Вычислительные технологии **Том 3, № 1, 1998**

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА*

Н. П. Чуев
Уральская государственная академия путей сообщения
Екатеринбург, Россия

In the paper the general behaviour of outflowing ideal gas into vacuum is investigated. This behaviour is described by a set of integrodifferential equations in Lagrange's form. The attraction potential of the mass of gas and its time derivatives have been found to be analytical functions. An analytical method of approximate determination of the free surface equation (gas-vacuum boundary) has been proposed.

Исследованиями движений сплошной среды с учетом сил самогравитации занимались Дирихле, Дедекинд и Риман. Они изучали фигуры равновесия вращающейся идеальной сжимаемой жидкости. Затем данная теория получила развитие в работах выдающихся ученых А. Пуанкаре, Дж. Дарвина, Дж. Джинса, А. М. Ляпунова, Л. Лихтенштейна и др. [1 – 3]. Движение гравитирующего газового шара рассматривалось как модель звезд в работах и монографиях К. П. Станюковича [4], Л. И. Седова [5]. Движение газа в поле тяжести изучалось в работе А. Ф. Сидорова [6], в которой были построены точные решения установившегося плоскопараллельного изэнтропического течения газа с политропным уравнением состояния. В статье О. И. Богоявленского [7] рассмотрена динамика адиабатических движений гравитирующего идеального газа, при которых скорости являются линейными функциями координат и газ с постоянной плотностью заполняет некоторый эллипсоид. В работе С. Л. Дерябина, Н. П. Чуева [8] исследовались сферически-симметричные течения самогравитирующего идеального газа в вакуум и задача о распаде разрыва и построены точные решения начально-краевой задачи для нелинейной интегро-дифференциальной системы с частными производными в виде сходящихся степенных рядов.

1. Постановка задачи

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ известная замкнутая поверхность Γ_0 является границей, отделяющей трехмерную область Ω_0, заполненную идеальным политропным гравитирующим по закону Ньютона газом, от вакуума. При t=0 в каждой точке $\vec{x}$=$\{x, y, z\}$ области Ω_0 известны распределения вектора скорости $\vec{u} = \vec{u_0}(\vec{x})$ частиц газа, плотности $\rho = \rho_0(\vec{x})$, энтропии $s = s_0(\vec{x})$. Функции $\vec{u}_0$, ρ_0, s_0 и уравнение поверхности Γ_0 являются

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96–01–00115.

аналитическими, плотность газа $\rho_0(\vec{x})$ на поверхности Γ_0 равна нулю, что обеспечивает непрерывное примыкание газа к вакууму.

Требуется построить течения газа при $t > 0$ и найти закон движения свободной поверхности Γ_t, отделяющей газ от вакуума.

Течения гравитирующего идеального политропного газа определяются следующей системой интегро-дифференциальных уравнений в форме Л. Эйлера [1, 2]:

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla P = \nabla\Phi,$$

$$\rho_t + \operatorname{div}\rho\vec{u} = 0,$$

$$s_t + \vec{u}\nabla s = 0, \tag{1}$$

где

$$\Phi = \Phi(\vec{x}, t) = G\iiint\limits_{\Omega_t} \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}' \;-$$

ньютоновский потенциал, созданный всей массой газа [9–11], G — гравитационная постоянная, $|\vec{x} - \vec{x}'|$ — расстояние между двумя точками области Ω_t, являющейся переменной областью одних и тех же частиц в момент времени t и ограниченной замкнутой подвижной поверхностью Γ_t.

Уравнение состояния политропного газа задается в виде $p = A(s)\rho^\gamma/\gamma$, где p — давление, $A(s) > 0$, $\gamma > 1$ — показатель политропы [12].

При произвольном значении γ система (1) не является аналитической, поэтому в дальнейшем предполагается, что

$$\gamma = 1 + \frac{n}{m}, \quad n \in N, \quad m \in M.$$

Введем новые неизвестные функции $\sigma = \rho^{1/m}$ и $s' = A(s)$, после подстановки которых в систему (1) получим (штрих у функции s опустим)

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\nabla)\vec{u} + \frac{m}{m+n}\sigma^n\nabla s + \frac{m}{n}s\nabla\sigma^n = \nabla\Phi,$$

$$\sigma_t + \frac{1}{m}\sigma\operatorname{div}\vec{u} + \nabla\sigma\vec{u} = 0,$$

$$s_t + \vec{u}\nabla s = 0, \tag{2}$$

где

$$\Phi = G\iiint\limits_{\Omega_t} \frac{\sigma^m(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d\vec{x}'.$$

