

ИССЛЕДОВАНИЕ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА КАЧЕСТВО ПРЕДСКАЗАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ*

И. А. БЕДАРЕВ, Н. Н. ФЕДОРОВА

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН

Новосибирск, Россия

e-mail: lab2@itam.nsc.ru

The properties of three TVD schemes for Euler equations constructed by different methods of inviscid flux splitting are investigated on the 1-D Sod problem and the problem of the turbulent separated flow simulation in the neighborhood of forward-faced step at Mach $M=3$. The properties of the numerical solutions are shown to depend strongly on the algorithm resolving capability. The dependence on some turbulence model parameter that controls the balance of the dissipation and generation of turbulent kinetic energy processes in the turbulent model used in calculation was investigated for the case of viscous problem.

Введение

В настоящее время математическое моделирование наряду с физическим экспериментом играет важную роль как инструмент исследования сложных течений жидкости и газа. В связи с этим возрастают требования к численному алгоритму, который должен обеспечить получение приближенного решения с гарантированной точностью при минимальных затратах машинного времени. Особое внимание должно быть обращено на выделение "визит-эффектов" численного алгоритма, чтобы полученное численно решение было физичным. С этой целью свойства алгоритмов исследуются на специальных тестах, построенных на основе точных решений, или на экспериментальном материале. Важным с этой точки зрения является использование для тестирования как можно более широкого спектра экспериментальных данных, а также сравнение работы различных методов на одних и тех же задачах.

Особый класс задач математического моделирования составляют задачи обтекания сверхзвуковой аэродинамики, характеризующиеся сложной волновой структурой, которая возникает при взаимодействии ударных волн и волн разрежения с вязкими слоями. Скачки уплотнения, взаимодействуя с пограничными слоями, могут привести к отрыву пограничного слоя. Отрывные течения являются наиболее трудным объектом для численного моделирования [1]. Турбулентность реальных течений существенно усложняет задачу, поскольку для ее описания следует привлекать какой-либо способ моделирования

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96-01-01777.

© И. А. Бедарев, Н. Н. Федорова, 1999.

турбулентности. Дополнительный фактор — выбор модели турбулентности — оказывает значительное влияние на конечный результат.

Критерием оценки качества расчетов отрывных течений, проведенных с помощью того или иного численного алгоритма и на основе той или другой модели турбулентности, является правильное воспроизведение параметров течения, и прежде всего масштаба отрыва (длины отрывной зоны), во многом определяющего все остальные параметры. Отрыв пограничного слоя формируется в результате нелинейного взаимодействия вязких и невязких сил. Следовательно, математическая модель и численный алгоритм должны адекватно описывать баланс конвективных и вязких механизмов рассматриваемого физического течения. Сильное влияние на результат оказывает степень разрешения волновой картины течения, которая зависит от способа аппроксимации невязких потоков. Вязкие силы для исследуемого класса течений определяются, главным образом, турбулентными напряжениями и, следовательно, зависят от используемой для замыкания осредненных уравнений модели турбулентности. Большое значение имеет способность используемого алгоритма правильно предсказывать рост турбулентных пульсаций при взаимодействии со скачками уплотнения и их гашение при взаимодействии с волнами разрежения. На эту способность алгоритма влияет прежде всего соотношение механизмов порождения и диссипации турбулентной кинетической энергии, работающих в выбранной модели турбулентности. Однако, как показывают исследования (см., например, [2]), результат зависит также и от способа аппроксимации невязких потоков.

В настоящей работе на двух тестовых задачах проводится сравнение численных решений, которые получены с использованием нескольких высокоразрешающих TVD-схем, построенных на основе расщепления вектора невязких потоков. Первым примером, на котором уточняются разрешающие свойства численного алгоритма решения уравнений Эйлера, является известный тест Сода [3] для задачи о распаде произвольного разрыва. Полученные с помощью различных методов численные решения сравниваются с точным. Второй пример — реальное двумерное физическое течение около расположенной навстречу сверхзвуковому турбулентному потоку прямой ступеньки, в окрестности которой реализуется отрывное течение. Для этой задачи результаты численных расчетов сравниваются с экспериментальными данными [4, 5]. Изучено влияние способа аппроксимации невязких потоков, а также проведено параметрическое исследование используемой двухпараметрической модели турбулентности, оказывающей сильное влияние на предсказание параметров отрывного течения.

1. Построение TVD-схемы для системы уравнений газовой динамики

Запишем уравнения Эйлера движения идеального газа в консервативной форме:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{F}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{Q}}}{\partial x} = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}$ — вектор консервативных переменных, $\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} Q_\rho \\ Q_u \\ Q_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho H u \end{pmatrix}$ — вектор потоков, ρ — плотность, u — скорость, p — давление, e — удельная внутренняя

энергия, $E = e + \frac{u^2}{2}$ — полная энергия, $H = h + u^2/2 = e + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$ — полная энтальпия. Построим явную временную аппроксимацию системы (1):

$$\begin{aligned}\rho^{n+1} - \rho^n &= \tau W_\rho^n, \\ u^{n+1} - u^n &= \frac{\tau}{\rho} (W_u^n - u^n W_\rho^n), \\ e^{n+1} - e^n &= \frac{\tau}{\rho} (W_e^n - (e^n + \frac{(u^n)^2}{2}) W_\rho^n - u^n (W_u^n - u^n W_\rho^n)),\end{aligned}\tag{2}$$

где $W_\rho = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$, $W_u = -\frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x}$, $W_E = -\frac{\partial(\rho E + p)u}{\partial x}$.

Схема (2) имеет первый порядок аппроксимации по времени. Второй порядок аппроксимации может быть получен, например, с помощью двухстадийной схемы Рунге — Кутты:

$$\rho^{n+1} - \rho^n = \tau k_2, \quad u^{n+1} - u^n = \tau l_2, \quad e^{n+1} - e^n = \tau m_2,$$

где

$$\begin{aligned}k_2 &= W_\rho(\rho^n + \frac{\tau k_1}{2}, u^n + \frac{\tau l_1}{2}), \\ l_2 &= \frac{1}{\rho^n} (W_u(\rho^n + \frac{\tau k_1}{2}, u^n + \frac{\tau l_1}{2}, e^n + \frac{\tau m_1}{2}) - u^n k_2), \\ m_2 &= \frac{1}{\rho^n} (W_e(\rho^n + \frac{\tau k_1}{2}, u^n + \frac{\tau l_1}{2}, e^n + \frac{\tau m_1}{2}) - (e^n + \frac{u^{n2}}{2}) k_2 - u^n l_2), \\ k_1 &= W_\rho(\rho^n, u^n), \\ l_1 &= \frac{1}{\rho^n} (W_u(\rho^n, u^n, e^n) - u^n W_\rho(\rho^n, u^n)), \\ m_1 &= \frac{1}{\rho^n} (W_e(\rho^n, u^n, e^n) - (e^n + \frac{u^{n2}}{2}) W_\rho(\rho^n, u^n) - u^n (W_u(\rho^n, u^n, e^n) - u^n k_1)).\end{aligned}$$

Для построения устойчивой противотоковой аппроксимации правых частей разностной схемы (2) разобьем вектор потоков на положительную и отрицательную составляющие: $\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{Q}}^+ + \tilde{\mathbf{Q}}^-$. С этой целью будем использовать следующие методы расщепления вектора потоков (Flux Vector Splitting): по физическим процессам [6], Стигера — Ворминга [7] и Ван Лира [8].

В методе [6] компоненты вектора потока расщепляются так:

$$\begin{aligned}Q_\rho^+ &= \begin{cases} \rho u, & u > 0, \\ 0, & u \leq 0, \end{cases} & Q_\rho^- &= \begin{cases} \rho u, & u \leq 0, \\ 0, & u > 0, \end{cases} \\ Q_u^+ &= \begin{cases} \rho u^2, & u > 0, \\ p, & u \leq 0, \end{cases} & Q_u^- &= \begin{cases} \rho u^2, & u \leq 0, \\ p, & u > 0, \end{cases} \\ Q_e^+ &= \begin{cases} (\rho E + p)u, & u > 0, \\ 0, & u \leq 0, \end{cases} & Q_e^- &= \begin{cases} (\rho E + p), & u \leq 0, \\ 0, & u > 0. \end{cases}\end{aligned}\tag{3}$$

В методе Стигера – Ворминга используется расщепление

$$\begin{aligned}
 Q_\rho^+ &= \begin{cases} \rho u, & u > a, \\ S_1 + S_2, & 0 < u \leq a, \\ S_1, & -a < u \leq 0, \\ 0, & u \leq -a, \end{cases} & Q_\rho^- &= \begin{cases} 0, & u > a, \\ S_3, & 0 < u \leq a, \\ S_2 + S_3, & -a < u \leq 0, \\ \rho u, & u \leq -a, \end{cases} \\
 Q_u^+ &= \begin{cases} \rho u^2 + p, & u > a, \\ S_2 u + S_1(u + a), & 0 < u \leq a, \\ S_1(u - a), & -a < u \leq 0, \\ 0, & u \leq -a, \end{cases} & Q_u^- &= \begin{cases} 0, & u > a, \\ S_3(u + a), & 0 < u \leq a, \\ S_2 u + S_3(u - a), & -a < u \leq 0, \\ \rho u^2 + p, & u \leq -a, \end{cases} \\
 Q_e^+ &= \begin{cases} (\rho E + p)u, & u > a, \\ S_2 \frac{u^2}{2} + S_1(h + ua), & 0 < u \leq a, \\ S_1(h - ua), & -a < u \leq 0, \\ 0, & u < -a, \end{cases} & Q_e^- &= \begin{cases} 0, & u > a, \\ S_3(h + ua), & 0 < u \leq a, \\ S_2 \frac{u^2}{2} + S_3(h - ua), & -a < u \leq 0, \\ (\rho E + p)u, & u < -a, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ – скорость звука, $S_1 = \frac{\rho(u+a)}{2\gamma}$, $S_2 = \frac{\rho u(\gamma-1)}{\gamma}$, $S_3 = \frac{\rho(u-a)}{2\gamma}$.

