

ДИНАМИЧЕСКАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ О КОНСОЛИ

Ю. В. ЗАХАРОВ

Сибирский государственный технологический университет

Красноярский государственный университет

Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН

Красноярск, Россия

А. А. ЗАХАРЕНКО

Сибирский государственный технологический университет

Красноярский государственный университет

Красноярск, Россия

e-mail: dir@iph.krasnoyarsk.su

The dynamic instability of a cantilever rod under the transverse load is investigated. The exact solution of the non-linear equation of large deflection, the dynamic thresholds and the cantilever forms are obtained.

Введение

Ударные разрушения относятся к наиболее тяжким последствиям природных и техногенных катастроф. Поэтому изучение ударных, или динамических нагрузок всегда является объектом пристального внимания исследователей. Около пятидесяти последних лет активно изучались ударные нагрузки на упругие системы и связанная с ними динамическая потеря устойчивости, приводящая к разрушениям. При этом изучалось в основном воздействие вдоль оси системы, вдоль балки, оболочки и т. п. Влияние поперечной нагрузки на динамическую потерю устойчивости изучалось недостаточно. Здесь будет исследована динамическая потеря устойчивости консоли под действием поперечной нагрузки.

1. Постановка задачи

В основополагающей работе М. А. Лаврентьева и А. Ю. Ишлинского [1] динамическая потеря устойчивости была рассмотрена для эйлера стержня при продольном изгибе.

В работах [2, 3] было показано, что задача о перемагничивании магнитного слоя с несимметричными граничными условиями (магнитомягкий слой на магнито жесткой подложке) аналогична задаче Эйлера об устойчивости упругого стержня. Были найдены статические и динамические пороги потери устойчивости магнитной системы, получены точ-

ные аналитические решения для форм распределения намагниченности на каждом пороге при перемагничивании в плоскости слоя вдоль и поперек направления магнитной анизотропии (для статических порогов см. [4–6]). Для данной магнитной системы эти виды перемагничивания аналогичны продольной и поперечной сосредоточенной нагрузке на свободном конце упругого стержня, закрепленного на другом конце.

Для упругого стержня с указанными граничными условиями, на который действует продольная сила P , пороги обычно находятся из решения уравнения равновесия в линейном приближении (см., например, [7]) и имеют вид

$$P_{th}^m = (2m - 1)^2(\pi/2)^2\alpha_r/L^2, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\alpha_r = EJ$ — жесткость на изгиб, E — модуль Юнга, J — осевой момент инерции сечения, L — длина стержня.

Статический порог при $m = 1$ равен эйлеровой силе. Пороги при $m > 1$ были названы М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским динамическими порогами потери устойчивости, которые могут быть достигнуты при ударном приложении нагрузки, когда время нарастания импульса меньше времени релаксации системы.

Для конечных отклонений от положения равновесия уравнение продольного изгиба стержня становится нелинейным. Его решение после приведения к виду уравнения для нелинейного маятника (для угла между касательной к стержню и осью x) было получено в 1938 г. в диссертации Х. Хайнзерлинга ([8], см. также [7]). Решение в окрестности первого, статического порога было найдено в эллиптических функциях и точно совпадает с решением [4–6] для распределения намагниченности при перемагничивании слоя вдоль направления анизотропии¹. Выражения для всех порогов в линейном и нелинейном случаях для упругой и магнитной систем совпадают.

Таким образом, для продольного случая проведено подробное рассмотрение, т. е. решены нелинейные уравнения и найдены статические и динамические пороги потери устойчивости для упругого стержня и магнитного слоя.

Для поперечного случая такое подробное рассмотрение проведено для магнитной системы. Для упругого стержня рассматривалась в различных приближениях только форма при статической нагрузке. В наиболее подробной монографии Е. П. Попова [10] были рассмотрены возможные формы устойчивости консоли как отрезки кривых — эластик Эйлера.

Ниже будут исследованы динамическая потеря устойчивости и форма упругого стержня — консоли под действием поперечной нагрузки.

