Вычислительные технологии **Том 2, № 6, 1997**

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В. К. Андреев, А. А. Родионов
Институт вычислительного моделирования СО РАН
Красноярск, Россия

In this paper some examples of exact invariant solutions of plane motion equations of non-uniform heavy liquid are constructed. A physical interpretation of this solutions is done.

Уравнения движения неоднородной тяжелой жидкости в переменных (t, x, y) имеют вид

$$u_t + uu_x + vu_y + \frac{1}{\rho}p_x = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + \frac{1}{\rho}p_y = -g,$$

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y = 0, \quad u_x + v_y = 0, \tag{1}$$

где $\rho(x, y, t)$ — плотность, $p(x, y, t)$ — давление в жидкости, $g = \text{const} > 0$ — ускорение силы тяжести, (u, v) — вектор скорости в плоскости (x, y). Известно, что уравнения (1) допускают бесконечномерную группу преобразований, определяемую базисными операторами алгебры Ли L [1]:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_u + t\partial_x, \quad X_4 = \partial_v + t\partial_y, \quad X_5 = \partial_t,$$

$$X_6 = t\partial_t + 2x\partial_x + 2y\partial_y + u\partial_u + +v\partial_v + 2p\partial_p,$$

$$X_7 = (y + \frac{1}{2}gt^2)\partial_x - x\partial_y + (v + gt)\partial_u - u\partial_v, \tag{2}$$

$$X_8 = t\partial_t + x\partial_x + (y - \frac{1}{2}gt^2)\partial_y - gt\partial_v, \quad X_9 = \rho\partial_\rho + p\partial_p, X_{10}(\varphi) = \varphi(t)\partial_p.$$

Бесконечномерное преобразование определяется наличием произвольной функции времени $\varphi(t)$ в операторе $X_{10}(\varphi)$.

В работе приводится ряд примеров точных инвариантных решений, построенных с помощью операторов из (2). Можно утверждать, что эти решения принадлежат разным классам, то есть не могут быть переведены одно в другое допустимыми группами преобразований. Это связано с тем, что решения строились на операторах из оптимальной системы подалгебр [2].

Пример 1.

1. Преобразование уравнений. Будем искать решение системы уравнений (1) на операторе $\langle X_9 + \alpha^{-1}X_2\rangle = \langle p\partial_p + \rho\partial_\rho + \alpha^{-1}\partial_y\rangle$, $\alpha = \text{const}$. Рассматриваемый оператор имеет инварианты $x, t, u, v, pe^{-\alpha y}, \rho e^{-\alpha y}$. Поэтому инвариантное решение системы (1) имеет представление

$$u = U(x,t), \quad v = V(x,t), \quad p = e^{\alpha y} p_0 P(x,t), \quad \rho = \rho_0 e^{\alpha y} R(x,t), \tag{3}$$

p_0, ρ_0 — постоянные, имеющие размерность давления и плотности. Подстановка в (1) приводит к фактор-системе

$$U_t + UU_x + \frac{p_0}{\rho_0 R} P_x = 0, \;\; V_t + UV_x + \frac{\alpha P p_0}{\rho_0 R} = -g,$$

$$R_t + UR_x + \alpha V R = 0, \quad U_x = 0.$$

Так как функция U зависит только от времени, система упрощается:

$$U_t + \frac{p_0}{\rho_0 R} P_x = 0, \quad V_t + UV_x + \frac{\alpha p_0 P}{\rho_0 R} = -g,$$

$$R_t + UR_x + \alpha V R = 0, \quad U = U(t). \tag{4}$$

Вместо (x,t) введем новые переменные (ξ, τ) по формулам

$$x = \int\limits_0^t U(t)dt + \xi, \quad t = \tau. \tag{5}$$

Поскольку $\partial/\partial t = \partial/\partial\tau - U\partial/\partial\xi$, $\partial/\partial x = \partial/\partial\xi$, второе и третье уравнения системы (4) преобразуются следующим образом:

$$V_\tau + \frac{\alpha p_0 P}{\rho_0 R} = -g, \qquad R_\tau + \alpha V R = 0. \tag{6}$$