Метод Ван Лиры отличается от предыдущего способом расщепления в дозвуковой зоне и обеспечивает непрерывную дифференцируемость компонент при переходе с положительной ветви на отрицательную.

Пусть $R^+ = \frac{\rho a(M+1)^2}{4}$, $R^- = \frac{\rho a(M-1)^2}{4}$, где $m = \frac{u}{a}$ – число Маха. Тогда

$$\begin{aligned}
 Q_\rho^+ &= \begin{cases} \rho u, & u > a, \\ R^+, & -a < u \leq a, \\ 0, & u \leq -a, \end{cases} & Q_\rho^- &= \begin{cases} 0, & u > a, \\ R^-, & -a < u \leq a, \\ \rho u, & u \leq -a, \end{cases} \\
 Q_u^+ &= \begin{cases} \rho u^2 + p, & u > a, \\ R^+ \frac{(\gamma-1)u + 2a}{\gamma}, & -a < u \leq a, \\ 0, & u \leq -a, \end{cases} & Q_u^- &= \begin{cases} 0, & u > a, \\ R^- \frac{(\gamma-1)u - 2a}{\gamma}, & -a < u \leq a, \\ (\rho E + p)u, & u \leq -a, \end{cases} \\
 Q_e^+ &= \begin{cases} (\rho E + p)u, & u > a, \\ R^+ \frac{((\gamma-1)u + 2a)^2}{2(\gamma^2 - 1)}, & -a < u \leq a, \\ 0, & u \leq -a, \end{cases} & Q_e^- &= \begin{cases} 0, & u > a, \\ R^- \frac{((\gamma-1)u - 2a)^2}{2(\gamma^2 - 1)}, & -a < u \leq a, \\ (\rho E + p)u, & u \leq -a. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{5}$$

На рис. 1 представлены графики первой компоненты вектора потоков Q_ρ^+ в зависимости от u для всех трех описанных выше методов.

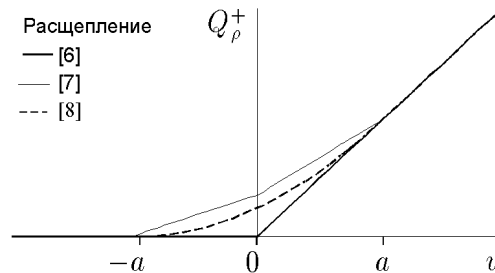


Рис. 1. Первая компонента Q_ρ^+ .

Используя описанные выше расщепления вектора потоков, построим аппроксимации их производных:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial x} \approx \frac{\vec{Q}_{i+1/2} - \vec{Q}_{i-1/2}}{\Delta x}, \quad (6)$$

$$\vec{Q}_{i\pm 1/2} = \vec{Q}_{i\pm 1/2}^+ + \vec{Q}_{i\pm 1/2}^-,$$

$$\vec{Q}_{i+1/2}^- = \vec{Q}_{i+1}^- - \frac{\sigma}{4} \left((1 - \kappa) \Delta^+ + (1 + \kappa) \Delta^- \right) (\vec{Q}_{i+1}^-), \quad (7)$$

$$\vec{Q}_{i+1/2}^+ = \vec{Q}_i^+ + \frac{\sigma}{4} \left((1 - \kappa) \Delta^- + (1 + \kappa) \Delta^+ \right) (\vec{Q}_i^+),$$

где $\Delta^+ (\vec{Q}_i) = \vec{Q}_{i+1} - \vec{Q}_i$, $\Delta^- (\vec{Q}_i) = \vec{Q}_i - \vec{Q}_{i-1}$.

Формулы (6)–(7) аппроксимируют пространственные производные с первым ($\sigma = 0$) или с повышенным ($\sigma = 1$) порядком аппроксимации [9]. Третьему порядку соответствует значение $\kappa = 1/3$, второму $-\kappa = -1, 0, 1$. При $\kappa = -1$ аппроксимация сводится к полностью односторонним, при $\kappa = 0$ — к центральным, а при $\kappa = 1/3, 1$ — к смещенным против потока разностям.

При $\sigma = 1$ для сохранения монотонности решения в областях больших градиентов порядок аппроксимации понижается заменой операторов Δ^+ и Δ^- операторами δ^+ и δ^- соответственно:

$$\delta^+ = \begin{cases} 0, & \text{sign}(\Delta^+) \text{sign}(\Delta^-) \leq 0, \\ \min(|\Delta^+|, \Theta |\Delta^-|) \text{sign}(\Delta^+), & \text{sign}(\Delta^+) \text{sign}(\Delta^-) > 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\delta^- = \begin{cases} 0, & \text{sign}(\Delta^+) \text{sign}(\Delta^-) \leq 0, \\ \min(|\Delta^-|, \Theta |\Delta^+|) \text{sign}(\Delta^-), & \text{sign}(\Delta^+) \text{sign}(\Delta^-) > 0. \end{cases}$$

Параметр Θ изменяется в пределах $1 \leq \Theta \leq \frac{3 - \kappa}{1 - \kappa}$. Построенная таким образом схема (6)–(8) принадлежит к семейству TVD-схем повышенного порядка аппроксимации.

2. Результаты расчета тестовой задачи о распаде произвольного разрыва

Свойства описанных выше схем для одномерных уравнений Эйлера были исследованы на решении задачи о распаде произвольного разрыва (тест Сода [3]). Два различных состояния газа ($\rho_1 = 1.0$, $p_1 = 1.0$, $u_1 = 0$) и ($\rho_5 = 0.125$, $p_5 = 0.1$, $u_5 = 0$) разделены диафрагмой, находящейся в положении x_0 (рис. 2, а). В начальный момент времени диафрагма рвется и в ударной трубе реализуется решение, схематически изображенное на рис. 2, б. На этом рисунке точки x_1 и x_2 ограничивают область распространяющейся влево волны разрежения. Точкой x_3 обозначено положение контактного разрыва на текущий момент времени, x_4 — положение ударной волны. При выбранных начальных данных точному решению соответствуют следующие значения параметров: $u_3 = 0.926$, $p_3 = 0.303$, $\rho_3 = 0.427$; $u_4 = 0.926$, $p_4 = 0.303$, $\rho_4 = 0.265$.

На рисунках, относящихся к данному разделу, представлено решение задачи на момент времени $t = 0.8$. Приближенное решение определялось на равномерной разностной сетке с шагом по пространственной переменной $\Delta x = 0.04$. Максимально допустимое значение

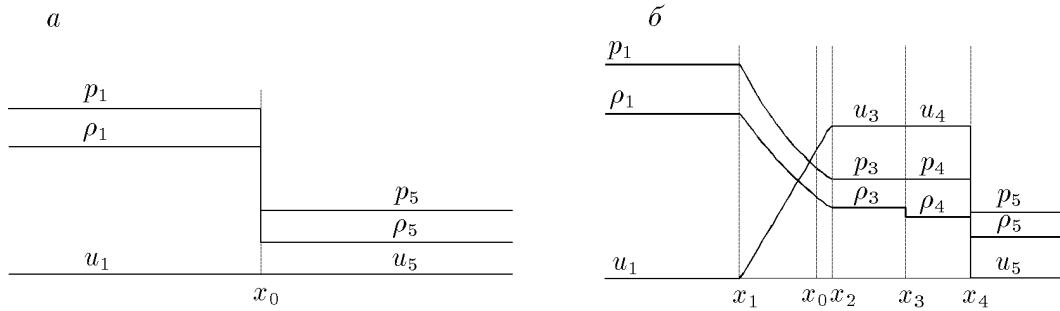


Рис. 2. Распад произвольного разрыва (тест Сода).

шага по времени определяется условием Куранта $\max x(|u| + a) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Поскольку для этой задачи $\max(|u| + a) \leq 2$, то устойчивыми, с точки зрения линейной теории, являются разностные решения при $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 0.5$.

О качестве схемы судят по ее способности воспроизводить все особенности точного решения, а также по свойствам монотонности и устойчивости. Опасными для численного решения системы уравнений газовой динамики являются точки, в которых все или некоторые параметры течения являются разрывными (ударная волна и контактный разрыв), а также точки разрывов производных решения (границы волны разрежения). Достаточно трудно также получить хорошее совпадение с точным решением по уровню внутренней энергии e в области между контактным разрывом и ударной волной.

Для описанных выше схем было исследовано влияние порядка аппроксимации по пространству и по времени на точность приближенного решения.