2. Динамические пороги и форма консоли

Система координат показана на рис. 1. У стержня кругового сечения, если нет внешних крутящих моментов, при изгибе кручения нет. Тогда задача об изгибе консоли сводится [9, 10] к уравнению нелинейного маятника для угла γ как функции длины дуги l

$$d^2\gamma/dl^2 + (P/\alpha_r)\sin\gamma = 0 \quad (2)$$

¹Один из авторов (Ю. В. Захаров) искренне благодарен проф. В. В. Шайдурову (ВЦ СО РАН, Красноярск) и проф. Е. Schnack (Университет Карлсруэ) за помощь в получении копии диссертации Х. Хайнзерлинга.

с граничными условиями $\gamma = \pi/2$ при $l = 0$, $\gamma' = 0$ при $l = L$. Эта задача сведена в [9] к квадратурам. В [10] получены решения в виде эллиптических интегралов, зависящие от трех параметров, неявным образом связанных с граничными условиями.

Найдем полное решение в явном виде. Вводя безразмерную длину дуги $t = l/L$ и обозначение $q^2 = PL^2/\alpha_r$, запишем уравнение для $\gamma(t)$ в виде

$$d^2\gamma/dt^2 + q^2 \sin \gamma = 0 \quad (3)$$

с условиями $\gamma(0) = \pi/2$, $\gamma'(1) = 0$. Первое интегрирование дает $d\gamma/dt = (C + 2q^2 \cos \gamma)^{1/2}$.

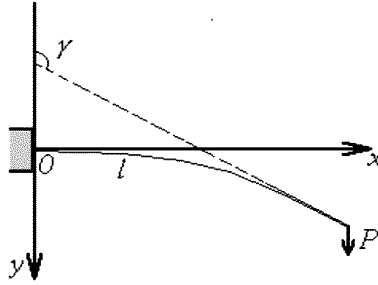


Рис. 1. Система координат

Отсюда, вводя обозначения $\gamma/2 = \varphi_1$ и $k^2 = (C + 2q^2)/4q^2$ и интегрируя, получаем общее решение в виде неполного эллиптического интеграла первого рода

$$F(\varphi_1, k^{-1}) = kqt + D. \quad (4)$$

Это решение является общим и для продольного, и для поперечного случая, для каждого из которых постоянная D определяется из условия при $t = 0$ (для продольного $\gamma(0) = 0$). В нашем случае $\gamma(0) = \pi/2$. Воспользуемся линейным преобразованием эллиптического интеграла $F(\varphi^*, k^*) = kF(\varphi, k)$, где $k^* = k^{-1}$, $\sin \varphi^* = k \sin \varphi$. Тогда из условия угол $\varphi_1 = \pi/4$ при $t = 0$ находим

$$F[\arcsin(k^{-1} \sin \varphi_1), k] = qt + F[\arcsin(\sqrt{2}/2k), k]. \quad (5)$$

Введем обозначение $F[\arcsin(\sqrt{2}/2k), k] = F_1$ и проведем обращение эллиптического интеграла. Получим

$$k^{-1} \sin \varphi_1 = \operatorname{sn}(qt + F_1, k), \quad (6)$$

где sn обозначает эллиптический синус Якоби, k — модуль эллиптического синуса, который подлежит определению из условия на свободном конце. Для угла γ имеем

$$\gamma = 2\arcsin[k \operatorname{sn}(qt + F_1, k)], \quad (7)$$

откуда $d\gamma/dt = 2kq \operatorname{cn}(qt + F_1, k)$, где cn обозначает эллиптический косинус Якоби. Из граничного условия $d\gamma/dt = 0$ при $t = 1$ следует уравнение $\operatorname{cn}(qt + F_1, k) = 0$. Поскольку $\operatorname{cnu} = 0$ при $u = (2m - 1)K(k)$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, находим спектр собственных значений P :

$$P/P_c = (2/\pi)^2 \{(2m - 1)K(k) - F[\arcsin(\sqrt{2}/2k), k]\}^2, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где введена эйлерова сила $P_c = (\pi/2)^2 \alpha_r / L^2$.

