\mathrm{d}t\Big| \to \min. \tag{4}$$

В (1)–(4) и всюду ниже будем придерживаться обозначений, принятых в [4]. Кроме того, для (1)–(4) полагаются справедливыми следующие условия единственности и полноты:

$$L_i^F \wedge L_p^F = 0, \quad L_i^x \wedge L_p^x = 0 \ \text{ при } \ i \neq p; \quad L_r^u \wedge L_p^u = 0 \quad \text{при} \ \ r \neq p, \tag{5}$$

$$\bigvee_{i\in I} L_i^F = 1,\ \bigvee_{i\in I} L_i^x = 1,\ \bigvee_{r\in I} L_r^u = 1 \ \text{ где } \ I=\{1,2,\dots,n\},\quad S_i\subset I,\quad i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Наличие в (6) условия $\vee_{i\in I} L_i^x = 1$ объясняется тем, что реальный производственный процесс характеризуется существенной нелинейностью. В то же время в (6) не приведено условие $\vee_{i\in I} L_i^t = 1$, так как введением новой переменной всегда можно избавиться от t в правой части (1).

Функция $X(t)$ в (1)–(4) изначально полагается интервальнозначной, поскольку недетерминированные параметры считаются учтенными методами интервального анализа уже на этапе составления ИЛДС. В рамках вещественного анализа, при наличии недетерминированных параметров, по существу речь идет об определении бесконечного множества вещественных функций $x(t)$ и соответствующих управлений $u(t)$. Однако функция управления $u(t)$ априори полагается вещественной, так как в в условиях какой бы то ни было неопределенности необходимо принимать вполне конкретные решения.

Пусть некоторым конечным автоматом $\{A^F, A^x, A^u\}$ [5] из (1)–(4) выделена следующая локальная структура, моделирующая s-й режим ($1\le s\le n$):

$$\dot X(t) = L_s^F F_s\Big(L_s^x X(t),\ L_j^u u_j(y),\ L_s^t t\Big), \tag{7}$$

$$X(T_{s-1}) = X_0^{s-1}, \tag{8}$$

$$u_r(t)\in\Omega^s\subset\Omega, \tag{9}$$

$$Q = \Big|\int\limits_{T_{s-1}}^{T_s} G(X(t),u(t),t)\mathrm{d}t\Big| \to \min, \tag{10}$$

где T_{s-1} — момент окончания предыдущего режима, X_0^{s-1} — состояние системы на начало s-го режима, а $(T_{s-1}-T_s)$ — период функционирования s-го режима.

Функционал Q для рассматриваемых ИЛДС, например, может иметь вид

$$Q = \Big|\sum_{i=1}^{q}\int\limits_0^T (X_{\sigma_i}(t)\ominus Y_i(t))^2\mathrm{d}t\Big|, \tag{11}$$

где $\ominus$ — операция вычитания интервалов по Маркову [4]. В частности, при $Y_i(t)=A_i=\mathrm{const}$ мы имеем ситуацию необходимости воспроизведения системой некоторого набора контрольных показателей, когда задана их амплитуда колебания, выражаемая интервалами A_i.

Понятие производной [6], используемое в (1), и понятие интеграла от интервальнозначной функции [7] в (4) имеют теоретико-множественный смысл. Отсюда для (1)–(4), и в том числе и для (7)–(10), можно сформулировать интервальный вариант принципа оптимальности по Беллману [8]:

Оптимальное поведение s-й структуры обладает тем свойством, что, каково бы ни было ее первоначальное состояние или конечное состояние s-й структуры и решение в начальный момент времени, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате первого решения.

Под *оптимальным поведением*, в данном случае, понимается такое поведение системы, что ее функционирование или процесс происходит под воздействием искомого управления, а именно, речь идет об этапе, когда найдено решение, обеспечивающее удовлетворение условий технологического регламента.

Следует заметить, что в данном случае под словом "система" понимается не система математических отношений, моделирующих технологический цикл, а совокупность коммуникаций, узлов, сырья и продукции, в том числе и промежуточной, обеспечивающих функционирование этого цикла.