На рис. 3 представлено решение тестовой задачи с использованием метода расщепления потоков по физическим процессам (3) с первым порядком аппроксимации по времени и пространству при двух значениях шага по времени. Схема хорошо описывает ударную волну и левую границу волны разрежения, однако первый порядок аппроксимации не обеспечивает хорошее воспроизведение контактного разрыва и волны разрежения в районе правой границы. Кроме того, схема очень чувствительна к изменению шага по времени. При значениях числа Куранта, больших 0.5, слева от точки x_4 (за фронтом ударной волны) решение становится немонотонным. При больших значениях числа Куранта появляется тенденция к образованию ударной волны разрежения. Таким же свойством обладает так называемая “противопотоковая” схема [3], построенная на аналогичном (3) расщеплении потока. Для давления использована центральная конечно-разностная аппроксимация, чем автор [3] и объясняет данный эффект. Поскольку в настоящей работе для аппроксимации давления взяты односторонние разности, можно сделать вывод, что появление нефизичного решения связано с видом применяемого расщепления потока.

На рис. 4, 5 представлены результаты, полученные методом расщепления Стигера — Ворминга (4) и Ван Лира (5) с первым порядком аппроксимации по времени и пространству соответственно. Исследования показали, что результаты расчетов по всем этим методам практически не зависят от числа Куранта. Видно, что оба метода хуже, чем предыдущий, описывают ударную волну. Схема (4) значительно размывает обе границы волны разрежения и завышает уровень внутренней энергии перед контактным разрывом. Схема (5) хорошо описывает правую, но размывает левую границу волны разрежения.

Рисунок 6 представляет результаты расчетов по схеме (4) с первым порядком аппрокси-

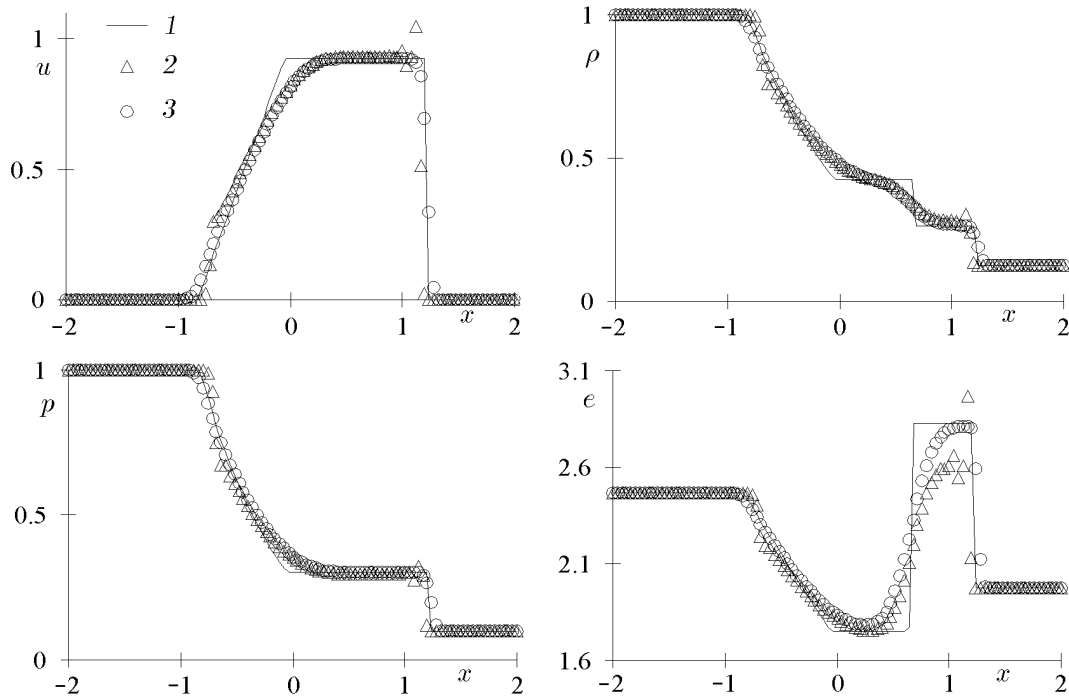


Рис. 3. Решение по методу [6] первого порядка аппроксимации по времени и пространству.

1 — точное решение, 2 — $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.25$, 3 — $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.05$.

мации по времени и вторым порядком по пространственной переменной для двух значений параметра монотонизации (8): минимального $\Theta = 1$ и максимального $\Theta = 2$. Повышение порядка аппроксимации по пространственной переменной привело к заметному улучшению свойств численного решения. Хорошо выделяются ударная волна и контактный разрыв. Однако при максимально допустимом значении параметра монотонизации численное решение начинает проявлять те же свойства, что и схема первого порядка при больших значениях числа Куранта: профиль решения за фронтом ударной волны становится немонотонным, а волна разрежения имеет тенденцию к распаду на две волны, одна из которых является нефизичной. Это свидетельствует о том, что схемы повышенного порядка имеют более жесткое ограничение на шаг по времени, которое зависит также и от значений параметра Θ .

Лучшими свойствами монотонности и устойчивости обладает схема третьего порядка по пространственной переменной (рис. 7). По сравнению со схемой второго порядка лучше разрешаются разрывы. Волна разрежения имеет четкие границы; при данном значении числа Куранта отсутствует тенденция к образованию нефизичного решения. Следует отметить также, что обе схемы (см. рис. 6, 7) достаточно точно предсказывают уровень энергии в области между контактным разрывом и ударной волной.

На рис. 8, 9 приведено сравнение результатов, полученных по схеме (3) второго порядка аппроксимации по времени и второго и третьего порядка аппроксимации по пространственной переменной. Повышение порядка аппроксимации по времени привело к повышению устойчивости численного решения: расчеты стало возможным проводить с большим шагом по времени. Рисунки 8, 9 демонстрируют хорошее разрешение разрывов: на область ударной волны приходится не более одной “висячей” точки, на область контактного раз-

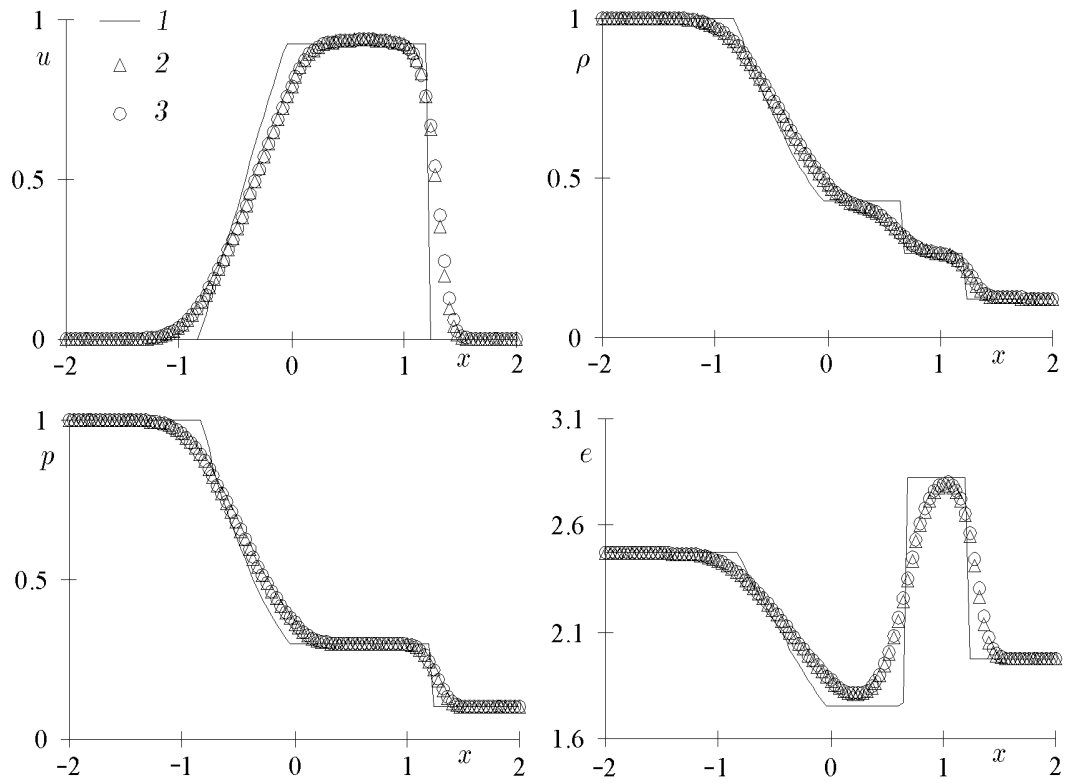


Рис. 4. Решение по методу [7] первого порядка аппроксимации по времени и пространству. Обозн. см. на рис. 3.