Это выражение дает уравнение для определения зависимости модуля k от нагрузки P . Рассмотрим случай, когда $m = 1$. При нагрузке $P = 0$ модуль $k^2 = 1/2$, при $P \rightarrow \infty$ модуль $k^2 \rightarrow 1$. Если направить силу в противоположную сторону, $P \rightarrow -\infty$, то во всех выражениях достаточно сделать замену $k \rightarrow k'$, где дополнительный модуль k' определяется равенством $k^2 + k'^2 = 1$. При $P = 0$ модуль $k'^2 = 1/2$ и при $P \rightarrow -\infty$ модуль $k'^2 \rightarrow 1$. Отсюда следует, что отклонение стержня от положения равновесия начинается при любой малой силе $P \neq 0$. Отметим, что при изгибе стержня при монотонно нарастающей нагрузке порога нет.

Если $m > 1$, из (8) следует существование порогов при $k^2 = 1/2$

$$P_{th}^{(m)} = (m-1)^2 [(4/\pi)K(\sqrt{2}/2)]^2 P_c \approx 5.6(m-1)^2 P_c, \quad m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Статического порога (при $m = 1$) нет, пороги при $m > 1$ являются динамическими.

Найдем форму стержня в общем случае. Координаты произвольной точки стержня

$$x = L \int \sin \gamma dt, \quad y = -L \int \cos \gamma dt. \quad (10)$$

Подставляя соотношение (8) в (7), получим для угла γ окончательное выражение

$$\gamma = 2 \arcsin \{k \operatorname{sn}[(pK - F_1)t + F_1, k]\}, \quad p = 1, 3, 5, \dots, \quad (11)$$

где $p = 2m - 1$ и $K = K(k)$. Далее введем обозначение $(pK - F_1)t + F_1 = u$ и будем писать эллиптические функции, опуская модуль k : $\operatorname{sn}(u, k) \equiv \operatorname{sn}u$ и аналогично остальные. Из выражения (11) имеем

$$\sin \gamma = 2k \operatorname{sn}u \operatorname{dn}u, \quad \cos \gamma = 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u, \quad (12)$$

где $\operatorname{dn}u$ — дельта амплитуды Якоби.

Интегрируя в (10) с условиями $x = 0$ и $y = 0$ при $t = 0$, находим координаты x и y

$$x/L = [2k/(pK - F_1)] [(1 - 1/2k^2)^{1/2} - \operatorname{cn}u], \quad (13)$$

$$y/L = t - [2/(pK - F_1)] [E(\operatorname{am}u, k) - E_1], \quad (14)$$

здесь $\operatorname{am}u$ — эллиптическая амплитуда Якоби, $E(\varphi, k)$ — неполный эллиптический интеграл второго рода, введено обозначение $E[\arcsin(\sqrt{2}/2k), k] \equiv E_1$ и учтено, что $\operatorname{sn}(F_1, k) = \cos(\arcsin \sqrt{2}/2k) = (1 - 1/2k^2)^{1/2}$.

Уравнения (13) и (14) описывают в параметрическом виде ($0 \leq t \leq 1$) форму сильно изогнутой консоли под действием статической ($p = 1$) и динамических ($p = 3, 5, \dots$) нагрузок. Модуль k изменяется в пределах $1/2 \leq k^2 \leq 1$, задает общую кривизну консоли и определяется действующей силой P . При этом для каждого порога зависимость $k^2(P/P_c)$ определяется своим уравнением (8) при соответствующем $p = 2m - 1$.

Форма стержня при динамической нагрузке перестает быть монотонной кривой. Запишем характеризующие ее производные:

$$dy/dx = (1 - 2d^2)/2ksd, \quad d^2y/dx^2 = (pK - F_1)c/4Lk^2s^3d^3. \quad (15)$$

Здесь использованы обозначения $s = \operatorname{sn}u$, $d = \operatorname{dn}u$, $c = \operatorname{cn}u$. Точки максимума и минимума определяются уравнением $\operatorname{dn}u = \sqrt{2}/2$, точки перегиба — условием $\operatorname{sn}u = 0$. Здесь учтено, что $pK - F_1 > 0$ всегда, кроме статического, нулевого порога при $p = 1$ и $P = 0$; величина