Принцип оптимальности для n-го режимного производственного цикла в целом утверждает, что, если система оптимально фунционирует на этапе $[T_{s-2}, T_s]$, то оптимальным будет сам по себе и s-й режим, для которого известно, что $X(T_s) = X_0^{s-1}$. В то же время интервальный принцип оптимальности по Беллману справедлив и для каждого подынтервала времени функционирования системы. Следует отметить, что здесь каждый раз речь идет о континуальном множестве вещественных подзадач, охватываемых одной задачей, записанной в интервальных связях.

Перейдем непосредственно к определению оптимального поведения системы и решения для s-го режима, т. е. к определению таких $X(t)$ и $u_r(t)$, для которых при (8) и (9) выполняется (7) и (10). Речь будет идти о некоторых интервальнозначных функциях $\widetilde{X}(t)$ и $\widetilde{U}_r(t)$, таких, что $X(t) \subset \widetilde{X}(t)$ и $u_r(t) \in U_r(t) \subset \widetilde{U}_r(t)$, $\forall t \in [0, T]$, где $U_r(t)$ — совокупность всевозможных управлений из Ω, удовлетворяющих (7) и (10).

Будем искать значения $X(t)$ и $u_r(t)$ в точках $t_j = T_{s-1} + j\tau_s$, где $\tau_s = (T_s - T_{s-1})/m_s$.

Пусть в (7)–(10) $L_s^F = L_s^x = L_J^u = L_s^t = 1$, кроме того, с целью дальнейших упрощений (в основном для избежания громоздкости в записях) положим $s = 1$ и договоримся индексы r и s опускать, что, в силу сформулированного принципа оптимальности, не ограничивает общности.

Пусть функция F удовлетворяет соответствующим требованиям [4], таким, что по некоторому методу p-го порядка в точках t_j могут быть определены интервалы $X_j (j = \overline{1, m})$, а функционал Q аппроксимирован таким образом, что вместо (7)–(10) получена следующая, дискретная в интервальном смысле, задача:

$$X_{j+1} = \Phi(X_j, u_j, t_j) \quad (j = \overline{0, m-1}), \tag{12}$$

$$X(0) = X_0, \tag{13}$$

$$u(t) \in \Omega_r, \tag{14}$$

$$\widetilde{Q} = \sum_{j=0}^{m-1} |G(X_j, u_j, t_j)\tau| + |H(X_m)| \to \min. \tag{15}$$

При этом условие (15) получено из (10) в предположении, что

$$\int_0^T G(X(t), u(t), t)\mathrm{d}t \subset \sum_{j=0}^{m-1} |G(X_j, u_j, t_j)\tau| + H(X_m) + R_Q, \tag{16}$$

где $\omega(R_Q) = O(\tau^p)$.

Пусть нам известно X_{m-1}, а $t \in [(m-1)\tau, m\tau]$. Выберем на этом интервале, в соответствии с принципом оптимальности, некоторые u_{m-1}, минимизирующие $\widetilde{Q}_{m-1} = |G(X_{m-1}, u_{m-1}, t_{m-1})| + |H(\Phi(X_{m-1}, u_{m-1}, t_{m-1}))|$.

Решая задачу минимизации $\widetilde{Q}_{m-1}$, по некоторому интервальному методу p-го порядка, получим интервал $U_{m-1} \ni u_{m-1}$, для которого $\omega(U_{m-1}) = O(\tau^p)$. В качестве такого метода, например, можно указать использование интервального метода Чебышева [4] для уравнения

$$\frac{\partial\left(G(X_{m-1}, u_{m-1}, t_{m-1}) + H(\Phi(X_{m-1}, u_{m-1}, t_{m-1}))\right)}{\partial U_{m-1}} = 0. \tag{17}$$

Ясно, что для решения последнего уравнения выполнено включение

$$\min_{\substack{u_{m-1}\in\Omega_\tau \\ x_{m-1}\in X_{m-1}}} \operatorname*{Rs}_{X_{m-1}\to x_{m-1}} \left(G(X_{m-1}, u_{m-1}, t_{m-1}) + H(\Phi(X_{m-1}, u_{m-1}, t_{m-1}))\right) \in U_{m-1}, \tag{18}$$

где Rs — операция сужения интервальной функции [4] и оно, т. е. U_{m-1}, зависит от X_{m-1}: $U_{m-1} = P_{m-1}(X_{m-1})$.