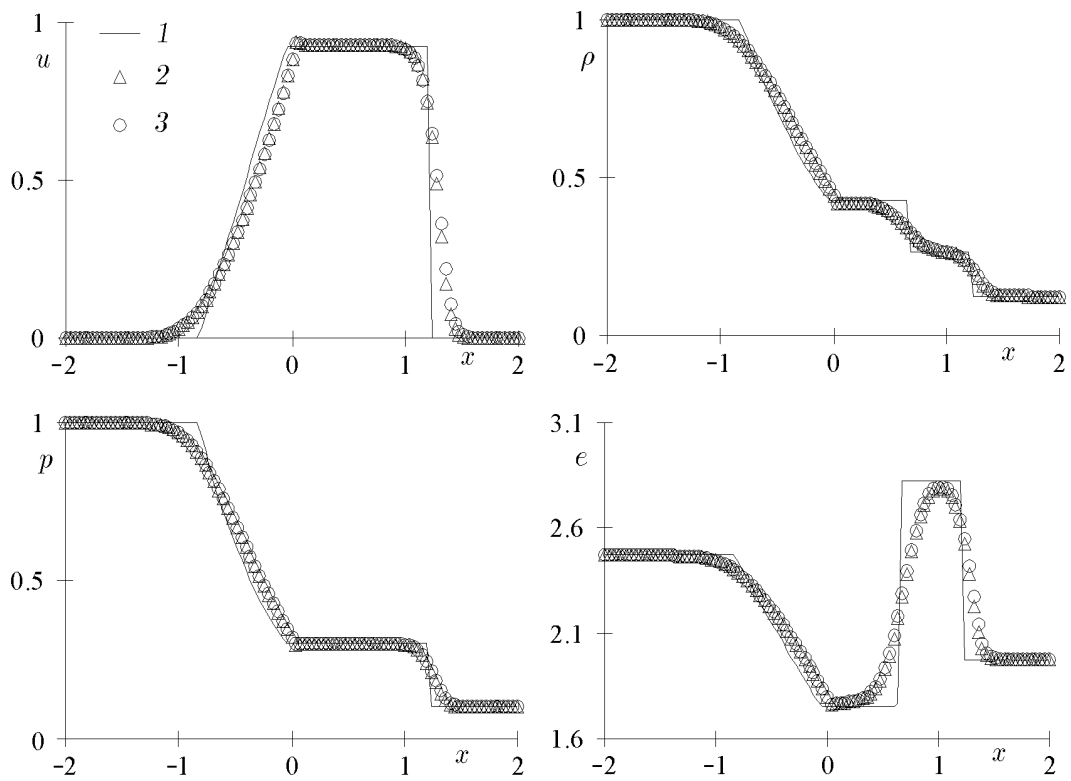


Рис. 5. Решение по методу [8] первого порядка аппроксимации по времени и пространству. Обозн. см. на рис. 3.

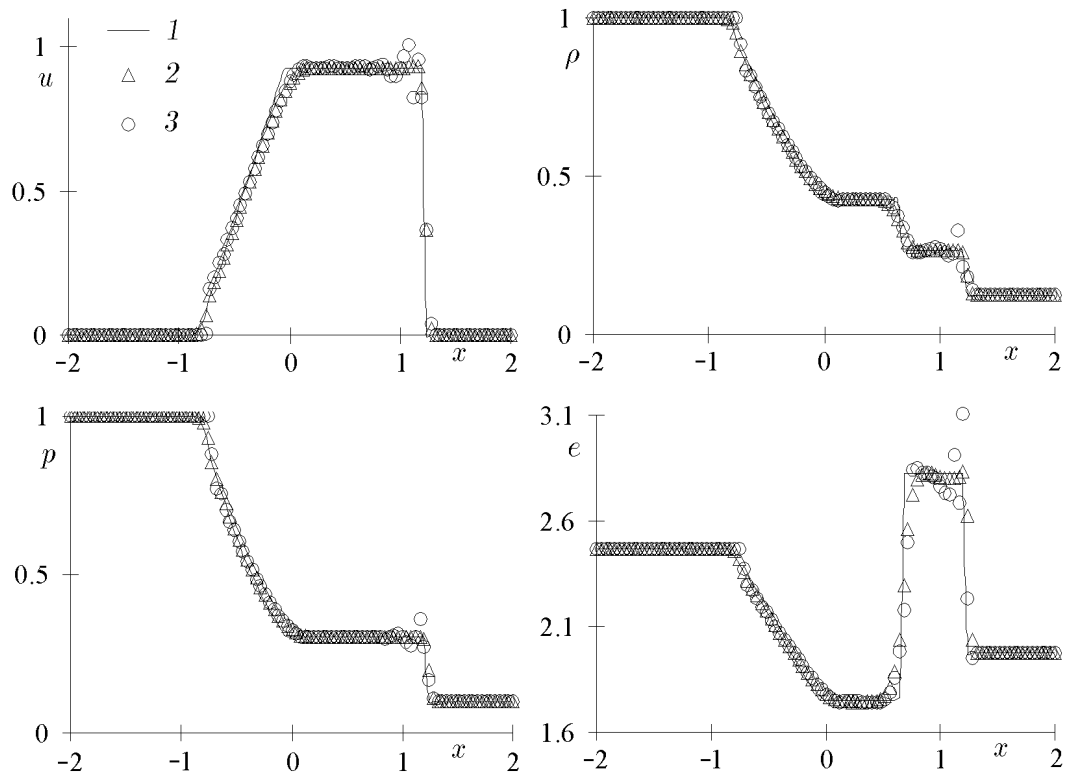


Рис. 6. Метод [6] первого порядка аппроксимации по времени и второго по пространству.
 1 — точное решение, 2 — $\Theta = 1$, 3 — $\Theta = 2$.

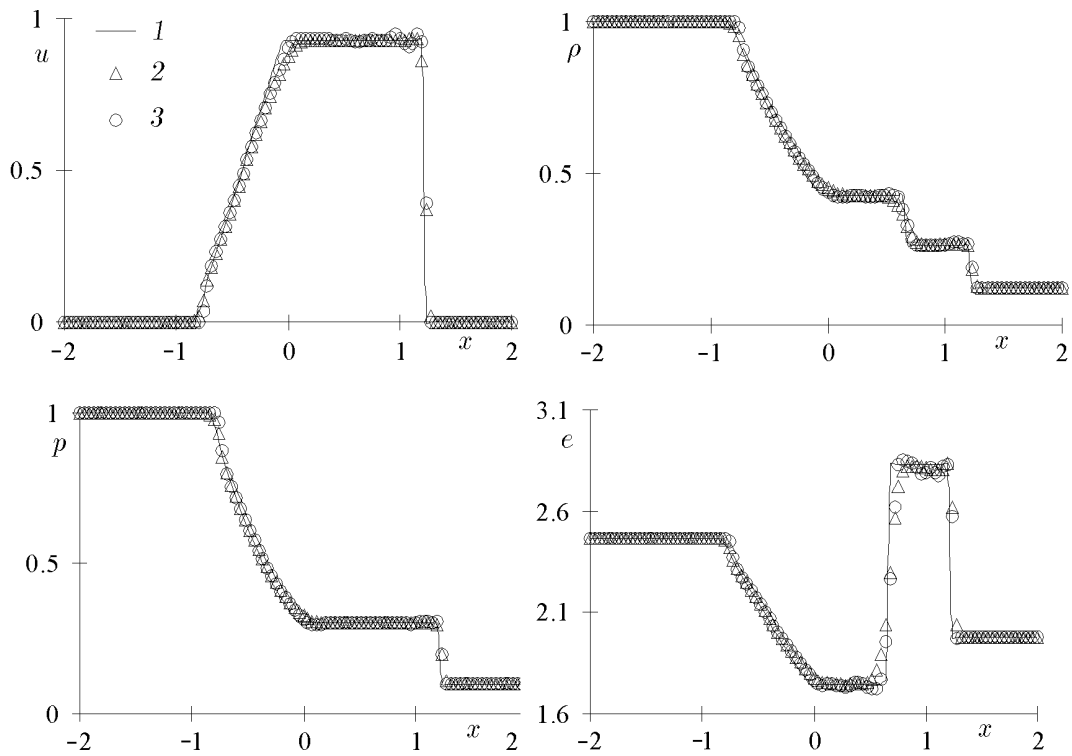


Рис. 7. Метод [6] первого порядка аппроксимации по времени и третьего по пространству.
 1 — точное решение, 2 — $\Theta = 1$, 3 — $\Theta = 4$.

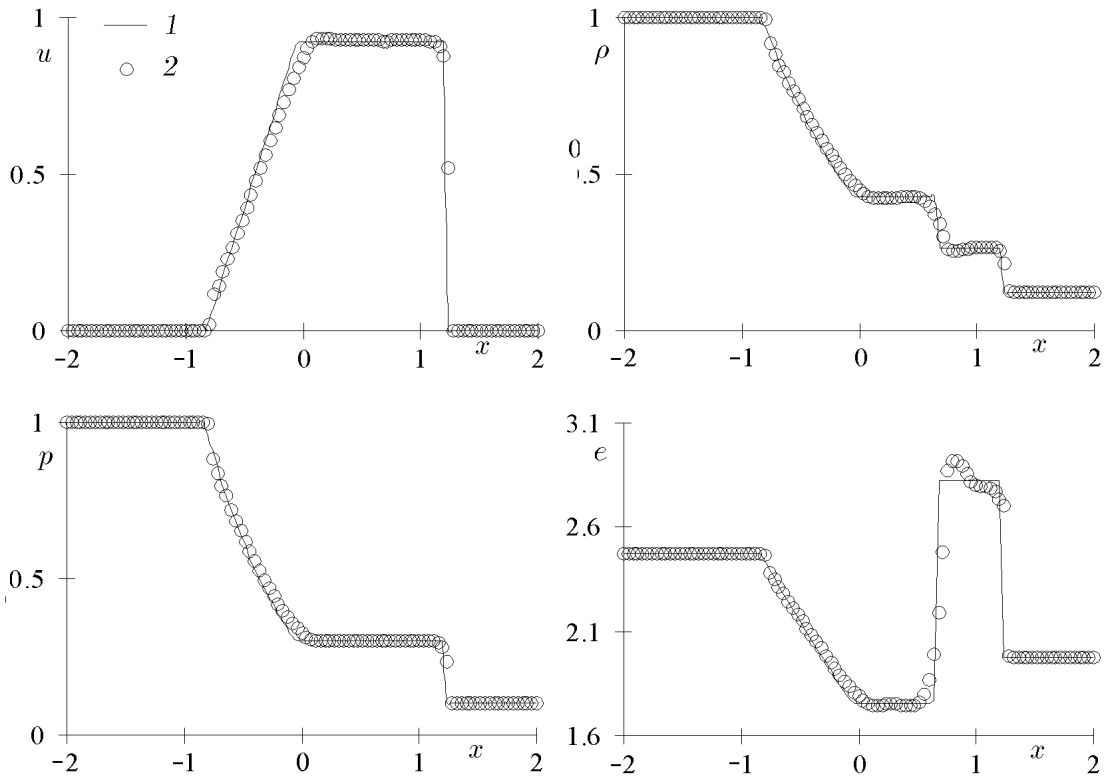


Рис. 8. Метод [6] второго порядка аппроксимации по времени и второго по пространству.