Для удобства дальнейшего исследования в (2) от переменных Эйлера перейдем к переменным Лагранжа. Тогда система будет иметь вид [12]

$$M^*\vec{x}_{tt} + \frac{m}{m+n}\sigma^n\nabla s + \frac{m}{n}s\nabla_{\vec{a}}\sigma^n = \nabla_{\vec{a}}\Phi,$$

$$mJ\sigma_t + \sigma J_t = 0,$$

$$s_t = 0, \tag{3}$$

где $\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$ — неизвестные функции лагранжевых переменных $\vec{a} = \{a, b, c\}$ и времени t, $\vec{a} \in \Omega_0$, $M = \partial\vec{x}/\partial\vec{a}$ — матрица Якоби, M^* — матрица, транспонированная к M,

$$J = \det M \neq 0, \quad \nabla_{\vec{a}} = \frac{\partial}{\partial a}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial b}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial c}\vec{k},$$

$$\Phi{=}\Phi(\vec{a}, t){=}G \iiint\limits_{\Omega_t} \frac{\sigma^m(\vec{x}', t)}{|\vec{x}(\vec{a}, t){-}\vec{x}'|} d\vec{x}'{=}G \iiint\limits_{\Omega_0} \frac{\sigma^m(\vec{x}', t) J\, d\vec{a}'}{|\vec{x}(\vec{a}, t){-}\vec{x}(\vec{a}', t)|}{=}G \iiint\limits_{\Omega_0} \frac{\sigma_0^m(\vec{a}') d\vec{a}'}{|\vec{x}(\vec{a}, t){-}\vec{x}(\vec{a}', t)|}. \quad (4)$$

Выполнив преобразование Вебера [1], систему уравнений (3) можно свести к системе, содержащей производные по t первого порядка. Для этого интегрируется первое векторное уравнение (3) по t в пределах от 0 до t и вводятся новые функции

$$\varphi = \int\limits_0^t \left(\Phi + \frac{1}{2}|\vec{x}_\tau|^2\right) d\tau, \quad \vec{\psi} = \vec{u}_0 - \int\limits_0^t \left(\frac{m}{m+n}\sigma^n \nabla s + \frac{m}{n} s \nabla \sigma^n\right) d\tau,$$

где $\varphi = \varphi(\vec{a}, t)$, $\vec{\psi} = \{\psi_1(\vec{a}, t), \psi_2(\vec{a}, t), \psi_3(\vec{a}, t)\}$. В результате получим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} M^* \vec{x}_t = \nabla\varphi + \vec{\psi}, \\ \varphi_t = \Phi + \frac{1}{2}|\vec{x}_\tau|^2, \\ \vec{\psi}_t = -\left(\frac{m}{m+n}\sigma^n \nabla s + \frac{m}{n} s \nabla \sigma^n\right), \\ mJ\sigma_t = -\sigma J_t, \\ s_t = 0. \end{gathered} \quad (5)$$

Решение (5) отыскивается при следующих начальных условиях:

$$\begin{gathered} \vec{x}(\vec{a}, 0) = \vec{x}_0 = \vec{a}, \quad \varphi(\vec{a}, 0) = 0, \quad \vec{\psi}(\vec{a}, 0) = \vec{u}_0(\vec{a}), \\ \sigma(\vec{a}, 0) = \sigma_0(\vec{a}) \quad \text{при} \quad \sigma_0(\vec{a})|_{\Gamma_0} = 0, \\ s(\vec{a}, 0) = s_0(\vec{a}), \quad M^*(\vec{a}, 0) = E, \quad J(\vec{a}, 0) = 1, \end{gathered} \quad (6)$$

где $\vec{u}_0$, σ_0, s_0 — аналитические функции в области Ω_0.

2. Построение решения

Пусть $R_0 = |\vec{a} - \vec{a'}|$ и $\Omega_t|_{t=0} = \Omega_0$ — выпуклая область. Решение задачи Коши (5), (6) будем искать в виде степенных рядов по положительным степеням t:

$$\vec{U}(\vec{a}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{U}_k(\vec{a}) \frac{t_k}{k!}, \quad \vec{U} = \{x, y, z, \varphi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \sigma, s\}. \quad (7)$$

Полагая в системе (5) $t = 0$, с учетом начальных условий (6) получим вторые коэффициенты рядов (7):

$$\vec{x}_1 = \vec{u}_0,$$

$$\varphi_1 = \Phi_0 + \frac{1}{2}|\vec{u}_0|^2,$$

$$\vec{\psi}_1 = -\left(\frac{m}{m+n}\sigma_0^n \nabla s_0 + \frac{m}{n} s_0 \nabla \sigma_0^n\right),$$
$$\sigma_1 = -\frac{1}{m}\sigma_0 J_1 = \frac{1}{m}\sigma_0 \mathrm{div}\, \vec{u}_0,$$
$$s_1 = 0. \tag{8}$$

