Вычислительные технологии **Том 2, № 5, 1997**

МОНОТОННАЯ СХЕМА САМАРСКОГО ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В СЛУЧАЕ ТРЕТЬЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

А. И. Задорин
Институт информационных технологий и прикладной математики СО РАН, Омск, Россия
e-mail: zadorin@omsk.net.ru

The third boundary problem is considered fro an ordinary weakly non-linear differential equation of the second order with a small parameter of the highest derivative. The problem solution does not contain an explicit boundary layer and in order to solve it on a uniform grid it is suggested that the Samarskii scheme be employed. The uniform convergence of the scheme is substantiated. The possibility to make use of this scheme for solving a boundary problem on a semi-infinite material is studied.

Для слабо нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u'' - a(x)u' - f(x,u) = 0, \tag{1}$$

$$u(0) = A,\ R_\varepsilon u = \eta u(1) + \delta u'(1) = B, \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered} a \in C^1[0,1],\ f \in C^1([0,1]\times R),\ a(x) \geq \alpha > 0, \varepsilon \in (0,1], \\ \partial f/\partial u \geq -\beta, \beta > 0, \alpha^2 - 4\beta\varepsilon \geq \gamma > 0,\ \eta \geq 0, \delta > 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Решение задачи (1)–(2) не содержит выраженный пограничный слой (первая производная решения ограничена равномерно по параметру ε), поэтому для нахождения решения схема, учитывающая погранслойный рост решения [1−3], не используется. Для аппроксимации дифференциального уравнения на равномерной сетке применяется монотонная схема Самарского [4] второго порядка точности.

В случае линейной сингулярно-возмущенной первой краевой задачи с экспоненциальным пограничным слоем схема Самарского исследовалась в [5, 6], где показано, что эта схема не сходится в пограничном слое. В работе [7] для случая линейной первой краевой задачи рассмотрена модификация схемы Самарского и на специальной сетке с кусочно-постоянным шагом, мелким в пограничном слое, обоснован второй порядок сходимости схемы с точностью до логарифмического множителя от числа узлов. В [8] на такой же неравномерной сетке рассмотрена третья краевая задача, причем краевые условия таковы, что решение имеет экспоненциальный пограничный слой. Доказательство сходимости основано на равномерной ограниченности функции Грина для разностной схемы.

В данной работе вводится аппроксимация краевого условия, соответствующая порядку аппроксимации самого уравнения. Доказывается, что анализируемая схема имеет точность $O(h^2/(h+\varepsilon))$. Исследуется возможность применения этой схемы к решению уравнения на полубесконечном интервале. Показывается, что схема устойчива к погрешностям, возникающим при переносе краевого условия с бесконечности. Предварительно исследуются условия, при которых выполняется принцип максимума для трехточечного разностного оператора с краевым условием, соответствующим аппроксимации производной со вторым порядком.

Всюду под C и C_i будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов сетки. Определим норму сеточной функции p^h: $||p^h|| = \max\limits_i |p_i^h|$. Под неравенством векторов будем подразумевать соответствующее покомпонентное неравенство.

1. Анализ монотонности трехточечных разностных схем

Рассмотрим трехточечную разностную схему:

$$L_n^h u^h = A_n u_{n+1}^h - B_n u_n^h + C_n u_{n-1}^h = f_n^h,\ n = 1, 2, ..., N-1, \tag{1.1}$$

$$u_0^h = A,\ R^h u^h = \eta u_N^h + \delta[3u_N^h - 4u_{N-1}^h + u_{N-2}^h]/(2h) = B. \tag{1.2}$$

Предполагаем, что при всех n $A_n > 0,\ C_n > 0$. Сформулируем условие, когда для схемы (1.1)–(1.2) справедлив принцип максимума.

Лемма 1. *Пусть существует сеточная функция ϕ^h:*

$$\phi^h > 0,\ L_n^h \phi^h < 0,\ n = 1, 2, ..., N-1,\ \phi_N^h \geq \phi_{N-1}^h \geq \phi_{N-2}^h,$$

$$\frac{A_{N-1}}{C_{N-1}} \phi_N^h - 4\phi_{N-1}^h + \phi_{N-2}^h \leq 0,\quad 3\phi_N^h - 4\phi_{N-1}^h + \phi_{N-2}^h > 0. \tag{1.3}$$

Тогда из условий

$$L_n^h u^h \leq 0,\ n = 1, 2, ..., N-1,\ u_0^h \geq 0,\ R^h u^h \geq 0 \tag{1.4}$$

следует $u^h \geq 0$.