1 — точное решение, 2 — $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.05$, $\Theta = 2$.

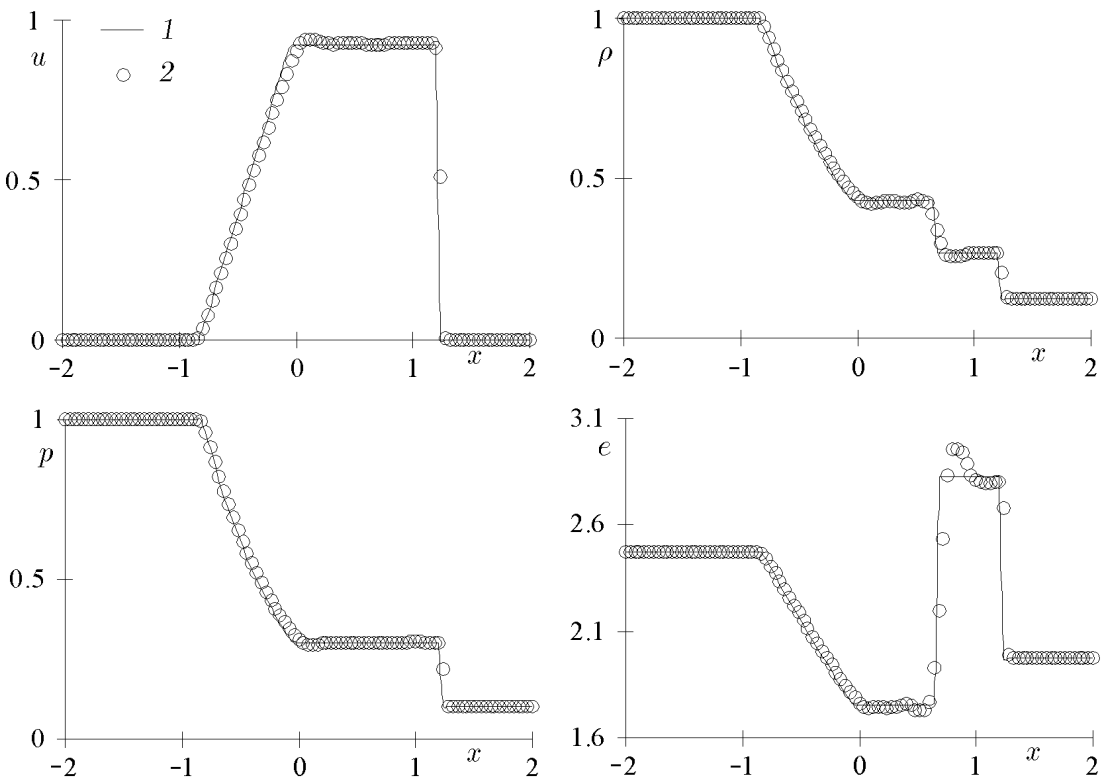


Рис. 9. Метод [6] второго порядка аппроксимации по времени и третьего по пространству.

1 — точное решение, 2 — $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.05$, $\Theta = 4$.

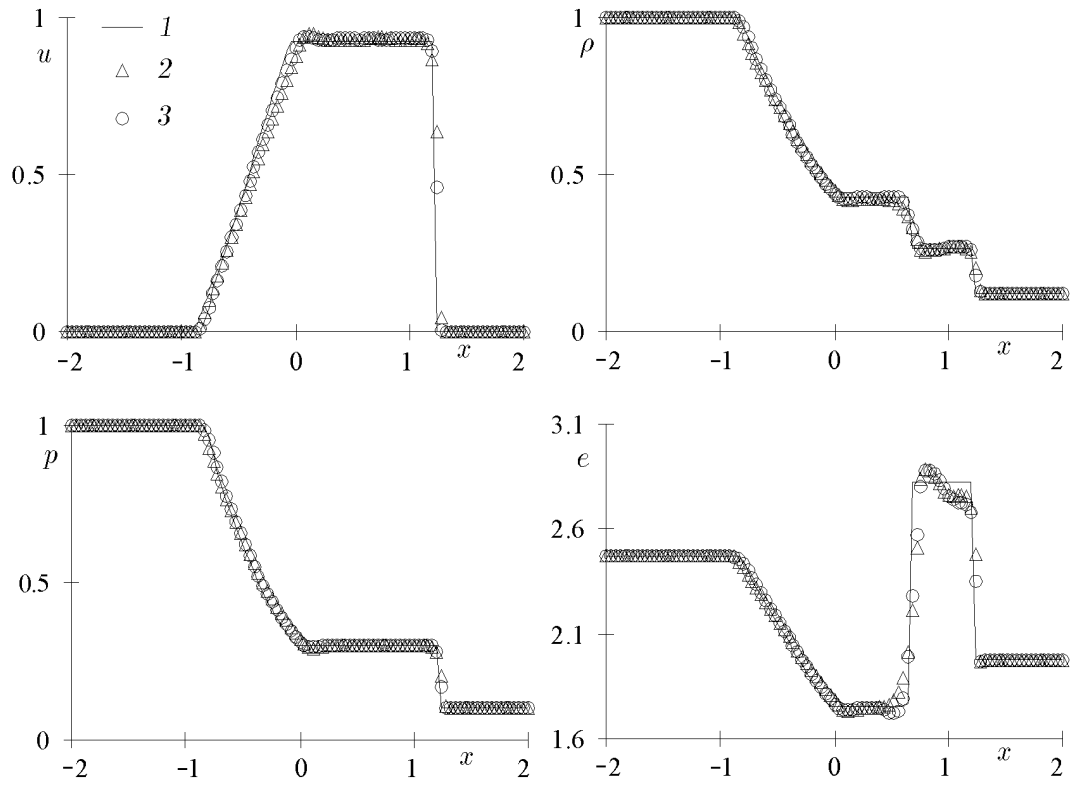


Рис. 10. Метод [7] первого порядка аппроксимации по времени, второго и третьего по пространству.
 1 — точное решение, 2 — второй порядок, 3 — третий порядок.

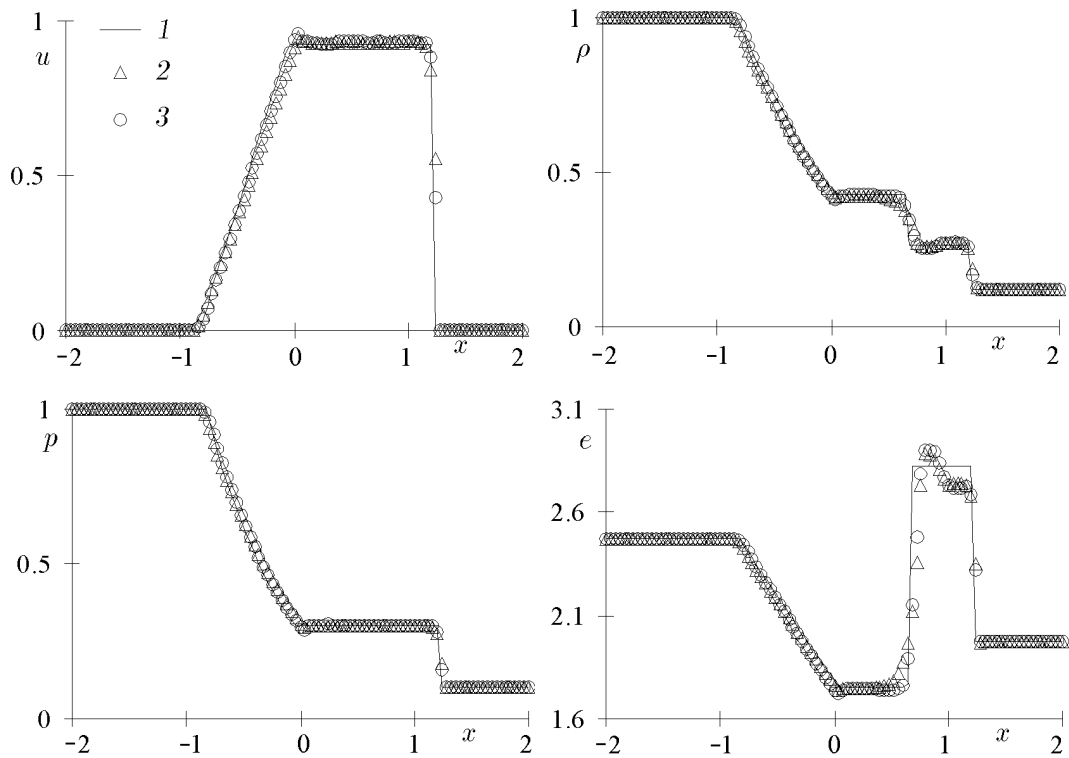


Рис. 11. Метод [8] первого порядка аппроксимации по времени, второго и третьего по пространству.
 Обозн. см. на рис. 10.