Дифференцируя систему (5) по t и полагая $t = 0$, получим следующие формулы для коэффициентов рядов (7) при $k = 2$:

$$\vec{x}_2 = \nabla \Phi_0 - \frac{m}{m+n}\sigma_0^n \nabla s_0 - \frac{m}{n} s_0 \nabla \sigma_0^n,$$
$$\varphi_2 = \Phi_1 + \vec{x}_1 \vec{x}_2,$$
$$\vec{\psi}_2 = -\left(\frac{mn}{m+n}\sigma_0^{n-1}\sigma_1 \nabla s_0 + m s_0 \nabla\left(\sigma_0^{n-1}\sigma_1\right)\right),$$
$$\sigma_2 = -\frac{1}{m}\left((m+1)\sigma_1 J_1 + \sigma_0 J_2\right),$$
$$s_2 = 0. \tag{9}$$

Коэффициенты $\vec{U}_{k+1}$ рядов (7) будут иметь вид

$$\vec{x}_{k+1} = \nabla \varphi_k + \vec{\psi}_k - \sum_{i=1}^{k} C_k^i M^* \vec{x}_{k+1-i},$$

$$\varphi_{k+1} = \Phi_k + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} C_k^i \vec{x}_{i+1}\vec{x}_{k+1-i},$$

$$\vec{\psi}_{k+1} = -\left(\frac{m}{m+n}\nabla s_0 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!}\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\ldots\sigma_{\alpha_n} + \right.$$
$$\left. + \frac{m}{n} s_0 \nabla\left(\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=k} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!}\sigma_{\alpha_1}\sigma_{\alpha_2}\ldots\sigma_{\alpha_n}\right)\right),$$
$$\sigma_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} C_k^i \sigma_{k+1-i} J_i - \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \sigma_{k-i} J_{i+1}, \quad k \geq 2, \quad s_{k+1} = 0, \tag{10}$$

где

$$M_k^* = \frac{\partial \vec{x}_k}{\partial \vec{a}}, \quad J_k = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=k} \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!}\frac{\partial(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3})}{\partial(a,b,c)}, \tag{11}$$

$$\Phi_k = G\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left[\iiint\limits_{\Omega_0} \sigma_0^m \frac{d\vec{a}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right]_{t=0} = G\iiint\limits_{\Omega_0} \sigma_0^m \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)\Big|_{t=0}\right] d\vec{a}' \tag{12}$$

при $\vec{x} = \vec{x}(\vec{a}, t)$, $\vec{x}' = \vec{x}(\vec{a}', t)$.

Дифференцируя правую часть, получим

$$\Phi_k = G\iiint\limits_{\Omega_0} \sigma_0^m \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^l (2l-1)!!}{2^l l! R_0^{2l+1}} \times$$

$$\times\left[\sum_{\substack{\alpha_1+..+\alpha_l=k\\ \alpha_q\geq 1}} \tfrac{k!}{\alpha_1!...\alpha_l!}\prod_{q=1}^{l}\left(\sum_{j=0}^{\alpha_q} C^j_{\alpha_q}(\vec{x}_j-\vec{x}'_j)(\vec{x}_{\alpha_q-j}-\vec{x}'_{\alpha_q-j})\right)\right]d\vec{a}'. \qquad (13)$$

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Коэффициенты рядов* $\vec{U}_k$, $k=0,1,2,...$, *определяемые начальными данными (6) и рекуррентными выражениями (10)–(13) при* $k\geq 0$, *являются аналитическими функциями переменных* $\vec{a}=\{a,b,c\}$ *в области* Ω_0.

Доказательство. Коэффициенты рядов (7) $\vec{U}_k$ при $k\geq 1$ определяются рекуррентными формулами (10)–(12) с помощью операций сложения, умножения и дифференцирования по переменным a, b, c функций $\vec{U}_l$, где $l\leq k$. Из аналитических начальных условий (6) следует аналитичность последующих коэффициентов (10) ряда (7) при условии, что функции Φ_k $(k=0,1,2,...)$, определяемые равенствами (13), являются аналитическими функциями в области Ω_0. Функции $\Phi_k(\vec{a})$ – несобственные интегралы с параметром. Доказательство его сходимости и аналитичности при любом $k=0,1,2,...$ проведем методом математической индукции.