Рассмотрим интервал $[(m-2)\tau, m\tau]$, которому соответствует сумма

$$\widetilde{Q}_{m-2} = |G(X_{m-2}, u_{m-2}, t_{m-2})| + |G(X_{m-1}, u_{m-1}, t_{m-1})| + |H(X_m)|.$$

Пусть нам известно X_{m-2}. Тогда из принципа оптимальности следует, что лишь состояние X_{m-2} и цель управления минимизация $\widetilde{Q}_{m-2}$ определяют оптимальное управление на $[(m-2)\tau, m\tau]$. Так как, согласно (12), X_{m-1} выражается через X_{m-2}, то аналогично предыдущему определим некий интервал U_{m-2}, зависящий лишь от X_{m-2} и такой, что

$$\min_{\substack{u_{m-2}\in\Omega_\tau \\ x_{m-2}\in X_{m-2}}} \operatorname*{Rs}_{X_{m-2}\to x_{m-2}} \left(G(X_{m-2}, u_{m-2}, t_{m-2}) + P(\Phi(X_{m-2}, u_{m-2}, t_{m-2}))\right) \in U_{m-2} = P_{m-2}(X_{m-2}).$$

Последнее включение выражает также и смысл сформулированного принципа оптимальности: *применение принципа оптимальности при минимизации* $\widetilde{Q}_{m-2}$ *лишь к интервалу* $[(m-2)\tau, (m-1)\tau]$ *не может дать оптимальное решение на интервале* $[(m-2)\tau, m\tau]$.

Таким образом, мы, предполагая известным X_{m-j} $(j = 2, 3, \ldots, m)$, на частичном интервале времени $[(m-j)\tau, m\tau]$ можем определить рекуррентно интервалы U_{m-j} такие, что

$$\min_{\substack{u_{m-j}\in\Omega_\tau \\ x\in X}} \operatorname*{Rs}_{X_{m-j}\to x_{m-j}} \left(G(X_{m-j}, u_{m-j}, t_{m-j}) + P_{m-j}(\Phi(X_{m-j}, u_{m-j}, t_{m-j}))\right) \in U_{m-j} =$$
$$= P_{m-j}(X_{m-j}). \tag{19}$$

Приведенные рассуждения обосновывают следующий алгоритм:

Алгоритм IMOD

1. Используя X_0, находим интервал U_0, удовлетворяющий (19) при $j = m$.

2. Используя U_0 и X_0, по (12) при $j = 0$ находим $X_1 = \Phi(X_0, U_0, t_0)$.

3. Используя опорное значение X_1, находим интервал U_1, удовлетворяющий (19) при $j = m - 1$ и, в соответствии с интервальным принципом оптимальности, гарантированно содержащий оптимальное u_1 для задачи (12)–(15).

4. Действуя аналогичным образом, каждый раз по X_j определяем интервал U_j, содержащий оптимальное поведение (состояние) системы X_{j+1}, вплоть до X_m.

После того, как будет найдено решение, т. е. совокупность интервалов U_i $(i = 0, 1, \ldots, m-1)$, мы, с учетом условия (3), можем построить подходящую функцию управления. В том случае, когда информация об управляющем воздействии на систему используется для корректировки динамики процесса, например с использованием микрокомпьютерной техники, из U_i выбираются подходящие значения. На практике u_i, как правило, имеют содержательную характеристику, и поскольку $u_i \in U_i = [\underline{u}_i, \bar{u}_i]$, в качестве реального значения u_i может быть взято $\overline{u}_i$ (либо $\bar{u}_i$) как наименьшее (наибольшее) значение для u_i. К примеру, $u(t)$ может быть подлежащей определению величиной давления, силы тока, количеством того или иного вещества и т. п.

Предшествующие формулировке алгоритма IMOD рассуждения могут быть приняты в смысле теоремы существования решения задачи (1)–(4). Доказательство единственности проводится стандартным образом [8], на основе интервального принципа оптимальности Беллмана. Ниже будет доказана теорема, которая обосновывает алгоритм IMOD: будет показано, что полученные по нему интервалы включают в себя всевозможные состояния системы и соответствующие им решения, а также по ширине не превышают априори указываемых величин.

Сделаем необходимые предположения.

При описании IMOD мы неявно предположили, что

1) правая часть (7) представляет функцию $\Phi(X, Y, t)$, определенную и непрерывную для всех интервалов X и Y, получаемых в соответствии с условиями (2)–(4) на промежутке $[0,\ T]$. (В действительности Φ порождается функцией F и условия вычислимости Φ выражаются через эту функцию [4].)