рыва — 3 или 4 в зависимости от временного шага. Уровень энергии за ударной волной несколько занижен, а перед контактном разрывом появляется “заплеск”. Параметрические исследования показывают, что отмеченный эффект пропадает при использовании в расчетах меньших значений Θ .

На рисунке 10 показаны результаты, полученные с помощью расщепления (4). Расчеты проведены с первым порядком аппроксимации по времени и вторым и третьим порядком аппроксимации по пространственной переменной с использованием максимальных для каждого случая значений Θ . Профиль решения монотонный везде, кроме области перед контактном разрывом, где появляется “заплеск”, амплитуда которого не зависит от порядка аппроксимации схемы. Расчеты показали, что численное решение устойчиво и не зависит от соотношения шагов по времени и пространству. Переход от второго порядка аппроксимации по пространству к третьему позволяет лучше описать разрывы.

Представленные на рис. 11 результаты расчетов по схеме Ван Лира со вторым и третьим порядком аппроксимации по пространственной переменной имеют те же особенности, что и расчеты по схеме Стигера — Ворминга.

На основе сравнений, проведенных на одномерной тестовой задаче, можно утверждать, что схема, построенная на расщеплении потоков по физическим процессам [6], обладает лучшими разрешающими способностями, чем две другие схемы. Недостатком схемы [6] является более жесткое по сравнению со схемами [7, 8] ограничение на устойчивость. Повышение порядка аппроксимации по времени при этом улучшает свойства монотонности и устойчивости схемы [6].

3. Результаты расчетов задачи об обтекании турбулентным сверхзвуковым потоком прямой ступеньки

Исследованные в предыдущем разделе алгоритмы были использованы для численного решения задачи обтекания сверхзвуковым турбулентным потоком установленной на плоской пластине прямой ступеньки. Расчеты были проведены в условиях физического эксперимента [4, 5], база данных которого содержит широкий набор необходимых для сравнения результатов: распределения давления и трения по поверхности обтекаемого тела, а также поля давления и скорости во всей области изучаемого течения.

Рис. 12 представляет полученную в эксперименте схему течения, на которой показаны граница пограничного слоя (1), отрывной скачок (2) и скачок, исходящий из точки присоединения (3), веер волн разрежения (4), образовавшийся при обтекании верхнего угла ступеньки, а также массивная отрывная зона (5), ограниченная точками отрыва S и присоединения R (h — высота ступеньки).

Для численного моделирования использованы осредненные уравнения Навье — Стокса, дополненные $k-\omega$ -моделью турбулентности Уилкокса [10]. Подробное описание уравнений, приближенного алгоритма и результатов, полученных с помощью схемы расщепления невязких потоков по физическим процессам (3), приведено в [12], где также продемонстрирована зависимость результатов расчетов от разрешающих способностей алгоритма. В частности, показано, что применение для аппроксимации конвективных членов соотношений первого порядка точности приводит к размазыванию отрывного скачка и существенному занижению размеров отрывной зоны и тем самым к искажению всех параметров течения.

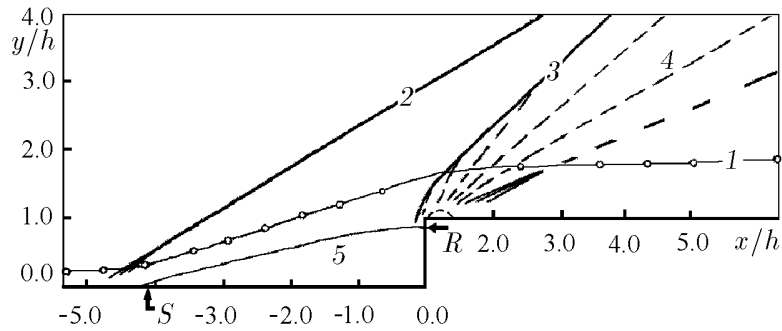


Рис. 12. Экспериментальная схема течения.

В данной статье для расчетов использовались три разностные схемы второго и третьего порядка точности, отличающиеся способом расщепления вектора невязких потоков. Аппроксимация конвективных членов в уравнениях Навье — Стокса определяет степень разрешения волн сжатия, разрежения, контактных разрывов, которые, взаимодействуя с вязким пограничным слоем, образуют сложную волновую структуру физического течения. Моделирование вязких напряжений для развитых турбулентных течений в значительной степени определяется моделью турбулентности, с помощью которой замыкаются осредненные уравнения. Как было отмечено выше, в настоящей работе использована $k-\omega$ -модель турбулентности Уилкокса [10, 11], которая, в отличие от известной $k-\varepsilon$ -модели Джонса — Лаундера, при расчетах пристенных течений не требует введения так называемых “низко-рейнольдсовых” членов. Одной из особенностей $k-\omega$ -модели является необходимость ограничения снизу значений второго турбулентного параметра — удельной скорости диссипации турбулентной кинетической энергии $\omega = \varepsilon/k$. В монографии [11] это ограничение введено как краевое условие для ω на бесконечности. Значения ω_∞ подбираются из условия обеспечения известных автомодельных законов для того или иного типа течения. Как отмечено в [13, 14], отсутствие ограничителя может привести к возникновению нефизических (высоких) значений турбулентной вязкости вне пограничного слоя, т. е. там, где течение является чисто невязким. Для коррекции указанного недостатка модели используются различные приемы. Так, например, в [13] предложена новая модель, которая представляет собой комбинацию $k-\omega$ - и $k-\varepsilon$ -моделей турбулентности, причем модель Уилкокса работает в пристенной логарифмической части течения, а модель Джонса — Лаундера — во внешней, следовой части течения. Показано, что такая комбинированная модель сохраняет все преимущества $k-\omega$ -модели турбулентности. В то же время сильная зависимость расчетных турбулентных параметров от значения ω_∞ не наблюдается. В работе [14] исследована модель с ограничителем на величину порождения турбулентной кинетической энергии, которая не должна превышать величину диссипации более чем в двадцать раз. Показано, что введение такого ограничителя позволяет значительно улучшить предсказание течений в окрестности исследованных тестовых конфигураций. В [15], где модель [13] использована для расчета несжимаемых отрывных течений, также продемонстрирована ее способность правильно описывать поведение турбулентных параметров в областях отрыва и присоединения потока.

В настоящей работе применялось условие вида $\omega \geq \omega_0$, где $\omega_0 \approx 10^{-3}\omega_{\max}$, ω_{\max} — максимальное значения ω , которое достигается на твердой границе. Это ограничение в некотором смысле аналогично ограничению из [14], так как оно контролирует баланс процессов порождения и диссипации, не позволяя диссипации стать меньше некоторого предельного

значения. Поскольку турбулентная вязкость $\mu_t \sim \frac{k}{\omega}$, следует ожидать, что ограничение снизу значений ω может привести к снижению уровня μ_t в областях взаимодействия турбулентных слоев с ударными волнами и волнами разрежения. Расчеты показывают, что введение ограничителя ω_0 и варьирование его значений существенно изменяют распределение турбулентной вязкости и влияют на поведение решения в точке отрыва, внутри отрывной зоны, а также на верхней поверхности ступеньки. Ограничитель работает не только во внешней части пограничного слоя, но и внутри отрывной зоны, а именно в центре рециркуляционного вихря, который является "внешней" областью для пристенного возвратного течения.

На рис. 13 представлены изолинии турбулентной вязкости, полученные в расчетах с использованием расщепления (3) при одних и тех же параметрах для $\omega_0 = 0.15$ (а), 0.27 (б) и 0.38 (в). При самом низком значении ω_0 картина изолиний турбулентной вязкости имеет ярко выраженный максимум вблизи верхнего угла ступеньки, уровень которого существенно выше, чем для больших значений ω_0 . В случае $\omega_0 = 0.15$ возвратное течение, направленное вдоль пластины от торца ступеньки к точке отрыва, имеет высокий уровень турбулентной вязкости, тогда как в двух других случаях область повышенных турбулентных пульсаций как бы отходит от пластины, оставляя в пристенной области течение с низкими значениями турбулентной вязкости (область L). В районе точки отрыва уровень турбулентной вязкости при $\omega_0 = 0.15$ также существенно выше, чем при $\omega_0 = 0.27$.