Проверим справедливость утверждения об аналитичности $\Phi_k(\vec{a})$ при $k=0$.

$$\Phi_0(\vec{a})=G\iiint\limits_{\Omega_0}\sigma_0^m\frac{d\vec{a}'}{|\vec{a}-\vec{a}'|}\ -$$

ньютоновский потенциал в области Ω_0 – удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\Phi_0=-4\pi G\sigma_0^m \quad \text{при} \quad \Phi_0|_{x\to\infty}=0.$$

Учитывая аналитичность функции $\sigma_0^m(\vec{a})$ и функции, описывающей поверхность Γ_0, из теории ньютоновского потенциала [9, 11] следует, что функция $\Phi_0(\vec{a})$ — локально аналитическая.

Из формул (8) и аналитичности $\vec{u_0}$, s_0 следует аналитичность коэффициентов $\vec{U}_1(\vec{a})$ в лагранжевых переменных $\vec{a}=\{a,b,c\}$ в области Ω_0. Аналитичность Φ_k при $k=1$ следует из равенств

$$\Phi_1=G\iiint\limits_{\Omega_0}\sigma_0^m\frac{(\vec{x}-\vec{x}')(\vec{x}_t-\vec{x}'_t)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{a}'\Bigg|_{t=0}=G\iiint\limits_{\Omega_0}\sigma_0^m\frac{(\vec{a}-\vec{a}')(\vec{u}_0-\vec{u}'_0)}{|\vec{a}-\vec{a}'|^3}d\vec{a}'. \qquad (14)$$

Разность функций $\vec{u}_0(\vec{a})-\vec{u}_0(\vec{a}')$ в области Ω_0 можно представить следующим образом:

$$\vec{x}_1(\vec{a})-\vec{x}_1(\vec{a}')=\vec{u}_0(\vec{a})-\vec{u}_0(\vec{a}')=\int\limits_0^1\frac{d}{d\xi}\vec{u}_0(\vec{a}'+\xi R_0\vec{l})d\xi=$$

$$=R_0\int\limits_0^1\vec{f}_1(\vec{a},\vec{a}',\xi\vec{l})d\xi=R_0\vec{F}_1(\vec{a},\vec{a}'), \qquad (15)$$

где

$$\vec{f}_1=[(\nabla_{\vec{a}}u_0)\vec{l}]\vec{i}+[(\nabla_{\vec{a}}v_0)\vec{l}]\vec{j}+[(\nabla_{\vec{a}}w_0)\vec{l}]\vec{k}=\frac{\partial\vec{u}_0}{\partial l},$$

$$\vec{l} = \frac{\vec{a} - \vec{a}'}{|\vec{a} - \vec{a}'|} = \frac{\vec{a} - \vec{a}'}{R_0} \text{ — единичный вектор.}$$

Подставляя (15) в (14), окончательно получим

$$\Phi_1 = G \iiint\limits_{\Omega_0} \sigma_0^m \frac{\vec{F}_1(\vec{a}, \vec{a}')\vec{l}}{|\vec{a} - \vec{a}'|} d\vec{a}'.$$

Функции σ_0 и $\vec{F}_1$ являются аналитическими, следовательно, ограниченными в замкнутой области $\overline{\Omega}_0$; тогда подынтегральное выражение имеет мажорантную функцию

$$\frac{|\sigma_0^m \vec{F}_1 \vec{l}|}{|\vec{a} - \vec{a}'|} \leq \frac{\max\limits_{\Omega_0} |\sigma_0^m \vec{F}_1|}{R_0} < \frac{C_1}{R_0}, \quad C_1 = const.$$

Если положить

$$\Phi_1 = G \iiint\limits_{\Omega_0} \sigma_0^m \frac{\vec{F}_1(\vec{a}, \vec{a}')\vec{l}}{|\vec{a} - \vec{a}'|} d\vec{a}' = G \iiint\limits_{\Omega_0 - \omega_\varepsilon} \sigma_0^m \frac{\vec{F}_1(\vec{a}, \vec{a}')\vec{l}}{|\vec{a} - \vec{a}'|} d\vec{a}' = G \iiint\limits_{\Omega_0 + \omega_\varepsilon} \sigma_0^m \frac{\vec{F}_1(\vec{a}, \vec{a}')\vec{l}}{|\vec{a} - \vec{a}'|} d\vec{a}',$$