Доказательство. Предположим, что при каких-то n оказалось $u_n^h < 0$, и получим противоречие. Определим $V^h:\ u_n^h = \phi_n^h V_n^h$. Тогда

$$L_n^h u^h = C_n \phi_{n-1}^h V_{n-1}^h - [-L_n^h \phi^h + C_n \phi_{n-1}^h + A_n \phi_{n+1}^h] V_n^h + A_n \phi_{n+1}^h V_{n+1}^h. \tag{1.5}$$

Предположим, что $u_N^h \geq 0$. Тогда $V_N^h \geq 0$ и сеточная функция V^h имеет локальный отрицательный минимум, для некоторого m будет $V_{m-1}^h \geq V_m^h$, $V_{m+1}^h \geq V_m^h$, что противоречит неравенству

$$C_m \phi_{m-1}^h (V_{m-1}^h - V_m^h) + A_m \phi_{m+1}^h (V_{m+1}^h - V_m^h) < 0. \tag{1.6}$$

Предположим теперь, что $u_N^h < 0$. Если $u_N^h > u_{N-1}^h$, то существует точка локального отрицательного минимума, и снова получим противоречие.

Пусть $u_N^h \leq u_{N-1}^h$. Из условия $R^h u^h \geq 0$ следует $u_{N-2}^h \geq u_{N-1}^h$. Наконец, осталось рассмотреть случай $u_N^h \leq u_{N-1}^h \leq u_{N-2}^h < 0$. В силу условий (1.3) выполнится $V_N^h \leq V_{N-1}^h \leq V_{N-2}^h < 0$. Из (1.3)-(1.4) следует:

$$3\phi_N^h V_N^h - 4\phi_{N-1}^h V_N^h + \phi_{N-2}^h V_N^h < 0,$$

$$3\phi_N^h V_N^h - 4\phi_{N-1}^h V_{N-1}^h + \phi_{N-2}^h V_{N-2}^h \geq 0,$$

значит,

$$4\phi_{N-1}^h (V_N^h - V_{N-1}^h) + \phi_{N-2}^h (V_{N-2}^h - V_N^h) > 0.$$

Это неравенство можно записать в виде

$$(4\phi_{N-1}^h - \phi_{N-2}^h)(V_N^h - V_{N-1}^h) + \phi_{N-2}^h (V_{N-2}^h - V_{N-1}^h) > 0. \tag{1.7}$$

С другой стороны, из (1.5) получим

$$A_{N-1}\phi_N^h (V_N^h - V_{N-1}^h) + C_{N-1}\phi_{N-2}^h (V_{N-2}^h - V_{N-1}^h) < 0. \tag{1.8}$$

Из (1.7)–(1.8) вытекает

$$(V_{N-2}^h - V_{N-1}^h)[A_{N-1}\phi_N^h - C_{N-1}(4\phi_{N-1}^h - \phi_{N-2}^h)] > 0,$$

что противоречит условиям (1.3). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть для некоторой сеточной функции ϕ^h выполнены условия (1.3). Тогда для произвольной сеточной функции v^h при всех n справедлива оценка*

$$|v_n^h| \leq M\phi_n^h, \quad M = \max\left\{\max_n \left|\frac{L_n^h v^h}{L_n^h \phi^h}\right|, \frac{|R^h v^h|}{R^h \phi^h}, \frac{|v_0^h|}{\phi_0^h}\right\}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Определим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = M\phi_n^h \pm v_n^h.$$

Тогда, как нетрудно убедиться, для Ψ^h выполнятся соотношения (1.4) и в силу леммы 1 $\Psi^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Эта лемма, при соблюдении ее условий, дает единственность и ограниченность решения схемы (1.1)–(1.2).