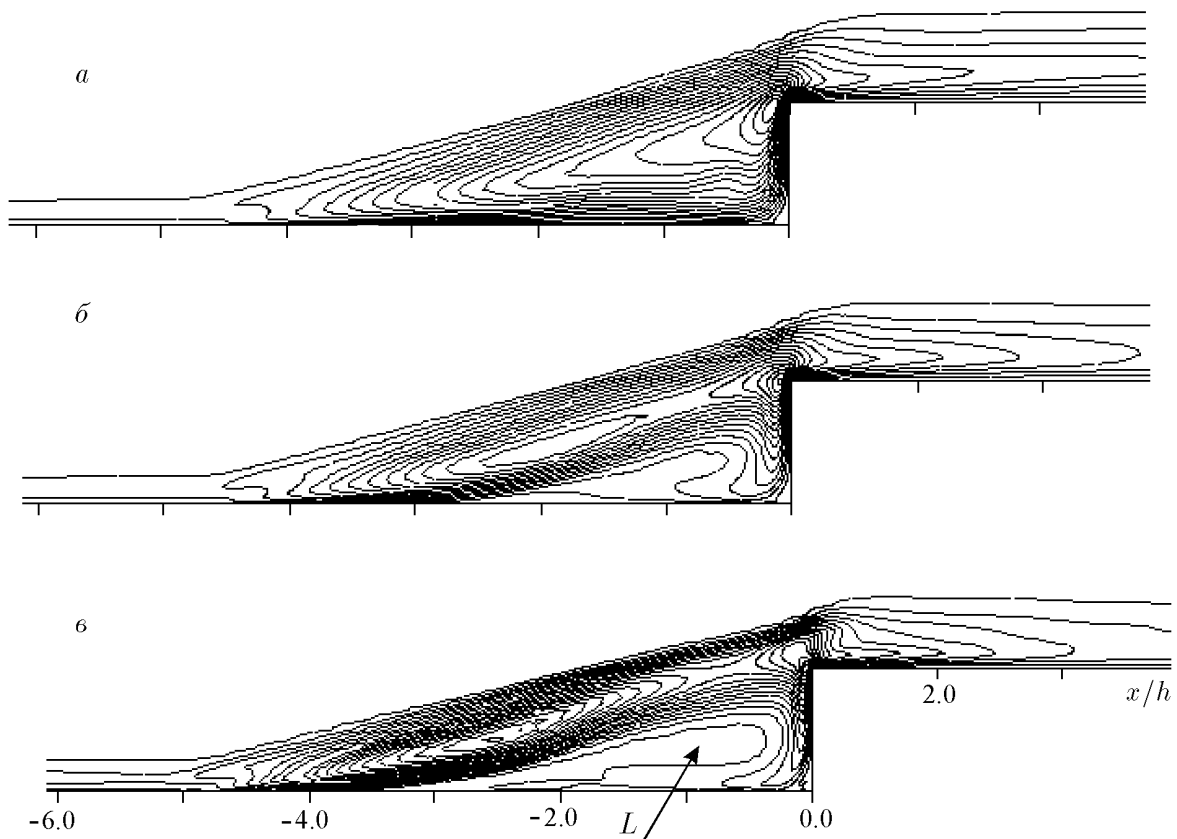


Рис. 13. Изолинии турбулентной вязкости.

На рис. 14 приведены экспериментальные и полученные в расчетах по схеме второго порядка ($\kappa = -1$, $\Theta = 2$) распределения статического давления и трения вдоль поверхности обтекаемого тела для $\omega_0 = 0.38$. На этом и следующем рисунках маркерами отмечены экспериментальные данные [4, 14], кривые 1–3 соответствуют расчетам с использованием способов (4)–(6) расщепления невязких потоков. Ось x направлена вдоль поверхности, включая торцевую зону. Точка $x/h = 0$ соответствует углу сжатия, $x/h = 1$ — вершине угла расширения.

Рисунок 14 показывает, что при данном ω_0 все схемы довольно хорошо предсказывают распределение давления и трения по поверхности. Следует отметить, что схема Стигера—Ворминга (кривая 3) предсказывает более позднее, по сравнению с другими двумя схемами, положение начала роста давления и более высокий уровень его плато. Кривая 1 на графике f , соответствующая расчетам по схеме (3), имеет в районе точки отрыва не наблюдаемый в эксперименте локальный минимум. Экспериментальный уровень коэффициента поверхностного трения за точкой присоединения потока ($x/h \geq 1$) лучше всего предсказывается в расчетах по схеме (3).

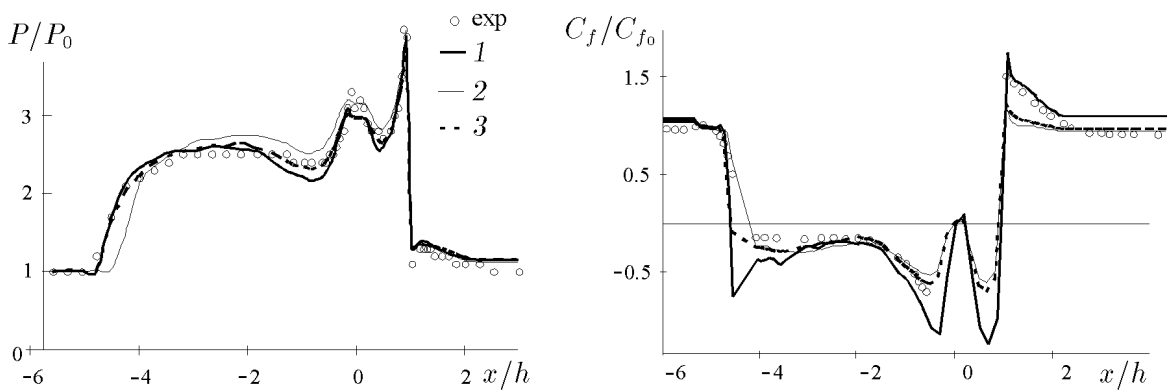


Рис. 14. Распределение давления и трения вдоль поверхности (второй порядок аппроксимации по пространству $\omega_0 = 0.38$).

Рисунок 15, демонстрирует хорошее совпадение с экспериментом результатов расчетов, полученных по схемам третьего порядка аппроксимации ($\kappa = 1/3$, $\Theta = 4$). Результаты, полученные по разным схемам, довольно близки между собой, однако тенденции, отмеченные на предыдущем рисунке, сохраняются. Для схемы третьего порядка лучшее соответствие с экспериментом достигается при $\omega_0 = 0.27$.

На рис. 16 показаны решения, найденные по схеме (5) второго порядка точности, с использованием $\omega_0 = 0.27$, обеспечивающего наилучшее совпадение для схемы третьего порядка (кривая 1) и по схемам (5) третьего порядка точности (кривая 2) с $\omega_0 = 0.38$.

Как уже было отмечено выше, значение параметра $\omega_0 = 0.27$ обуславливает более высокий уровень турбулентной вязкости в зоне взаимодействия со скачком уплотнения, чем полученный при $\omega_0 = 0.38$. Таким образом, при прочих равных условиях следует ожидать, что размер отрывной зоны в первом случае будет меньше. Схема второго порядка сильнее размывает отрывной скачок, что также объясняет более позднее начало роста давления. Уровень давления в области плато слегка завышен. Схема третьего порядка, обладающая лучшими разрешающими способностями, формирует более “крутую” форму отрывного скачка, который, взаимодействуя с менее вязким пограничным слоем, приводит к образованию большей, чем в эксперименте, отрывной зоны.

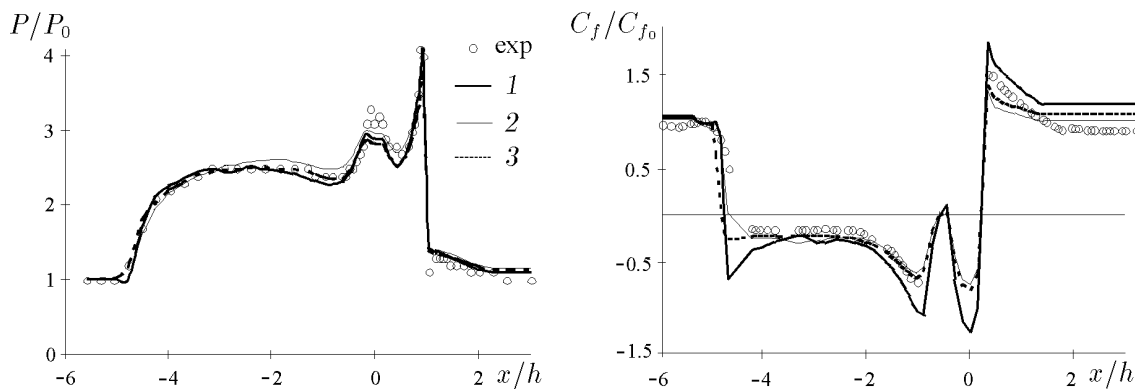


Рис. 15. Распределение статического давления и трения вдоль поверхности (третий порядок аппроксимации по пространству $\omega_0 = 0.27$).

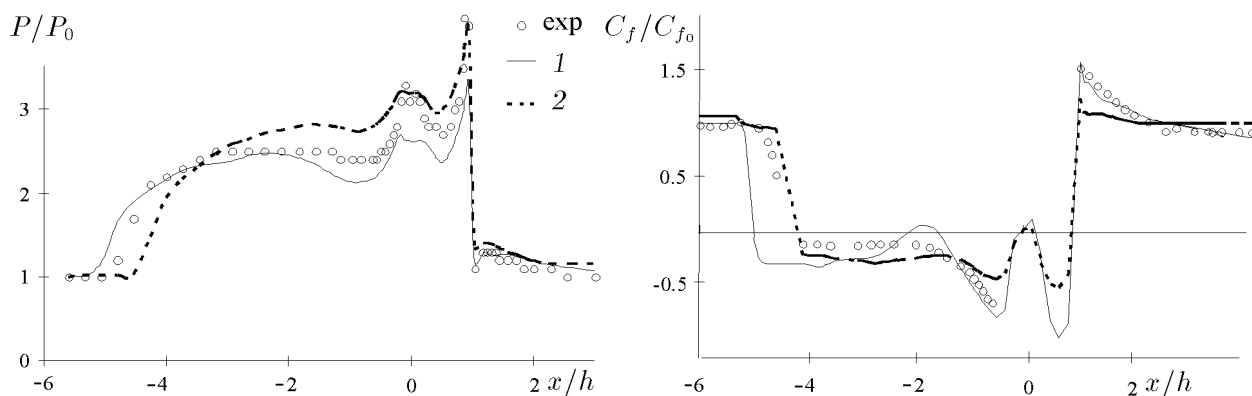


Рис. 16. Распределение статического давления и трения.