Положим $a = \ln(R)$, $A = p_0 P / R\rho_0$, тогда с учетом (6) вместо (4) получим систему

$$U_\tau + a_\xi A + A_\xi = 0, \quad V_\tau + \alpha A = -g, \quad a_\tau = -\alpha V. \tag{7}$$

Из нее легко исключаются функции A и V:

$$A = \frac{1}{\alpha^2}(a_{\tau\tau} - \alpha g), \quad V = -\frac{1}{\alpha} a_\tau. \tag{8}$$

Подстановка в первое уравнение системы (7) функции A дает одно уравнение на $a(\xi, \tau)$:

$$a_{\tau\tau\xi} + a_\xi(a_{\tau\tau} - \alpha g) = -\alpha^2 U_\tau,$$

где $U(\tau)$ считается известной функцией.

Введем замену

$$b = a - \alpha g \frac{\tau^2}{2}, \tag{9}$$

при этом последнее уравнение перепишется в виде

$$b_{\tau\tau\xi} + b_\xi b_{\tau\tau} = -\alpha^2 U_\tau \equiv f(\tau). \tag{10}$$

Это вполне неклассическое уравнение математической физики.

Уравнение (10) дополняется начальными данными:

$$b = \ln R_0(\xi), b_\tau = -\alpha V_0(\xi), \quad \tau = 0, \quad |\xi| < \infty. \tag{11}$$

2. Точные решения. *Движение с однородным полем скорости.* Пусть $b = d(\xi)+h(\tau)$, тогда из (10) $d = c_1\xi + c_2$, $h = \frac{1}{c_1}\int\limits_0^\tau (\tau - \sigma) f(\sigma) d\sigma + c_3\tau + c_4$, ($c_1, c_2, c_3, c_4 = \text{const}$). При этом начальное распределение R_0 и V_0, согласно (11), таково

$$R_0(\xi) = e^{c_1\xi + c_2 + c_4}, \quad V_0(\xi) = -c_3/\alpha.$$

Тогда решение в исходных переменных имеет вид

$$u = U(t), \quad v = -\frac{1}{\alpha}\left[-\frac{\alpha^2}{c_1}U(t) + c_3 + \alpha g t\right], \tag{12}$$

$$p = -\frac{U_t}{c_1} p_0 R(x - \int\limits_0^t U(t)dt, t) e^{\alpha y}, \quad \rho = \rho_0 R(x - \int\limits_0^t U(t)dt, t) e^{\alpha y},$$

где

$$R(\xi, t) = \exp\left[c_1\xi + c_2 + \frac{1}{c_1}\int\limits_0^t (t-\sigma) f(\sigma) d\sigma + c_3 t + c_4 + \alpha g \frac{t^2}{2}\right].$$

Движение плоского слоя со свободными границами. Предположим, что $U = U_0 = \text{const}$, тогда функция $b(\xi, \tau)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$b_{\tau\tau\xi} + b_\xi b_{\tau\tau} = 0. \tag{13}$$

Последнее уравнение тождественно удовлетворяется в двух случаях: $b_\xi = 0$ и $b_{\tau\tau} = 0$.

В случае $b = b(\tau)$, согласно (9),

$$a = b(\tau) + \alpha g \tau^2/2, \quad R = R(\tau), \quad A = A(\tau), \quad V = V(\tau)$$

и $P = P(\tau)$. Поэтому решение принимает вид

$$u = U_0, \quad v = V(t), \quad p = p_0 e^{\alpha y} P(t), \quad \rho = \rho_0 e^{\alpha y} R(t), \tag{14}$$

причем функции V, P, R связаны двумя уравнениями

$$V_t + \frac{\alpha p_0 P}{\rho_0 R} = -g, \quad R_t + \alpha V R = 0, \tag{15}$$

или, исключая V,

$$(\ln R)_{tt} - \alpha^2 \frac{p_0 P}{\rho_0 R} = \alpha g, \quad R(0) = R_0, \quad R_t(0) = R_1. \tag{16}$$