2. Анализ монотонной схемы Самарского

Для задачи (1)–(2) на равномерной сетке Ω выпишем разностную схему:

$$T_n^h u^h = \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} u^h - a_n \Lambda_{x,n} u^h - f(x_n, u_n^h) = 0, \tag{2.1}$$

$$u_0^h = A, \ R^h u^h = \eta u_N^h + \delta[3u_N^h - 4u_{N-1}^h + u_{N-2}^h]/(2h) = B, \tag{2.2}$$

где $n = 1, 2, ..., N-1, \quad a_n = a(x_n)$

$$\Lambda_{xx,n} u^h = \frac{u_{n+1}^h - 2u_n^h + u_{n-1}^h}{h^2}, \quad \Lambda_{x,n} u^h = \frac{u_n^h - u_{n-1}^h}{h}, \ \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{1 + a_n h/(2\varepsilon)}.$$

Лемма 3. *Пусть* $\partial f/\partial u \ge 0$, p^h *и* q^h *— две произвольные сеточные функции. Тогда при всех* n

$$|p_n^h - q_n^h| \le \alpha^{-1}\|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h| +$$
$$+\delta^{-1}\alpha^{-1}(\varepsilon+\alpha h)|R^h p^h - R^h q^h| \exp[\alpha(\varepsilon+\alpha h)^{-1}(x_n - 1)].$$

Доказательство. Пусть $z^h = p^h - q^h$. Из (2.1)–(2.2) получим:

$$L_n^h z^h = \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z^h - a_n \Lambda_{x,n} z^h - \frac{f(x_n, p_n^h) - f(x_n, q_n^h)}{p_n^h - q_n^h} z_n^h = T_n^h p^h - T_n^h q^h,$$

$$z_0^h = p_0^h - q_0^h,\ R^h z^h = R^h p^h - R^h q^h,\ n = 1, 2, ..., N-1.$$

Покажем, что при выполнении условий леммы для оператора L^h справедлив принцип максимума. Определим

$$\phi_n^h = (1 + \varepsilon^{-1}\alpha h)^{n-N}.$$

Докажем, что для функции ϕ^h справедливы соотношения (1.3). Нетрудно убедиться, что $L_n^h \phi^h < 0$. Остановимся на проверке остальных условий. Имеем

$$\frac{C_{N-1}}{A_{N-1}} > 1 + \frac{\alpha h}{\varepsilon},\quad 3\phi_N^h - 4\phi_{N-1}^h + \phi_{N-2}^h > \frac{2\alpha h}{\varepsilon + \alpha h} > 0,$$

откуда следует (1.3).

Итак, принцип максимума для L^h имеет место. Определим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = \alpha^{-1}\|T^h p^h - T^h q^h\| x_n + |p_0^h - q_0^h| + \alpha^{-1}\delta^{-1}(\varepsilon + \alpha h)|R^h p^h - R^h q^h|\phi_n^h \pm z_n^h.$$

Тогда для функции Ψ^h выполнены условия (1.4) и в силу принципа максимума $\Psi^h \ge 0$. Можно показать:

$$\phi_n^h \le \exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - 1)].$$

Это доказывает лемму.

Из леммы 3 следует единственность решения схемы (2.1)–(2.2) и оценка устойчивости:

$$\|u^h\| \le \alpha^{-1}\max_n |f(x_n, 0)| + |A| + \alpha^{-1}\delta^{-1}(\varepsilon + \alpha h)|B|.$$

Исследуем устойчивость схемы (2.1)–(2.2) к возмущению коэффициентов в краевых условиях. От (2.1)–(2.2) перейдем к краевой задаче:

$$T_n^h \tilde{u}^h = 0, \tilde{u}_0^h = \tilde{A},\ \tilde{R}^h \tilde{u}^h = \tilde{\eta}\tilde{u}_N^h + \tilde{\delta}[3\tilde{u}_N^h - 4\tilde{u}_{N-1}^h + \tilde{u}_{N-2}^h]/(2h) = \tilde{B}.$$

Лемма 4. *Пусть* $\partial f/\partial u \ge 0$,

$$|\delta - \tilde{\delta}| \le \Delta,\ |\eta - \tilde{\eta}| \le \Delta,\ |B - \tilde{B}| \le \Delta,\ \tilde{\eta} \ge 0, \tilde{\delta} > 0,$$