где ω_ε — шар радиуса ε с центром в точке $\vec{a}$ ($\omega_\varepsilon : |\vec{a} - \vec{a}'| \leq \varepsilon$), то подынтегральная функция в интеграле по области $\Omega_0 - \omega_\varepsilon$ не имеет особенностей и является аналитической функцией переменных a, b, c. Интеграл $\iiint\limits_{\omega_\varepsilon} \sigma_0^m (\vec{F}_1(\vec{a}, \vec{a}'\vec{l}) d\vec{a}')/|\vec{a} - \vec{a}'|$ допускает следующую оценку:

$$\left| G \iiint\limits_{\omega_\varepsilon} \sigma_0^m \frac{\vec{F}_1(\vec{a}, \vec{a}')\vec{l}}{|\vec{a} - \vec{a}'|} d\vec{a}' \right| \leq G \max_{\Omega_0} \left(|\sigma_0^m| |\vec{F}_1(\vec{a}, \vec{a}')| \right) 2\pi\varepsilon^2 < 2\pi G C_1 \varepsilon^2.$$

Для всех $\vec{a} \in \Omega_0$ интеграл $G \iiint\limits_{\omega_\varepsilon} \sigma_0^m (\vec{F}_1(\vec{a}, \vec{a}')\vec{l} d\vec{a}')/|\vec{a} - \vec{a}'|$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно стремится к нулю, следовательно, имеет место равномерный предельный переход

$$G \iiint\limits_{\Omega_0} \sigma_0^m \frac{\vec{F}_1(\vec{a}, \vec{a}')\vec{l}}{|\vec{a} - \vec{a}'|} d\vec{a}' = \lim_{\varepsilon \to 0} G \iiint\limits_{\Omega_0 - \omega_\varepsilon} \sigma_0^m \frac{\vec{F}_1(\vec{a}, \vec{a}')\vec{l}}{|\vec{a} - \vec{a}'|} d\vec{a}',$$

что доказывает существование несобственного интеграла, его равномерную сходимость и аналитичность Φ_1 [3].

Из аналитичности $\Phi_1(\vec{a})$, коэффициентов $\vec{U}_0(\vec{a})$, $\vec{U}_1(\vec{a})$ и формул (9) следует аналитичность функций $\vec{U}_2(\vec{a})$ переменных a, b, c в области Ω_0.

Пусть справедливость леммы установлена для коэффициентов $\vec{U}_v$ ($v = 0, 1, 2, ..., k$); тогда в равенстве (13) разность функций, аналогично формулам (15), можно представить в виде

$$\vec{x}_v(\vec{a}) - \vec{x}_v(\vec{a}') = \begin{cases} R_0 \vec{F}_v(\vec{a}, \vec{a}'), & v = 1, 2, ..., k; \\ R_0 \vec{F}_0(\vec{a}, \vec{a}') = R_0 \vec{l}, & v = 0. \end{cases}$$

Функции $\sigma_0^m(\vec{a})$, $\vec{F}_\nu$ ограниченны в области $\overline{\Omega}_0$. Пусть $|\sigma_0^m| < C_2$, $|\vec{F}_\nu| < A_\nu$, $\nu = 0, 1, ..., k$, $C_2 = const$, $A_\nu = const$. Обозначая $A = \max\{A_0, A_1, ..., A_k\}$, проведем последовательные оценки в выражении (13):

$$\left| \prod_{q=1}^{l} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_q} C_{\alpha_q}^j (\vec{x}_j - \vec{x}'_j)(\vec{x}_{\alpha_q - j} - \vec{x}'_{\alpha_q - j}) \right) \right| < 2^k R_0^{2l} A^{2l},$$

$$\sum_{\substack{\alpha_1+...\alpha_l=k\\ \alpha_q\geq 1}} \frac{k!}{\alpha_1!...\alpha_l!}2^kR_0^{2l}A^{2l} \leq k!C_{k-1}^{l-1}2^kR_0^{2l}A^{2l} < k!(4A^2R_0^2)^l.$$

Из формулы Валлиса [13] следует неравенство

$$\left|\frac{(-1)^l(2l-1)!!}{2^l l!}\right| < \frac{1}{\sqrt{\pi}l}.$$

Окончательную оценку подынтегрального выражения (13) обозначим через B_k:

$$|B_k| < C_2\frac{(k+1)!}{\sqrt{\pi}R_0}(4A^2)^k < \frac{C_2(k+1)!(4A^2)^k}{R_0} = \frac{C_k}{R_0},$$

где C_k – постоянное число, определяемое конкретным значением k. Итак, установили, что для каждого $k = 0, 1, 2, ...$ подинтегральное выражение имеет мажорантную функцию C_k/R_0. Повторяя для $\Phi_k(\vec{a})$ изложение доказательства существования и аналитичности интеграла $\Phi_1(\vec{a})$, установим существование несобственного интеграла $\Phi_k(\vec{a})$ и его аналитичность по переменным a, b, c в области Ω_0. Как следствие, отсюда следует выполнение правила Лейбница дифференцирования интеграла по параметру t. На основании формул (10) – (13) становится очевидным аналитичность коэффициентов $\vec{U}_{k+1}(\vec{a})$ ряда (7). Лемма полностью доказана.