Таким образом, функция $P(t) > 0$ может быть произвольной. Решение (14), (16) можно интерпретировать как движение плоского слоя толщины h с двумя свободными границами

$$y_1(t) = \int\limits_0^t V(t)dt, \quad y_2(t) = h + \int\limits_0^t V(t)dt,$$

на которых заданы давления $p_1(t) = p(y_1(t), t)$, $p_2(t) = p(y_2(t), t)$, так что перепад давлений

$$\Delta p = p_2(t) - p_1(t) = p_0 P(t) \exp\left[\alpha \int_0^t V(t)dt\right](e^{\alpha h} - 1).$$

Если $\Delta p(t)$ задано, то из последнего соотношения мы можем найти либо $P(t)$, если $V(t)$ задана, либо $V(t)$, если $P(t)$ задано. И, таким образом, движение слоя полностью определено.

Случай $b_{\tau\tau} = 0$ для (13) физического смысла не имеет, так как здесь $a = -\alpha V_0(\xi)\tau + \ln R_0(\xi) + \alpha g \tau^2/2$. Согласно (8) $A = 0$, значит и $P = 0$, т. е. давление в жидкости равно нулю.

Нелинейные поперечные внутренние волны. Пусть теперь $b_\xi \neq 0$, $b_{\tau\tau} \neq 0$. Тогда уравнение (10) с $f = 0$ может быть проинтегрировано. Действительно, $(b_{\tau\tau} e^b)_\xi = 0$, поэтому функция $a(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$a_{\tau\tau} - d(\tau) e^{-a + \alpha g \tau^2/2} = \alpha g.$$

В силу замены переменных (8), (9) $d(\tau) e^{\alpha g \tau^2/2} = p_0 P/\rho_0$, так что

$$a_{\tau\tau} - \frac{\alpha^2 p_0 P(\tau)}{\rho_0 e^a} = \alpha g, \quad a(\xi, 0) = \ln R_0(\xi), \quad a_\tau(\xi, 0) = -\alpha V_0(\xi). \tag{17}$$

Это уравнение совпадает с (16), где $R = e^a$.

Предположим, что $P(\tau) = 1$, $\alpha < 0$ (последнее означает, что имеет место устойчивая стратификация), тогда нахождение $a(\xi, \tau)$ сводится к квадратуре

$$\int\limits_{\ln R_0(\xi)}^{a} \frac{da}{G(\xi, a)} = \sqrt{2}\tau, \tag{18}$$

где

$$G = \left[\frac{\alpha^2 V_0^2(\xi)}{2} + \frac{\mu}{R_0(\xi)} - \alpha g \ln R_0(\xi) - \mu e^{-a} + \alpha g a\right]^{1/2}, \tag{19}$$

$$\mu = \alpha^2 p_0/\rho_0 > 0.$$

Решение (18), (19) найдено в работе [3] и описывает нелинейные поперечные волны различного вида, если число Фруда Fr$= \dfrac{-\alpha V_{0\min}^2}{2g} \geq 1$, $V_{0\min} = \min|V_0(\xi)|$. Действительно, замена $\sigma = \sqrt{-\alpha g}\tau$, $a = z - \dfrac{\alpha V_0^2}{2g} - \dfrac{\mu}{\alpha g R_0} + \ln R_0 - 1$ дает уравнение на $z(\xi, \sigma)$

$$\frac{z_\sigma^2}{2} = 1 - z - \exp(-z - d(\xi)) \tag{20}$$

с функцией $d(\xi)$, равной

$$d(\xi) = -\frac{\alpha V_0^2(\xi)}{2g} - 1 - \ln\left(-\frac{\mu}{\alpha g R_0}\right) - \frac{\mu}{\alpha g R_0}.$$

Видно, что при $d > 0$ (достаточно потребовать: $\alpha V_0^2(\xi)/2g \geq 1$ или Fr≥ 1) уравнение (20) имеет периодическое решение $z_1(d) \leq z \leq z_2(d)$, где z_1, z_2 корни уравнения $1 – z – \exp(– z – d) = 0$,

$z_1 < 0 < z_2 < 1$. При этом каждая частица жидкости колеблется со своим периодом, так как $z_{1,2}$ зависят от ξ.