тогда найдется C, *такое, что при всех* n

$$|u_n^h - \tilde{u}_n^h| \le C\Delta(\varepsilon + \alpha h)\exp[\alpha(\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - 1)] + |A - \tilde{A}|.$$

Доказательство. Пусть $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Тогда для некоторой сеточной функции θ^h

$$\varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z^h - a_n \Lambda_{x,n} z^h - \frac{\partial}{\partial u} f(x_n, \mathrm{th}_n^h) z_n^h = 0,\ a_n = a(x_n),$$

$$z_0^h = A - \tilde{A},\ \tilde{R}^h z^h = B - \tilde{B} + (\eta - \tilde{\eta})u_N^h + (\delta - \tilde{\delta})[3u_N^h - 4u_{N-1}^h + u_{N-2}^h]/(2h).$$

Можно показать, что

$$|\tilde{R}^h z^h| \le C_0\Delta,\ C_0 = 1 + |B|\delta^{-1} + (\delta^{-1}\eta + 1)||u^h||.$$

Задавая сеточную функцию Ψ^h

$$\Psi^h_n = C\Delta(\varepsilon + \alpha h)(1 + \alpha\varepsilon^{-1}h)^{n-N} + |A - \tilde{A}| \pm z^h_n,$$

используя принцип максимума и подбирая подходящую постоянную C, придем к утверждению леммы.

Оценим погрешность аппроксимации правого краевого условия согласно (2.2).

Лемма 5. *Найдется C такое, что*

$$I = \left|\frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2h} - u'(1)\right| \le C\frac{h^2}{\theta^2}, \tag{2.3}$$

где $u_n = u(x_n), \mathrm{th} = \max(h, \varepsilon)$.

Доказательство. Учитывая, что для произвольной достаточно гладкой функции $r(x)$ справедливо представление

$$r(x) = r(x_0) + r'(x_0)(x - x_0) + \int\limits_{x_0}^{x}(x - s)r''(s)ds,$$

используя интегрирование по частям, получим:

$$I = \frac{1}{2h}\left|2\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}(s - x_{N-1})^2u'''(s)ds - 0.5\int\limits_{x_{N-2}}^{x_N}(s - x_{N-2})^2u'''(s)ds\right|.$$

Следовательно,

$$I \le S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \frac{1}{h}\left|\int\limits_{x_{N-1}}^{x_N}[(s - x_{N-1})^2 - (s - x_{N-2})^2/4]u'''(s)ds\right|,$$

$$S_2 = \frac{1}{4h}\left|\int\limits_{x_{N-2}}^{x_{N-1}}(s - x_{N-2})^2u'''(s)ds\right|.$$

Можно показать, что

$$S_1 = \frac{1}{4h}\left|\int\limits_{1-h}^{1}[3(s - 1)^2 + 4h(s - 1)]u'''(s)ds\right|. \tag{2.4}$$

Для решения задачи (1)–(2) справедливы оценки [9]:

$$\left|\frac{d^j}{dx^j}u(x)\right| \le C[1 + \varepsilon^{1-j}\exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x - 1)]],\ j = 1, 2, 3, 4. \tag{2.5}$$

Учитывая, что в (2.4) множитель при $u'''(s)$ знакопостоянен, подставляя оценку (2.5) в (2.4) и осуществляя интегрирование, несложно показать:

$$S_1 \le C_1h^2/\,\mathrm{th}^2\,.$$

Можно доказать, что аналогичная оценка справедлива для S_2. Это доказывает лемму.

Остановимся на вопросе равномерной сходимости схемы (2.1)–(2.2).