Пусть, кроме того,

2) $\Phi(X, Y, t)$ монотонно по включению.

3) справедливо неравенство

$$\omega(\Phi(X, Y, t)) < L(\omega(X) + \omega(Y)).$$

Теорема. *Пусть справедливы условия 1)–3) и интервалы $X_j (j = \overline{1, m})$, $U_j (j = \overline{0, m-1})$ вычисляются по алгоритму IMOD. Тогда для любого оптимального состояния $x(t) \in X(t)$ и $u(t)$ решения задачи (7)–(11), таких, что $x(T_0^{s-1}) \in X_0^{s-1}$, справедливы включения*

$$x(t_j) \in X_j \quad (j = \overline{1, m}), \tag{20}$$

$$u(t_j) \in U_j \quad (j = \overline{0, 1-m}) \tag{21}$$

и имеют оценки

$$\omega(U_j) \le c\tau^p, \quad j = \overline{1, m}, \tag{22}$$

$$\omega(X_j) \le a\tau^p + b\omega(X_0), \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{23}$$

где a, b, c — вещественные константы, не зависящие от τ и j.

Доказательство. Включения (20), (21) можно доказать по индукции. Действительно, при $j = 0$ имеем $X_1 = \Phi(X_0, U_0, t_0)$, и так как на первом шаге по X_0 было получено U_0, удовлетворяющее (19), то, на основании 2), первый шаг индукции справедлив: $x(t_1) \in X_1$, $u(t_0) \in U_0$.

Пусть $x(t_j) \in X_j$ для $j = \overline{2, k}$ и $u(t_i) \in U_i$ для $i = \overline{1, k-1}$, $k < m$. Из $x(t_{k-1}) \in X_{k-1}$, $u(t_{k-1}) \in U_{k-1}$ и (19) следует, что $u(t_k) \in U_k$. Это, в свою очередь, на основании 2) влечет $x(t_{k+1}) \in X_{k+1}$.

Справедливость включения (22) следует из предположения о порядке итерационного метода, используемого для определения интервалов U_j.

Поскольку формула (12) при известных U_j задает интервальный метод порядка p, мы можем считать, что $\omega(X_j) \le a_0\tau^p + b_0\omega(X_0)$ [9]. Отсюда получаем, что

$$\omega(X_j) = \omega\left(\Phi(X_{j-1}, U_{j-1}, t_{j-1})\right) \le L\left(\omega(X_{j-1}) + \omega(U_{j-1})\right) \le L(a_t a u^p + b_0\omega(X_0) + c_0\tau^p) =$$
$$= L(a_0 + c_0)\tau^p + Lb_0\omega(X_0) = a\tau^p + b\omega(X_0).$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Абдукадыров А. А., Тахиржанов М., Юлдашев З. Х. Об интервальном варианте модели топочного устройства. *Вычислительные технологии*, **4**, №13, 1995, 4–9.

[2] Абдукадыров А. А., Алимов И. И., Юлдашев З. Х. Об интервальных методах исследования логико-динамических систем. В *“Вопросы кибернетики”*, Ташкент, вып. 151, 1995, 65–72.

[3] Юсупбеков Н. Р., Абдукадыров А. А., Тахиржанов М., Юлдашев З. Х. Интервально-аналитические решения логико-дифференциальных уравнений. В *“Матем. методы в химии и хим. технологии: Сб. тез. докл. междунар. конф.”*, Ч. I, Секция I, Тверь, 1995, 69.

[4] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. *Методы интервального анализа.* Наука, Новосибирск, 1986.

[5] Жук К. Д., Тимченко А. А. *Автоматизированное проектирование логико-динамических систем.* Наукова думка, Киев, 1981.

[6] Schr'oder G. Differentiation of interval functions. In *“Proc. Amer. Math. Soc.”*, **36**, 1972, 485–490.

[7] Moore R. F. *Interval analysis.* Prentice Hall, Englewood Cliffis, 1966.

[8] Ройтенберг Я. Н. *Теория нелинейных колебаний и автоматическое регулирование.* Ч. 2, Изд-во Моск. ун-та, М., 1962.

[9] Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. *Интервальные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие.* Изд-во Ташкентского госун-та, Ташкент, 1986.

Поступила в редакцию 11 июня 1997 г.