Возьмем первые $k+1$ членов формального ряда для потенциала $\Phi(\vec{a}, t)$:

$$\Phi^*(\vec{a}, t) = \sum_{q=0}^{k} \Phi_q(\vec{a})\frac{t^q}{q!},$$

где $\Phi_q(\vec{a})$ получено из рекуррентных формул (10) – (13). В итоге функция $\Phi^*(\vec{a}, t)$ будет известной аналитической функцией переменных a, b, c, t.

Заменив в системе (5) функцию Φ на Φ^*, получим

$$\begin{gathered}
\vec{x}_t = (M^*)^{-1}(\nabla\varphi + \vec{\psi}),\\
\varphi_t = \Phi^* + \frac{1}{2}\vec{x}_t\vec{x}_t,\\
\vec{\psi}_t = -\left(\frac{m}{m+n}\sigma^n\nabla s + \frac{m}{n}s\nabla\sigma^n\right),\\
\sigma_t = -\frac{1}{m}J^{-1}\sigma J_t,\\
s_t = 0.
\end{gathered}\tag{16}$$

Теорема. *Задача (16), (6) имеет единственное локально-аналитическое решение.*

Доказательство. Система уравнений (16) по построению является системой Коши — Ковалевской. Все функции (6), задающие начальные условия, аналитические. На основании теоремы Коши — Ковалевской [14] можно утверждать, что задача Коши имеет при малых t аналитическое решение, которое можно представить, например, в виде сходящихся рядов по степеням t с коэффициентами, являющимися аналитическими функциями переменных a, b, c.

В соответствии с приведенным методом построения решения $k+1$ первые коэффициенты рядов (7) задач (16), (6) и (5), (6) равны.

3. Исследование формы свободной поверхности газового шара

Будем рассматривать газовую массу, заполняющую при $t = 0$ шар Ω_0 радиуса 1, на которую действуют силы взаимного гравитационного притяжения частиц по закону Ньютона. При $t = 0$ задано вращение газового шара как твердого тела вокруг своей неподвижной оси с угловой скоростью ω. Для системы уравнений (16) заданы следующие начальные условия:

$$\vec{x}(\vec{a},0) = \vec{a}, \quad \vec{x}_t(\vec{a},0) = \vec{u}_0(a) = \{-\omega b, \omega a, 0\},$$

$$\sigma(\vec{a},0) = \sigma_0(\vec{a}) = \sigma_{00}(1-r^2), \quad \sigma_{00} = const, \quad \sigma_0|_{\Gamma_0} = 0,$$

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad \Gamma_0 \text{ — сфера радиуса 1},$$

$$\vec{a} = \{a, b, c\} \text{ — лагранжевы координаты.} \tag{17}$$

Решение задачи (16), (17) является частным случаем решения задачи (16), (6) и имеет вид (7):

$$\vec{U}(\vec{a},t) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{U}_k(\vec{a})\frac{t^k}{k!}, \tag{18}$$

где $\vec{U}_k(\vec{a})$ определяется по алгоритму, изложенному выше в разделе 2.

Пусть $z = f(x,y,t)$ — уравнение свободной поверхности Γ_t при $t \geq 0$. Тогда функция $f(x,y,t)$ удовлетворяет следующему квазилинейному дифференциальному уравнению с частными производными первого порядка:

$$f_t + u(x,y,z,t)f_x + v(x,y,z,t)f_y - w(x,y,z,t) = 0 \text{ при } z = f(x,y,t). \tag{19}$$

Здесь $\vec{x} = \{x,y,z\}$ — эйлеровы координаты точки, $\vec{u} = \{u,v,w\}$ — скорость частицы, находящейся в момент времени t в точке $\vec{x} \in \Gamma_t$. Для решения уравнения (19) определим функцию $\vec{u} = (x,y,z,t)|_{z=f(x,y,t)}$ с помощью трех первых членов ряда (18); получим приближенный закон движения свободной поверхности Γ_t при $t \geq 0$.