1 — третий порядок по пространству $\omega_0 = 0.38$; 2 — второй порядок, $\omega_0 = 0.27$.

Положительный градиент давления в области $x/h < 1$ для возвратного течения от торца ступеньки является сопутствующим. Под его воздействием возвратное течение реламинизируется, т. е. вблизи поверхности возникает зона с низким уровнем турбулентной вязкости. В отрывной зоне формируется интенсивный рециркуляционный вихрь, о чем свидетельствует сильный “провал” в распределении давления над его центром. Падение давления над центром вихря для возвратного течения является неблагоприятным, и при взаимодействии с ним низкотурбулентное возвратное течение может стать отрывным. Не зафиксированный в физическом эксперименте вторичный отрыв возвратного течения можно наблюдать на графике C_f (кривая 2) вблизи точки $x/h = 2$. Приведенные на рис. 16 кривые показывают разброс результатов расчетов, полученных по схемам второго и третьего порядка при различных значениях параметра ω_0 .

Следует также отметить влияние исследуемого параметра на поведение давления на верхней поверхности ступеньки ($x/h > 1$). График распределения давления (см. рис. 16) при $\omega_0 = 0.38$ показывает воспроизведение в расчетах наблюдаемого экспериментально положительного градиента давления. В расчетах с более высоким уровнем турбулентной вязкости ($\omega_0 = 0.27$) положительный градиент давления отсутствует.

На рис. 17 представлены профили скорости осредненного течения в различных попе-

речных сечениях внутри отрывной зоны, измеренные в эксперименте (маркеры) и рассчитанные по схеме (3) второго ($\omega_0 = 0.38$, штриховая линия) и третьего ($\omega_0 = 0.27$, сплошная линия) порядков аппроксимации. Отметив неплохое совпадение с экспериментом обеих расчетных кривых, обратим внимание на то, что расчет по схеме третьего порядка дает более прижатый к поверхности пластины максимум возвратной скорости. Это свидетельствует о более турбулентном, чем в эксперименте, характере расчетного течения (подробнее об этом см. [16, 17]). По-видимому, использованное в расчетах по схеме третьего порядка значение $\omega_0 = 0.27$ все же не обеспечивает правильного соотношения между процессами порождения и диссипации. Увеличение ω_0 приводит, как показывает рис. 16, к излишнему подавлению турбулентности в зоне рециркуляции и обуславливает появление зоны вторичного отрыва. Численные эксперименты показали, что указанный эффект пропадает при повышении уровня турбулентности во входном сечении. К сожалению, экспериментальные данные о значениях турбулентных параметров отсутствуют.

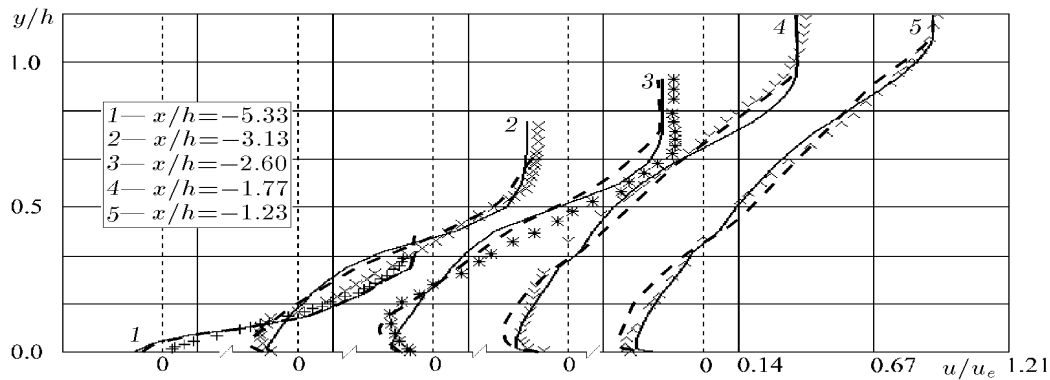


Рис. 17. Профили скорости осредненного течения в различных поперечных сечениях.

Таким образом, проведенные исследования показали сильную зависимость результатов расчетов отрывных течений как от свойств численного алгоритма, так и от параметра используемой модели турбулентности, регулирующего процессы порождения и диссипации. Описан механизм воздействия на модель турбулентности, с помощью которого можно управлять параметрами отрывного течения. Параметр ω_0 позволяет изменять уровень турбулентной вязкости и в области отрывного скачка, и в зоне рециркуляции. Следует, однако, отметить, что, хотя предложенный способ и дает возможность получить хорошее соответствие расчетных данных эксперименту и объяснить многие неудачные попытки расчетов турбулентных отрывных течений, он не является универсальным. Необходимы дальнейшие совместные экспериментальные и расчетные исследования по широкому спектру параметров течения, включая турбулентные величины.

Список литературы

- [1] KNIGHT D. D. Numerical simulation of compressible turbulent flows using the Reynolds-averaged Navier—Stokes equations. *Turbulence in Compressible Flows: AGARD Rep. No. 819*, 1997, 5-1—5-52.
- [2] HANNAPPEL R., HAUSER T., FRIEDRICH R. A comparison of ENO and TVD schemes for computation of shock-turbulence interaction. *J. of Comput. Phys.*, **121**, 1995, 176—184.

- [3] SOD G. A. A survey several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *Ibid.*, **27**, 1978, 1–31.
- [4] ЖЕЛТОВОДОВ А. А., ПАВЛОВ А. А. Исследование течения в сверхзвуковой отрывной зоне перед ступенькой. *Препр. №1, Ин-т теорет. и приклад. механики СО АН СССР*, Новосибирск, 1979.
- [5] БОРИСОВ А. В., ВОРОНЦОВ С. С., ЖЕЛТОВОДОВ А. А., ПАВЛОВ А. А., ШПАК С. И. Развитие экспериментальных и расчетных методов исследования сверхзвуковых отрывных течений. *Препр. №9–93, Ин-т теорет. и приклад. механики СО РАН*, Новосибирск, 1993.
- [6] КОВЕНЯ В. М., ЯНЕНКО Н. Н. *Метод расщепления в задачах газовой динамики*. Наука, Новосибирск, 1981.
- [7] STEGER J. L., WARMING R. F. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite difference methods. *J. of Comput. Phys.*, **40**, 1981, 263–293.
- [8] VAN LEER B. *Flux–vector splitting for the Euler equations*. Technical Rep. 82–30, ICASE, 1982.
- [9] CHAKRAVATHY S. R., OSHER S. A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. *AIAA P.*, No. 85–0363, 1985.
- [10] WILCOX D. C. Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models. *AIAA J.*, **32**, No. 11, 1988, 1299–1310.
- [11] WILCOX D. C. *Turbulence Modelling for CFD*. DCW Industries Inc., La Canada, California, 1993.
- [12] БОРИСОВ А. В., ФЕДОРОВА Н. Н. Расчет турбулентных отрывных течений на основе метода повышенного порядка аппроксимации. *Теплофизика и аэромеханика*, **2**, №3, 1995, 253–269.
- [13] MENTER F. R. Two-equation Eddy—Viscosity turbulence models for engineering application. *AIAA J.*, **32**, No. 8, 1994, 1598–1605.
- [14] KRAL L. D., MANI M., LADD J. A. Application of turbulence model for aerodynamic and propulsion flowfields. *AIAA J.*, **34**, No. 11, 1996, 2291–2298.
- [15] ЗАЙКОВ Л. А., СТРЕЛЕЦ М. Х., ШУР М. Л. Сравнение возможностей дифференциальных моделей турбулентности с одним и двумя уравнениями при расчете течений с отрывом и присоединением. Течение в каналах с обратным уступом. *ТВТ*, **34**, №5, 1996, 724–736.
- [16] BORISOV A. V., ZHELTOVODOV A. A., MAKSIMOV A. I., FEDOROVA N. N., SHPAK S. I. Verification of turbulence models and computational methods of supersonic separated flows. *Int. Conf. on the Methods of Aerophys. Research, Proc., Pt. 1*, Novosibirsk, 1996, 54–61.

- [17] ЖЕЛТОВОДОВ А. А., БЕДАРЕВ И. А., БОРИСОВ А. В., ВОЛКОВ В. Ф., МАЖУЛЬ И. И., МАКСИМОВ А. И., ФЕДОРОВА Н. Н., ШПАК С. И. Развитие и верификация методов расчета применительно к задачам сверхзвуковой аэродинамики. *Препр. №7-97, Ин-т теор. и прикл. механ. СО РАН*, Новосибирск, 1997.

*Поступила в редакцию 24 марта 1998 г.,
в переработанном виде 30 сентября 1998 г.*