Теорема 1. *Пусть $\partial f/\partial u \geq 0$, Тогда для решения схемы (2.1)–(2.2) справедлива оценка точности:*

$$||u^h - [u]_\Omega|| \leq C\frac{h^2}{h+\varepsilon}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - [u]_\Omega$. Тогда для некоторого th^h

$$L_n^h z^h = \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z^h - a_n \Lambda_{x,n} z^h - \frac{\partial}{\partial u} f(x_n, \mathrm{th}_n^h) z_n^h = T_n^h u^h - T_n^h [u]_\Omega,$$

$$z_0^h = 0,\ R^h z^h = \delta(u'(1) - [3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}]/(2h)),\ u_n = u(x_n). \tag{2.7}$$

По аналогии с линейным случаем [5] несложно убедиться, что для некоторой постоянной C_1 справедлива оценка

$$|T_n^h [u]_\Omega - T_n^h u^h| \leq \frac{C_1 h}{h+\varepsilon} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} [\varepsilon^2 |u^{(4)}(x)| + \varepsilon |u^{(3)}(x)| + |u^{(2)}(x)|] dx. \tag{2.8}$$

Учитывая (2.5), из (2.8) получим:

$$|T_n^h [u]_\Omega - T_n^h u^h| \leq C_2 \frac{h^2}{h+\varepsilon} [1 + \mathrm{th}^{-1} \exp[\alpha \varepsilon^{-1} (x_{n+1} - 1)]]. \tag{2.9}$$

Определим сеточные функции ϕ^h, ρ^h с компонентами:

$$\phi_n^h = [1 + \alpha h/(2\varepsilon)]^{n-N},\ \rho_n^h = [1 + \alpha h/(2\varepsilon)]^{n+1-N}. \tag{2.10}$$

Тогда

$$L_n^h \phi^h \leq 0,\ L_n^h \rho^h \leq -\frac{0.5\alpha^2}{2\varepsilon + \alpha h} \rho_n^h,\ \rho_n^h \geq \exp[\alpha \varepsilon^{-1} (x_{n+1} - 1)],$$

$$R^h \phi^h \geq \delta \alpha / (2\varepsilon + \alpha h),\ R^h \rho^h \geq 0. \tag{2.11}$$

Определим сеточную функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = C_3 h^2\, \mathrm{th}^{-1} (\phi_n^h + \rho_n^h + x_n) \pm z_n^h.$$

Учитывая лемму 5, соотношения (2.7), (2.9), (2.11), можно показать, что для некоторой постоянной C_3 для функции Ψ^h выполнятся условия (1.4). В силу принципа максимума $\Psi^h \geq 0$. Следовательно, при всех $n < N$

$$|u_n^h - u_n| \leq C\frac{h^2}{h+\varepsilon}.$$

Покажем, что такая же оценка имеет место при $n = N$. Учитывая (2.3), несложно показать:

$$\left| \eta z_N^h + \delta \frac{3z_N^h - 4z_{N-1}^h + z_{N-2}^h}{2h} \right| \leq C\frac{h^2}{\mathrm{th}^2}.$$

Из этого неравенства следует требуемое при $n = N$. Теорема доказана.

Остановимся теперь на случае, когда производная $\partial f/\partial u$ может быть отрицательной.

Лемма 6. *Пусть выполнены ограничения (3),*

$$\alpha^2 - 4\beta(\varepsilon + \alpha h/2) \geq \gamma > 0, \tag{2.12}$$

и пусть p^h и q^h — две произвольные сеточные функции. Тогда при всех n

$$|p_n^h - q_n^h| \leq [2\alpha^2\beta^{-1}\gamma^{-1}\|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h|]\exp(2\beta\alpha^{-1}x_n)+$$

$$+\delta^{-1}\alpha^{-1}(2\varepsilon + \alpha h)|R^h p^h - R^h q^h|\exp[\alpha(2\varepsilon+\alpha h)^{-1}(x_n - 1)].$$

Доказательство. Определим линейный оператор L^h таким же образом, как и в лемме 3. Покажем, что при выполнении условий леммы для оператора L^h справедлив принцип максимума. Определим ϕ^h согласно (2.10), $s_n^h = [1 + 2\beta h\alpha^{-1}]^n$. Тогда при всех n

$$L_n^h\phi^h \leq -\gamma(4\varepsilon + 2\alpha h)^{-1}\phi_n^h < 0, \quad L_n^h s^h \leq -0.5\beta\gamma\alpha^{-2}s_n^h,$$

$$s_n^h \leq \exp[2\beta\alpha^{-1}x_n], \quad R^h s^h \geq 0, R^h\phi^h \geq \delta\alpha[2\varepsilon + \alpha h]^{-1}. \tag{2.13}$$