Заметим здесь же, что система (4) имеет стационарное решение $V = V(x)$, $R = R(x)$, $P = P(x)$, причем можно считать $P(x) = 1$, $U = U_0 = \mathrm{const}$ и функция $a = \ln R$ удовлетворяет уравнению

$$a_{xx} - \frac{\alpha^2 p_0}{\rho_0 U_0^2} e^{-a} = \frac{\alpha g}{U_0^2}.$$

Как показано выше, оно имеет периодическое решение.

Движение с постоянным ускорением. Если движение происходит с постоянным ускорением вдоль оси x, то есть $U_\tau = U_1 = \mathrm{const}$, то за счет растяжения переменной $\xi(\xi \leftrightarrow -\alpha^2 U_1 \xi)$ уравнение (10) преобразуется к виду

$$b_{\tau\tau\xi} + b_\xi b_{\tau\tau} = 1. \tag{21}$$

Уравнение (21) в свою очередь допускает операторы сдвига $\partial_\xi, \partial_\tau$. Будем искать решение в виде бегущей волны

$$b = z(\xi + \beta\tau). \tag{22}$$

При этом для z получается уравнение 3-го порядка

$$z''' + z'z'' = \frac{1}{\beta^2},$$

где штрих означает дифференцирование по переменной $\sigma = \xi + \beta\tau$. Последнее уравнение заменой

$$z = 2\ln h \tag{23}$$

может быть сведено к линейному уравнению Эйри

$$h'' - \left(\frac{\sigma}{2\beta^2} + c\right) h = 0, \tag{24}$$

где c — постоянная интегрирования.

Положим

$$\eta = (4\beta^4)^{1/3} \left(\frac{\sigma}{2\beta^2} + c\right), \tag{25}$$

тогда $h'' - \eta h = 0$. Отсюда

$$h = \sqrt{\eta} \left[c_1 I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right) + c_2 K_{1/3}\left(\frac{2}{3}\eta^{3/2}\right)\right], \tag{26}$$

где $I_{1/3}, K_{1/3}$ — модифицированные функции Бесселя. Через функцию h решение записывается в виде

$$u = U_1 t, \quad v = -[2(\ln h)_t + \alpha g t]/\alpha, \tag{27}$$

$$p = \frac{2\rho_0}{\alpha^2} h^2 (\ln h)_{tt} \exp[\alpha y + \alpha g t^2/2],$$

$$\rho = \rho_0 h^2 \exp[\alpha y + \alpha g t^2/2], \quad U_1 = \mathrm{const},$$

где значение ξ надо заменить, согласно (5), на $x - U_1 t^2/2$.

Возмущение постоянного поля скорости. Рассмотрим уравнение (10) с $f = f_0 e^{-\beta t}$, (f_0, β — постоянные). При $\beta > 0$ скорость $u(t) = -e^{-\beta t} f_0/\beta + U_0$ убывает при $t \to \infty$,

($u \to U_0 = \mathrm{const}$). Будем искать решение в виде $b = b(z)$, где $z = \xi e^{-\beta t}$, тогда $b(z)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению 3-го порядка

$$z^2 b''' + 3zb'' + b' + z^2 b' b'' + zb'^2 = f_0/\beta^2.$$

Последнее заменой $b = 2\ln u(e^\sigma)$, $z = e^\sigma$ сводится к линейному уравнению 2-го порядка

$$u'' - \frac{1}{2}\left(\frac{f_0}{\beta^2}e^\sigma + c\right)u = 0,$$

где c — постоянная интегрирования. Оно имеет решение ([4], с. 87)

$$u = c_1 I_k\left(\frac{1}{\beta}\sqrt{2f_0}e^{\sigma/2}\right) + c_2 K_k\left(\frac{1}{\beta}\sqrt{2f_0}e^{\sigma/2}\right),$$

где $k = \sqrt{2|c|}$.

Возвращаясь к исходным переменным, получим точное решение

$$b = 2\ln\left[c_1 I_k\left(\frac{1}{\beta}\sqrt{2f_0\xi e^{-\beta t}}\right) + c_2 K_k\left(\frac{1}{\beta}\sqrt{2f_0\xi e^{-\beta t}}\right)\right],$$

которое осциллирует при $\xi < 0$.

Пример 2.