Из (17), (8), (9) следует

$$\vec{x} \approx \vec{a} + \vec{u}_0 t + \left(\nabla\Phi_0 - \frac{m}{m+n}\sigma_0^n \nabla s_0 - \frac{m}{n} s_0 \nabla\sigma_0^n\right)\frac{t^2}{2}. \tag{20}$$

Используя известные формулы потенциала Φ_0 для внутренних точек шара радиуса 1 [9, 11], получим

$$\nabla\Phi_0 = \nabla\left[\frac{4\pi G}{r}\int_0^r \sigma_0^m(\tau)\tau^2 d\tau + 4\pi G\int_r^l \sigma_0^m(\tau)\tau d\tau\right] = -\frac{4\pi G}{r^3}\left(\int_0^r \sigma_0^m(\tau)\tau^2 d\tau\right)\vec{r},$$

$$\text{или} \quad \nabla\Phi_0 = -\tfrac{GM(r)}{r^3}\vec{r}, \tag{21}$$

где $M(r) = 4\pi\int_0^r \sigma_0^m(\tau)\tau^2 d\tau$ — масса газа внутри шара радиуса r,

$$\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}.$$

При $r = 1$, $\nabla\Phi_0 = -GM_{00}\vec{r}$, M_{00} — вся масса газа.

Дифференцируя (3.4) по t и исключая a, b, c, найдем приближенные выражения

$$\vec{u} \approx \vec{u}_0 + \vec{u}_1 t.$$

После вычислений получим

при $n = 1$, $r = 1$

$$u = -\omega y + \omega^2 xt - (GM_{00} - 2ms_0\sigma_{00})xt,$$
$$v = \omega x + \omega^2 yt - (GM_{00} - 2ms_0\sigma_{00})yt,$$
$$w = -(GM_{00} - 2ms_0\sigma_{00})zt,$$
$$z = f(x, y, t) \quad \text{на} \quad \Gamma_t;$$

при $n \geq 2$, $r = 1$

$$u = -\omega y + \omega^2 xt - GM_{00}xt,$$
$$v = \omega x + \omega^2 yt - GM_{00}yt,$$
$$w = -GM_{00}zt,$$
$$z = f(x, y, t) \quad \text{на} \quad \Gamma_t.$$

Уравнению (19) соответствует характеристическая система

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y + (\omega^2 - GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00})xt,$$
$$\frac{dy}{dt} = \omega x + (\omega^2 - GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00})yt,$$
$$\tfrac{df}{dt} = (-GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00})ft, \tag{22}$$

где

$$k = \begin{cases} 1, & \text{для} \quad n = 1, \\ 0, & \text{для} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

при условиях

$$x|_{t=0} = \xi, \qquad y|_{t=0} = \eta,$$
$$f|_{t=0} = f_0(\xi, \eta) = \pm\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}, \quad \xi^2 + \eta^2 \leq 1.$$

Из первых двух уравнений получим уравнение второго порядка

$$x'' - 2(\omega^2 - GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00})tx' + [GM_{00} - 2kms_0\sigma_{00} + (\omega^2 - GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00})^2t^2]x = 0.$$

Сделаем замену переменной [15]

$$x(t) = h(t)\exp\left(\frac{\omega^2 - GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00}}{2}t^2\right),$$

получим уравнение

$$h'' + \omega^2 h = 0. \tag{23}$$

Третье уравнение системы (22) не зависит от двух других и его решение имеет вид

$$f(\xi, \eta, t) = f_0(\xi, h)\exp\left(\frac{-GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00}}{2}t^2\right).$$

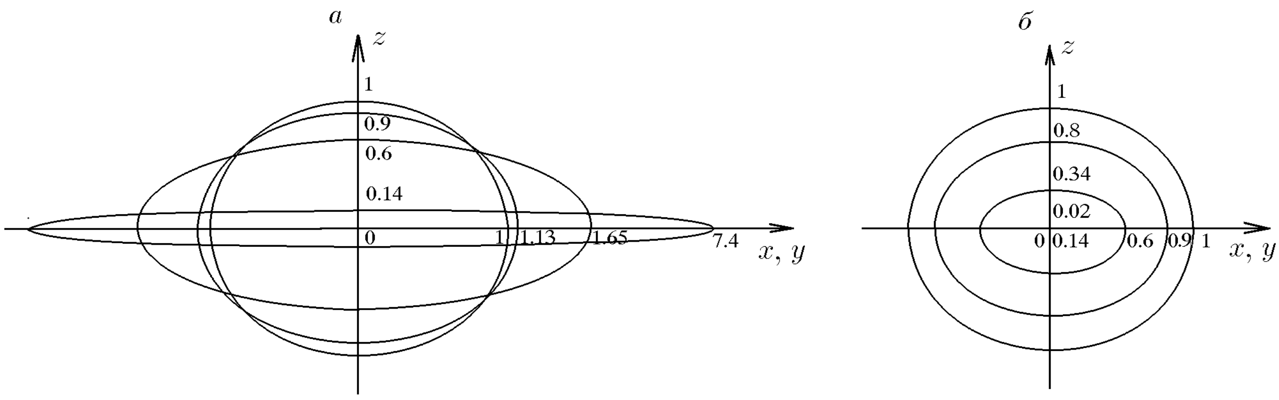

Рис. 1. *а* — $(\omega^2 - GM_{00}) > 0$, *б* — $(\omega^2 - GM_{00}) < 0$.