Условия (1.3) ограничения выполнены, и для оператора L^h справедлив принцип максимума. Определим функцию Ψ^h:

$$\Psi_n^h = [2\alpha^2\beta^{-1}\gamma^{-1}\|T^h p^h - T^h q^h\| + |p_0^h - q_0^h|]s_n^h+$$

$$+\delta^{-1}\alpha^{-1}(2\varepsilon + \alpha h)|R^h p^h - R^h q^h|\phi_n^h \pm (p_n^h - q_n^h).$$

Учитывая (2.13), несложно показать, что для функции Ψ^h справедливы соотношения (1.4) и в силу принципа максимума, имеющего место согласно лемме 1, $\Psi^h \geq 0$. Это доказывает лемму.

Остановимся на вопросе обоснования сходимости схемы (2.1)–(2.2) в случае выполнения ограничений (3).

Теорема 2. *Пусть выполнены ограничения (3), причем шаг сетки удовлетворяет ограничению (2.12). Тогда для решения схемы (2.1)–(2.2) справедлива оценка точности*

$$||u^h - [u]_\Omega|| \leq C\frac{h^2}{h+\varepsilon}.$$

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 1, сеточная функция Ψ^h при этом имеет вид

$$\Psi_n^h = Ch^2\,\mathrm{th}^{-1}(\phi_n^h + \rho_n^h + s_n^h) \pm z_n^h.$$

Рассмотрим процедуру нахождения решения схемы (2.1)–(2.2). Аппроксимация производной в краевом условии (2.2) нарушает трехдиагональность матрицы системы разностных уравнений. Учитывая (2.1) при $n = N-1$, исключим u_{N-2}^h в (2.2). Тогда правое краевое условие в (2.2) примет вид

$$2h\delta^{-1}\eta u_N^h + (3 - A_{N-1}C_{N-1}^{-1})(u_N^h - u_{N-1}^h) = 2h\delta^{-1}B - f(x_{N-1}, u_{N-1}^h)C_{N-1}^{-1}.$$

Определим итерационный метод для нахождения решения схемы (2.1)–(2.2):

$$\tilde{L}_n^h u^{k+1} = \varepsilon_n\Lambda_{xx,n}u^{k+1} - a_n\Lambda_{x,n}u^{k+1} - Mu_n^{k+1} = f(x_n, u_n^k) - Mu_n^k,\ u_0^{k+1} = A,$$

$$\tilde{R}^h u^{k+1} = 2h\delta^{-1}\eta u_N^{k+1} + (3 - A_{N-1}C_{N-1}^{-1})(u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1})+$$

$$+MC_{N-1}^{-1}u_{N-1}^{k+1} = 2h\delta^{-1}B + C_{N-1}^{-1}(Mu_{N-1}^k - f(x_{N-1}, u_{N-1}^k)). \tag{2.14}$$

Лемма 7. *Пусть*

$$m \le \frac{\partial f}{\partial u} \le M.$$

Тогда метод (2.14) сходится и при всех k справедлива оценка

$$||u^{k+1} - u^h|| \le (1 - m/M)||u^k - u^h||.$$

Доказательство. Определим $z^k = u^k - u^h$. Тогда для некоторой сеточной функции th^k

$$\varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z^{k+1} - a_n \Lambda_{x,n} z^{k+1} - M z_n^{k+1} = (f_u'(x_n, \mathrm{th}_n^k) - M) z_n^k,\ z_0^{k+1} = 0,$$

$$2h\delta^{-1}\eta z_N^{k+1} + (3 - A_{N-1}C_{N-1}^{-1})(z_N^{k+1} - z_{N-1}^{k+1}) + MC_{N-1}^{-1} z_{N-1}^{k+1} =$$
$$= C_{N-1}^{-1}(M - f_u'(x_{N-1}, \mathrm{th}_{N-1}^k)) z_{N-1}^k.$$

Выбирая сеточную функцию Ψ^h с компонентами

$$\Psi_n^h = (1 - m/M)||z^k|| \pm z_n^{k+1},$$

убеждаемся, что

$$\tilde{L}_n^h \Psi^h \le 0, \quad \tilde{R}^h \Psi^h \ge 0,\ \Psi_0^h \ge 0.$$

В силу принципа максимума, справедливого и в этом случае, $\Psi^h \ge 0$. Это доказывает лемму.