Рассмотрим подалгебру на операторе $\langle X_2 + X_{10}(\varphi)\rangle$, где $\varphi(t)$ — произвольная функция. Инвариантное решение уравнений (1) ищем в виде

$$(u, v, \rho, p) = (U, V, R, \varphi(t)y + P),$$

где функции U, V, R, P зависят только от двух переменных (t, x). После подстановки в (1) получаем фактор-систему:

$$U_t + UU_x + \frac{1}{R}P_x = 0, \quad V_t + UV_x + \frac{1}{R}\varphi(t) = -g, \tag{28}$$
$$R_t + UR_x = 0, \quad U_x = 0.$$

Система (28) легко интегрируется: из последнего уравнения следует, что функция U зависит только от t. В результате получается следующее решение уравнений системы (1):

$$u = \dot{a}(t), \quad v = -gt - \frac{1}{R(\lambda)}\int \varphi(t)dt + W(\lambda); \quad \rho = R(\lambda),$$
$$p = y\varphi(t) - \ddot{a}(t)\int R(\lambda)d\lambda + \psi(t) \tag{29}$$

с произвольными функциями $a(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $R(\lambda)$. Здесь $\lambda = x - a(t)$.

Если предположить, что жидкость граничит с твердой стенкой $\Gamma : f(x, y) = 0$, то из условия контакта жидкости и стенки $\Gamma : uf_x + vf_y = 0$ можно построить явный вид Γ и решение. Например:

а) $\Gamma : y = \dfrac{1}{a}\left(g + \dfrac{b}{R_0}\right)x + c$ — прямая линия, а формулы (29) упрощаются:

$$u = at, \quad v = -\left(g + \frac{b}{R_0}\right)t, \quad \rho = R_0, \quad p = by - aR_0\left(x - \frac{at^2}{2}\right) + \psi(t),$$

где a, b, c, R_0 — произвольные постоянные;

б) $\Gamma : y = \dfrac{W_0}{2a}x^2 + \dfrac{b}{a}x + c$ — параболическая твердая граница, течение жидкости определяется функциями

$$u = a, \quad v = W_0 x + b, \quad \rho = R_0, \quad p = R_0(aW_0 - g)y + \psi(t),$$

где a, b, R_0, W_0 — произвольные постоянные.

Пример 3.
Решение системы (1) ищем на операторе $\langle X_3 + X_{10}(\varphi)\rangle$. Инвариантами этого оператора являются переменные $(t, y; u - x/t, v, \rho, p - \varphi(t)x/t)$, что определяет вид решения

$$(u, v, \rho, p) = \left(\frac{x}{t} + U, V, R, \frac{x}{t}\varphi(t) + P\right),$$

где U, V, R, P — зависят от (t, y).

Уравнения (1) перепишутся следующим образом:

$$U_t + VU_y + \frac{1}{t}U + \frac{\varphi(t)}{tR} = 0, \quad V_t + VV_\lambda + \frac{1}{R}P_y = -g;$$

$$R_t + VR_y = 0, \quad \frac{1}{t} + V_y = 0.$$

Они интегрируются в явном виде

$$u = \frac{x}{t} - \frac{1}{tR(\lambda)}\int \varphi(t)dt + \frac{1}{t}F(\lambda), \quad v = \frac{1}{t}(\dot{a}(t) - y), \quad \rho = R(\lambda), \tag{30}$$

$$p = \frac{1}{t}\varphi(t)x - \frac{1}{t}(g + (\frac{a(t)}{t})'')\int R(\lambda)d\lambda - \frac{2}{t^4}\int \lambda R(\lambda)d\lambda + \psi(t)$$

с произвольными функциями $a(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $F(\lambda)$, $R(\lambda)$; $\lambda = yt - a(t)$. Рассмотрим, какие граничные условия могут быть реализованы для полученного решения.