F_1 изменяется в пределах $K(\sqrt{2}/2) \geq F_1 \geq F(\pi/4, 1)$, т. е. $1.85 \geq F_1 \geq 0.88$. Число точек перегиба зависит от номера моды p . При $p = 1$ есть одна точка перегиба при $t = 1$, что совпадает с широко используемыми приближенными решениями в виде полиномов. При $p = 3$ есть две точки перегиба, которые при $1/2 \leq k^2 \leq 1$ лежат в пределах $0 \leq t_1 \leq 1/3, t_2 = 1$. При $p = 5$ есть три точки перегиба: $0 \leq t_1 \leq 1/5, 1/2 \leq t_2 \leq 3/5, t_3 = 1$. Координаты свободного конца консоли равны (при $t = 1$):

$$x/L = 2k(1 - 1/2k^2)^{1/2}/(pK - F_1), \quad (16)$$

$$y/L = 1 - 2(pE - E_1)/(pK - F_1), \quad (17)$$

где $E = E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода. Для статической моды $p = 1$ при нагрузке $P \rightarrow 0$ модуль $k^2 \rightarrow 1/2$, неполные интегралы $E(\varphi, k) \rightarrow E(k), F(\varphi, k) \rightarrow K(k)$. Используя полученные в [3] разложения этих неполных интегралов при $k^2 \approx 1/2$, находим координаты свободного конца $y/L \approx 2k^2 - 1, x/L \approx (2 - 2k^2)^{1/2}$ и при $k^2 = 1/2$ координаты $y/L = 0, x/L = 1$.

Формы изогнутой консоли для двух мод — статической ($p=1$) и динамической ($p=3$) — показаны на рис. 2 для нескольких последовательно увеличивающихся значений приложенной силы. Модуль k^2 для обеих мод принимает одинаковые значения: кривые 1 при $k^2 = 0.5$; 2 — $k^2 = 0.6$; 3 — $k^2 = 0.85$; 4 — $k^2 = 1 - 10^{-5}$. Величина нагрузки для каждой моды определяется по уравнению (8) при $m = 1$ для статической и $m = 2$ для динамической моды (например, статическая кривая 1 при $P = 0$, динамическая кривая 1 при $P = 5.6P_c$).

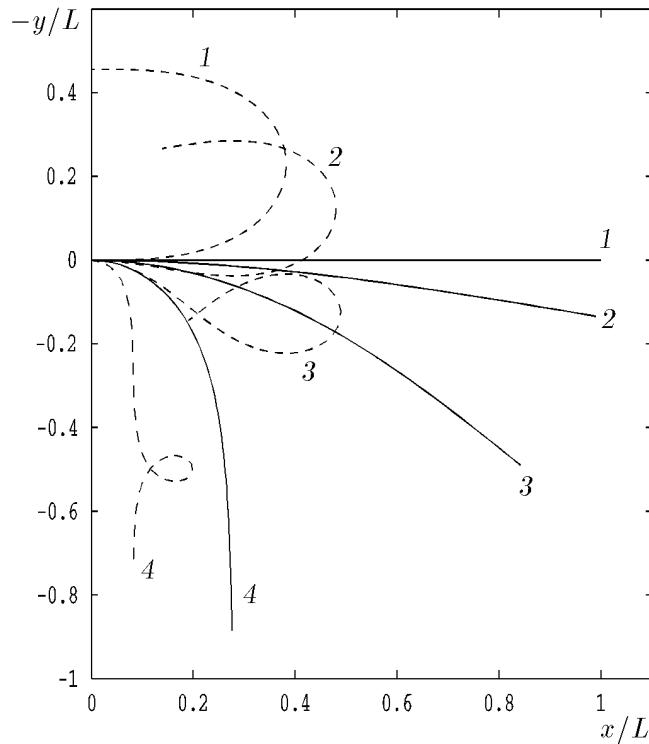


Рис. 2. Формы изогнутой консоли для статической ($p = 1$, сплошные линии) и динамической ($p = 3$, пунктир) мод при различных значениях нагрузки.

Для динамических мод ($p = 3, 5, \dots$) координаты свободного конца ($t = 1$)

$$x/L = 2k(1 - 1/2k^2)^{1/2}/(p - 1)K, \quad y/L = 1 - 2E/K, \quad (18)$$

а на порогах, при $k^2 = 1/2$, имеем

$$x/L = 0, \quad y/L \approx -0.46 \quad \text{при} \quad t = 1 \quad (19)$$

независимо от номера моды.