Решив уравнение (23), найдем решение системы (22) в виде

$$x = \exp\left[\frac{\omega^2 - GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00}}{2}t^2\right](\xi\cos\omega t + \eta\sin\omega t),$$

$$y = \exp\left[\frac{\omega^2 - GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00}}{2}t^2\right](\xi\sin\omega t + \eta\cos\omega t),$$

$$f = z = f_0(\xi,\eta)\exp\left[\frac{-GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00}}{2}t^2\right].$$

Найдем из первых двух уравнений ξ, η и подставим найденные выражения в последнее уравнение:

$$f = z = \exp\left[\frac{-GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00}}{2}t^2\right]\sqrt{1 - (x^2+y^2)exp[-(\omega^2 - GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00})t^2]}.$$

После преобразования приближенное уравнение поверхности Γ_t — границы газ – вакуум примет вид:

при $k = 1$

$$\frac{x^2+y^2}{\exp[(\omega^2 - GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00})t^2]} + \frac{z^2}{\exp[(-GM_{00} + 2kms_0\sigma_{00})t^2]} = 1;$$

при $k = 0$

$$\frac{x^2+y^2}{\exp[(\omega^2 - GM_{00})t^2]} + \frac{z^2}{\exp[(-GM_{00})t^2]} = 1. \qquad (24)$$

Таким образом, Γ_t при $t \geq 0$ принимает форму эллипсоида вращения. Изменение формы свободной границы (24) определяется знаком выражения $\omega^2 - GM_{00}$. При $\omega^2 - GM_{00} > 0$ происходит осесимметричный разлет частиц газа и сжатие вдоль оси OZ. Тело принимает форму сплюснутого эллипсоида вращения. При $\omega^2 - GM_{00} < 0$ шар начинает сжиматься под действием сил самогравитации.

Приведем несколько численных значений величин a, b, c — полуосей эллипсоида (24) для $\omega^2 - GM_{00} < 0$ ($\omega^2 = 1$, $GM_{00} = 2$) и $\omega^2 - GM_{00} > 0$ ($\omega^2 = 2$, $GM_{00} = 1$):

t	$\omega^2 - GM_{00} < 0$			$\omega^2 - GM_{00} > 0$		
	$a = b$	c	a/c	$a = b$	c	a/c
0.5	1.133	0.882	1.28	0.882	0.779	1.13
1	1.649	0.606	2.72	0.606	0.368	1.65
2	7.389	0.135	54.7	0.135	0.018	7.5

Последовательность фигур иллюстрируется на рисунке.

Автор благодарит А. Ф. Сидорова и С. Л. Дерябина за полезные обсуждения работы.

Список литературы

[1] Ламб Г. *Гидродинамика.* М.-Л., 1947.

[2] Чандрасекхар С. *Эллипсоидальные фигуры равновесия.* Мир, М., 1973.

[3] Лихтенштейн Л. *Фигуры равновесия вращающейся жидкости.* Наука, М., 1971.

[4] Станюкович К. П. *Неустановившиеся движения сплошной среды.* Наука, М., 1987.

[5] Седов Л. И. *Методы подобия и размерности в механике.* Наука, М., 1987.

[6] Сидоров А. Ф. О некоторых течениях газа в поле тяжести. *ПММ,* **42**, 1978, 96–104.

[7] Богоявленский О. И. Динамика гравитирующего газового эллипсоида. *Там же,* **40**, 1976, 270–280.

[8] Дерябин С. Л., Чуев Н. П. Сферически-симметричное истечение самогравитирующего газа в вакуум. *Там же,* **58**, вып. 2, 1994, 77–84.

[9] Сретенский Л. Н. *Теория ньютоновского потенциала.* М.-Л., 1946.

[10] Гюнтер Н. М. *Теория потенциала.* М., 1953.

[11] Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В. *Введение в теорию ньютоновского потенциала.* Наука, М., 1988.

[12] Овсянников Л. В. *Лекции по основам газовой динамики.* Наука, М., 1981.

[13] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Наука, М., 1970.

[14] Курант Р. *Уравнения с частными производными.* Мир, М., 1964.

[15] Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Наука, М., 1971.

Поступила в редакцию 5 января 1998 г.