Если твердую границу Γ искать в разрешенном виде $x - h(y) = 0$, то условие на границе запишется: $\left(u - v\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)_\Gamma = 0$. Это условие после подстановки функций u, v из (30) приводит к следующим возможным формам твердой границы для данного решения:

а) $\Gamma : x = \dfrac{b}{y}$ — семейство гипербол, течение жидкости вдоль гиперболических поверхностей определяется формулами

$$u = \frac{x}{t}, \quad v = \frac{y}{t}, \quad \rho = R(\lambda), \quad \lambda = yt - a,$$

$$p = -\frac{1}{t}\left(g + \frac{2a}{t^3}\right)\int R(\lambda)d\lambda - \frac{2}{t^4}\int \lambda R(\lambda)d\lambda + \psi(t), \quad a, b = \mathrm{const};$$

б) в случае, если $a(t) = a_0 t + a_1$, $\varphi(t) = \varphi_0$, где $a_0, a_1, \varphi_0 = \mathrm{const}$, то твердая граница имеет представление

$$\Gamma : x = \frac{\varphi_0}{(y - a_0)R_0}\ln|y - a_0| - F_0 + \frac{b}{y - a_0}, \quad b, R_0, F_0 = \mathrm{const},$$

а решение примет вид

$$u = \frac{x}{t} - \frac{\varphi_0}{t(y - a_0)R_0} + \frac{F_0}{t}, \quad v = \frac{a_0 - y}{t}, \quad \rho = R_0 t(y - a_0),$$

$$p = \frac{\varphi_0 x}{t} - \left(g + \frac{2a_1}{t^3}\right) R_0 t \frac{(y-a_0)^2}{2} - \frac{2R_0}{3t}(y-a_0)^3 + \psi(t);$$

в) если $a(t) = a_0 t + a_1$, $\varphi(t) = \varphi_0 n t^{n-1}$, $n \neq 1$, a_0, a_1, $\varphi_0 = \mathrm{const}$, то

$$\Gamma : x = \frac{\varphi_0}{R_0(1-n)(y-a_0)^2} - F_0 + \frac{b}{y-a_0}, \quad b, R_0, F_0 = \mathrm{const},$$

$$u = \frac{x}{t} - \frac{\varphi_0}{tR_0(y-a_0)^n} + \frac{F_0}{t}, \quad v = \frac{a_0 - y}{t}, \quad \rho = R_0 t^n (y-a_0)^n,$$

$$p = xn\varphi_0 t^{n-2} - \left(g + \frac{2a_1}{t^3}\right) R_0 t^n \frac{(y-a_0)^{n+1}}{n+1} - 2t^{n-2} R_0 \frac{(y-a_0)^{n+2}}{n+2} + \psi(t).$$

Если искать твердую границу Γ в виде, разрешенном относительно переменной y, то решение

$$u = \frac{x}{t} + \frac{1}{t}F(\lambda) - \frac{1}{tR(\lambda)} \int \varphi(t)dt, \quad v = \frac{y_0 - y}{t}, \quad \rho = R(\lambda),$$

$$p = \frac{x}{t}\varphi(t) - \frac{1}{t}\left(g + \frac{2a_0}{t^3}\right) \int R(\lambda)d\lambda - \frac{2}{t^4} \int \lambda R(\lambda)d\lambda + \psi(t),$$

где $a_0, y_0 = \mathrm{const}$, $\lambda = (y - y_0)t - a_1$ описывает течение с горизонтальной границей $y = y_0$.

Предположим, что жидкость имеет свободную поверхность $\Gamma : f(t, x, y) = 0$. Потребуем, чтобы на свободной поверхности выполнялись кинематическое и динамическое условия:

$$[f_t + uf_x + vf_y]_\Gamma = 0, \qquad P|_\Gamma = 0.$$

Подставим решение (30) в кинематическое условие. Решая полученное уравнение, находим, что свободная поверхность должна иметь вид

$$\Gamma : x = G(\lambda) - tF(\lambda) - \frac{\psi(t)t}{R(\lambda)}, \quad \lambda = yt - a(t),$$

где $a(t)$, $\psi(t)$, $F(\lambda)$, $R(\lambda)$, $G(\lambda)$ — произвольные функции своего аргумента.