3. Обсуждение результатов

Полученный результат для динамических мод имеет парадоксальный характер: под действием импульсной нагрузки со временем нарастания меньшим, чем время релаксации системы, стержень (консоль) отгибается навстречу действующей силе. Физическое объяснение такого метастабильного состояния авторам неизвестно. Отметим только несколько примеров, в которых были получены результаты аналогичного характера.

М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат описывают [11] следующий, по их выражению, парадоксальный эксперимент. В боковой поверхности наполненного водой толстостенного бака имеется круглое отверстие, затянутое тонкой мембраной из металла; в центре бака производят взрывы; после взрыва прогнутая наружу мембрана заменяется. При увеличении заряда прогиб мембраны увеличивался до некоторой величины, а при дальнейшем увеличении заряда мембрана оказывалась прогнутой навстречу взрыву. Теоретического объяснения этого явления, насколько известно авторам, нет.

В работе [3] о перемагничивании магнитной системы в слое поперек анизотропии аналогичный расчет показал, что намагниченность в слое после динамического порога разворачивается от равновесного положения против поля по всей толщине слоя. Здесь необходимо проведение эксперимента по импульсному перемагничиванию со временем нарастания импульса порядка единиц наносекунд. Отметим, что магнитные системы представляются удобным модельным объектом исследований динамической потери устойчивости прежде всего в связи с их доступностью для широкого эксперимента.

Возможность появления описанных здесь сильных изгибов консолей, встречных к направлению сильного удара, может быть потенциально весьма опасной в условиях катастроф (землетрясений, ураганов, взрывов), так как строительные конструкции могут при этом работать на изгиб в направлении, противоположном расчетному. “Верх” и “низ” консолей или балок могут поменяться местами, несимметрично заложенная арматура в таких условиях не будет работать, что может привести к существенному увеличению числа разломов и более интенсивным разрушениям.

Авторы искренне благодарны К. С. Александрову, Р. Г. Хлебопросу, С. Г. Овчинникову, Р. С. Исхакову и В. Г. Суховольскому за внимание и обсуждение работы.

Список литературы

- [1] ЛАВРЕНТЬЕВ М. А., ИШЛИНСКИЙ А. Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем. *Докл. АН СССР*, **64**, №6, 1949, 779–782.
- [2] ЗАХАРОВ Ю. В. Статическая и динамическая потеря устойчивости ферромагнитного слоя при перемагничивании. *Докл. АН*, **344**, №3, 1995, 328–332.

- [3] ЗАХАРОВ Ю. В. Статическая и динамическая потеря устойчивости ферромагнитного слоя при перемагничивании. Пороговые поля и частоты магнитного резонанса. *Препр. №758Ф, Ин-т физики СО РАН, Ин-т биофизики СО РАН*, Красноярск, 1995.
- [4] ZAKHAROV YU. V., IGNATCHENKO V. A. Magnetic resonance in films on antiferromagnetic substrate. *Czech. J. Phys.*, **V21**, No. 4–5, 1971, 482–485.
- [5] ANARONI A., FREI E. H., SHTRIKMAN S. Theoretical approach to the asymmetrical magnetization curve. *J. Appl. Phys.*, **30**, No. 12, 1959, 1956–1961.
- [6] GOTO E., HAYASHI N., MIYASHITA T., NAKAGAWA K. Magnetization and switching characteristics of composite thin magnetic films. *Ibid.*, **36**, No. 9, 1965, 2951–2958.
- [7] КОЛЛАТЦ Л. *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями)*. Физматгиз, М., 1968.
- [8] HEINZERLING H. Mathematische Behandlung einiger grundlegender Fragen des Knicksproblems des geraden Stabes: *Diss.*, 1938.
- [9] ЛАНДАУ Л. Д., ЛИФШИЦ Е. М. *Теория упругости*. Наука, М., 1987.
- [10] ПОПОВ Е. П. *Теория и расчет гибких упругих стержней*. Наука, М., 1986.
- [11] ЛАВРЕНТЬЕВ М. А., ШАБАТ Б. В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели*. Наука, М., 1977.

Поступила в редакцию 15 декабря 1997 г.