На каждой итерации u^{k+1} может быть найдено методом прогонки, который в данном случае устойчив [4].

Схема (2.1)–(2.2) может быть использована при решении краевой задачи на полубесконечном интервале.

Рассмотрим краевую задачу для линейного уравнения:

$$Lu = \varepsilon u'' - a(x)u' - c(x)(u - G) = 0,\ u(0) = A,\ u(\infty) = G. \tag{2.15}$$

Предполагаем, что функции $a(x)$, $c(x)$ непрерывно дифференцируемы,

$$D \ge a(x) \ge \alpha > 0,\ \varepsilon \in (0, 1]\ \ c(x) \ge \beta > 0,\ a(x) \to m,\ c(x) \to n,\ x \to \infty.$$

Согласно [10], при наложенных ограничениях существует единственное решение задачи (2.15). Вопрос переноса краевого условия с бесконечности в случае линейной задачи рассматривался, например, в [11].

Перейти к конечному интервалу $[0, L_0]$ можно, задав

$$u'(L_0) = \gamma(L_0)(u(L_0) - G), \tag{2.16}$$

где $\gamma(x)$ является решением задачи с начальным условием на бесконечности:

$$\varepsilon\gamma' - a(x)\gamma + \varepsilon\gamma^2 - c(x) = 0,\ \gamma(\infty) = r, \tag{2.17}$$

где r — отрицательный корень уравнения $\varepsilon q^2 - mq - n = 0$. Определим еще r_0 как отрицательный корень уравнения $\varepsilon q^2 - Dq - \beta = 0$. Нетрудно убедиться, что $\gamma(x) \le 0$, $|\gamma(x)| \le \|c\|/\alpha$.

При решении уравнения (2.15) на конечном интервале $[0, L_0]$ с помощью схемы (2.1)–(2.2) $\gamma(L_0)$ из (2.17) может быть найдено с некоторой погрешностью. Оценим влияние этой погрешности на точность решения при использовании схемы (2.1)–(2.2).

Итак, рассмотрим схему (2.1)–(2.2) применительно к задаче (2.15):

$$\varepsilon_n \Lambda_{xx,n} \tilde{u}^h - a_n \Lambda_{x,n} \tilde{u}^h - c_n(\tilde{u}^h_n - G) = 0, \tag{2.18}$$

$$\tilde{u}^h_0 = A,\ [3\tilde{u}^h_N - 4\tilde{u}^h_{N-1} + \tilde{u}^h_{N-2}]/(2h) = \tilde{\gamma}(L_0)(\tilde{u}^h_N - G). \tag{2.19}$$

Теорема 3. *Пусть $u(x)$ — решение задачи (2.15), $\tilde{u}^h$ — решение схемы (2.18)–(2.19). Пусть*

$$|\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0)| \le \Delta, \quad \tilde{\gamma}(L_0) \le 0.$$

Тогда при всех n

$$|\tilde{u}^h_n - u(x_n)| \le C\Delta(\varepsilon + \alpha h)\exp[r_0 L_0 + \alpha(\varepsilon + \alpha h)^{-1}(x_n - L_0)] + C\frac{h^2}{h+\varepsilon}. \tag{2.20}$$

Доказательство. Пусть u^h — решение схемы (2.18)–(2.19) в случае точного значения $\gamma(L_0)$. Введем $z^h = u^h - \tilde{u}^h$. Нетрудно убедиться, что тогда

$$L^h_n z^h = \varepsilon_n \Lambda_{xx,n} z^h - a_n \Lambda_{x,n} z^h - c_n z^h_n = 0,\ z^h_0 = 0,$$

$$R^h z^h = [3z^h_N - 4z^h_{N-1} + z^h_{N-2}]/(2h) - \tilde{\gamma}(L_0) z^h_N = (\gamma(L_0) - \tilde{\gamma}(L_0))(u^h_N - G).$$