Условие $P|_\Gamma = 0$ приводит к выражению

$$\frac{\varphi(t)}{t}\left[G(\lambda)t - F(\lambda) - \frac{\psi(t)t}{R(\lambda)}\right] - \frac{1}{t}\left(g + \left(\frac{a}{t}\right)''\right) \int R(\lambda)d\lambda + \Phi(t) = 0,$$

которое должно выполняться тождественно при любых t, λ. В частности, оно выполняется, если положить $R(\lambda) = R_0 = \mathrm{const}$, $G(\lambda) = G_0 = \mathrm{const}$. В результате имеем движение жидкости

$$u = \frac{x}{t} - \frac{\beta}{R_0 t^3} - \frac{2(\gamma + \alpha R_0 \lambda) + R_0 \lambda^2}{2\beta t}; \quad v = \frac{-y - \frac{3}{2}gt^2 + 2a_0 t + a_1}{t};$$

$$\rho = R_0; \quad p = \frac{1}{t^4}\left[2\beta x - 2(\gamma + \alpha R_0 \lambda) - R_0\lambda^2 + 2\left(\frac{\beta^2}{3R_0 t} - G_0 \beta t\right)\right]$$

со свободной границей

$$\Gamma : x = \frac{2(\gamma + \alpha R_0 \lambda) + R_0 \lambda^2}{2\beta} - \frac{\beta}{3R_0 t^2} + G_0 t.$$

Здесь $\lambda = yt - (\alpha - \dfrac{1}{2}gt^3 + a_0t^2 - a_1t)$; $\alpha, \beta, \gamma, a_0, a_1$ — произвольные постоянные.

Пример 4.
Рассмотрим оператор $\langle X_7 + X_{10}(\varphi)\rangle$. Здесь X_7 — оператор компенсированного вращения из (2). Решение уравнений (1) в данном случае удобно искать в новых координатах (r, θ), к которым перейдем по формулам

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta - \frac{gt^2}{2},$$

$$u = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta, \quad v = v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta - gt.$$

В координатах (r, θ) имеем $X_7 + X_{10}(\varphi) = \partial_\theta + \varphi(t)\partial_p$. Инвариантное решение уравнений (1) в координатах (r, θ) ищется в виде $v_r = U(t, r)$, $v_\theta = V(t, r)$, $\rho = R(t, r)$, $p = \varphi(t)\theta + P(t, r)$. Получаем

$$v_r = \frac{a'(t)}{r}, \quad v_\theta = \frac{1}{rR(\lambda)}\left[S(\lambda) - \int \varphi(t)dt\right],$$

$$\rho = R(\lambda), \quad p = \varphi(t)\theta + P(r, t), \quad \lambda = r^2 - 2a(t).$$

Явный вид $P(r, t)$ не представлен из-за громоздкости записи. Твердую границу для данного течения ищем в виде $\Gamma : f(r, \theta) = 0$ с условием $v_rf_r + \dfrac{v_\theta}{r}f_\theta = 0$. После вычислений получаем, что $\Gamma : r = {}_0\exp(a_0\theta)$ — логарифмическая спираль, а течение жидкости определяется формулами

$$v_r = \frac{a_0}{r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r}, \quad \rho = R(\lambda),$$

$$P = \frac{a_0^2}{2}\int \frac{R(\lambda)d(r^2)}{r^4} + \frac{1}{2}\int \frac{R(\lambda)d(r^2)}{r^2} + B(t), \quad \lambda = r^2 - 2a_0t + 2a_1,$$

где $R(\lambda)$, $B(t)$ — произвольные функции, C_0, a_0, a_1 — const.

Список литературы

[1] Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. *Нелинейные проблемы поверхностных и внутренних волн.* Наука, Сиб. отд-ние, Новосибирск, 1985.

[2] Родионов А. А. Оптимальная система подалгебр первого порядка для уравнений плоского движения неоднородной жидкости. В: Тр. семинара “Матем. моделирование в механике". ВЦ СО РАН, Красноярск, 1996, 139–149. Деп. в ВИНИТИ 12.02.97 №446–1397.

[3] Габов С. А. Об одном виде нелинейных волн, описываемых уравнением Дюбрей—Жакотен. *Докл. АН СССР*, **302**, №5, 1988, 1036–1039.

[4] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. *Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям.* Физматлит, М., 1993.

Поступила в редакцию 20 февраля 1997 г.,
в переработанном виде 28 июля 1997 г.