На основании принципа максимума, подбирая подходящую барьерную функцию, можно убедиться, что

$$|u(x) - G| \le |A - G| \exp[r_0 x].$$

Следовательно,

$$|R^h z^h| \le C\Delta\left[\frac{h^2}{h+\varepsilon} + \exp(r_0 L_0)\right].$$

Задавая сеточную функцию Ψ^h с компонентами

$$\Psi^h_n = C\Delta(\varepsilon + \alpha h)\left[\frac{h^2}{h+\varepsilon} + \exp[r_0 L_0]\right](1 + \alpha h \varepsilon^{-1})^{n-N} \pm z^h_n,$$

используя принцип максимума для разностного оператора, получим $\Psi^h \ge 0$. Учитывая, что

$$|u^h_n - u(x_n)| \le Ch^2(h+\varepsilon)^{-1},$$

получим утверждение теоремы.

Остановимся на результатах численных экспериментов. Рассматриваемая задача имела вид

$$\varepsilon u'' - u' - \exp[-u] - F(x) = 0,$$

$$u(0) = \varepsilon\exp(-\varepsilon^{-1}), u'(1) = 1, \tag{2.21}$$

где $F(x)$ соответствует решению

$$u(x) = \varepsilon\exp[\varepsilon^{-1}(x-1)] + \sin(\pi x/2).$$

Решение схемы (2.1)–(2.2) вычислялось с помощью итерационного метода (2.14). Для этого метода задавалось $M = 1$, итерации заканчивались, если

$$||u^{k+1} - u^k|| \leq 10^{-8}.$$

При всех вычислениях требовалось не более 15 итераций. В таблице приведена определенная выше норма погрешности схемы (2.1)–(2.2) в зависимости от ε и h. Результаты вычислений подтверждают справедливость оценки (2.6).

ε	h			
	0.1	$0.5E-1$	$0.1E-1$	$0.5E-2$
1.0	0.25E-2	0.13E-3	0.33E-4	0.74E-5
1.0E-1	0.14E-1	0.79E-3	0.21E-3	0.53E-4
1.0E-2	0.66E-1	0.82E-2	0.28E-2	0.83E-3
1.0E-3	0.82E-1	0.16E-1	0.75E-2	0.32E-2
1.0E-4	0.82E-1	0.18E-1	0.89E-2	0.44E-2
1.0E-5	0.82E-1	0.18E-1	0.91E-2	0.45E-2
1.0E-6	0.82E-1	0.18E-1	0.91E-2	0.45E-2

Список литературы

[1] Ильин А. М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. *Матем. заметки*, **6**, №2, 1969, 237–248.

[2] Дулан Э., Миллер Д., Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.* Мир, М., 1983.

[3] Задорин А. И., Игнатьев В. Н. Численное решение квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения второго порядка. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **31**, №1, 1991, 157–160.

[4] Самарский А. А. *Теория разностных схем.* Наука, М., 1983.

[5] Kellogg R. B., Tsan A. Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points. *Math. Comput.*, **32**, №144, 1978, 1025–1039.

[6] Алексеевский М. В., Алексеевский В. В. О монотонной схеме А. А. Самарского для дифференциального уравнения с малым параметром. В *“Межвуз. сб. науч. тр., Сер. 13, Электротехника”*, Ереванский политехн. ин-т, Ереван, 1979, Вып. 5, 14–19.

[7] Андреев В. Б., Савин И. А. О равномерной по малому параметру сходимости монотонной схемы Самарского и ее модификации. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **35**, №5, 1995, 739–752.

[8] Андреев В. Б., Савин И. А. К вычислению граничного потока с равномерной по малому параметру точностью. *Там же*, **36**, №12, 1996, 57–63.

[9] Задорин А. И. Численное решение обыкновенного уравнения второго порядка со слабо выраженным пограничным слоем. *Моделирование в механике*, ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, **5**, №1, 1991, 141–152 .

[10] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* Изд-во иностр. лит., М., 1958.

[11] Абрамов А. А., Балла К., Конюхова Н. Б. *Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* Сообщ. по вычисл. матем., ВЦ АН СССР, М., 1981.

Поступила в редакцию 5 мая 1997 г.