

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОБТЕКАНИИ ВИХРЯ ПОТОКОМ ДВУХСЛОЙНОЙ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ*

С. И. ГОРЛОВ

Омский филиал Института математики

им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия

e-mail: gorlov@iitam.omsk.net.ru

The nonlinear boundary value problem about a flow around a vortex of the given intensity installed in the stream of a two-layer heavy fluid is considered. A vortex sheet simulates the interface of fluids. A system of nonlinear integral equations expresses kinematic and dynamic conditions and contains as unknowns the intensity of the vortex sheet and the function describing the form of the interface. The obtained equations were solved by the Newton method and high order panel method. The system of waves in the far field behind the vortex is taken into account. This fact is the key feature of the developed method. The problem about the vortex movement under free surface is considered, or various values of vortex intensity and Froude number the numerical experiment on the evaluation of the nonlinearity influence on the characteristics of the considered currents has been conducted. The results of allowing for the limiting values of the vortex intensity, for which there is a solution of the steady problem, wave drag and form of a free surface are presented.

Нелинейная задача о движении вихря вблизи границы раздела двух жидких сред привлекает внимание многих исследователей. Этот интерес обусловлен возникновением различных режимов обтекания, в том числе и безволновых, на возможность существования которых впервые указано в работе E. O. Tuck [15]. Первые аналитические исследования, связанные с изучением вопросов существования и единственности решения, проводились А. И. Некрасовым [7] для задачи о движении вихря под свободной поверхностью бесконечно глубокой жидкости, а для ограниченной снизу Н. Н. Моисеевым, А. М. Тер-Крикоровым и И. Г. Филипповым (см. обзор в [8]). К настоящему времени значительные успехи в данной области достигнуты с использованием различных численных методов. N. Salvesen и С. Kerczek [13] при помощи конечных разностей и итерационной процедуры получили численное решение нелинейной задачи об обтекании вихря под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины. Результаты сравниваются с данными, полученными на основе теории возмущений третьего порядка. Для случаев отрицательных циркуляций получены волны с высотой 85 % от максимально возможной для поверхностных волн. Для вихрей с положительной циркуляцией существует качественное различие с результатами, полученными по теории возмущений. В работе J. L. Hess [9] дано описание метода решения

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96-01-00093.

© С. И. Горлов, 2000.

нелинейной задачи о движении вихря под свободной поверхностью бесконечно глубокой жидкости, основанного на распределении особенностей по свободной поверхности. Интенсивности особенностей и форма свободной поверхности вычисляются при помощи итерационной процедуры и метода панелей. Метод нанесения особенностей по свободной поверхности для решения этой же задачи использован Э. Л. Амроминым, Н. А. Вальдманом и А. Н. Ивановым [1]. Исходная краевая задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, решение которых проводится с применением формул обращения. Система волн, возникающих в дальнем поле, заменяется вихрем. На основании проведенных расчетов сделан вывод о существенном влиянии нелинейных эффектов только в определенном диапазоне чисел Фруда и значений интенсивности вихря. G. Jensen, Z.-X. Mi, H. Söding [11] для решения этой же задачи предложили метод распределения источников по прямой, расположенной над свободной поверхностью. Соответствующие граничные условия линейризуются в предположении, что разность между точными и приближенными значениями потенциала скорости и функции, описывающей свободную поверхность, мала. Подобная линейризация приводит к новой схеме для решения нелинейных волновых задач. На основе теоретических результатов и данных численного эксперимента разработана новая методика выполнения условий излучения. Для ряда значений интенсивности вихря представлены результаты по расчету волновых профилей, генерируемых вихрем. В работе S. J. Liao [12] дано описание численного решения задачи определения нелинейных установившихся волн, базирующееся на особом итерационном методе, в основе которого лежит параметрическое отображение искомых функций. Главное достоинство предложенного метода — нечувствительность к решению, задаваемому на нулевом шаге итераций. Обсуждается связь между разработанным методом и различными итерационными процедурами, предложенными другими авторами. В качестве примера рассмотрена задача обтекания погруженного вихря. Наиболее значительные успехи в решении стационарной нелинейной задачи о движении вихря под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины были достигнуты Д. В. Маклаковым [4–6]. Им предложен численно-аналитический метод расчета докритических режимов обтекания вихря. Основное отличие предложенного метода от предыдущих состоит в том, что решение строится с учетом волн, возникающих в дальнем поле. Метод способен производить расчет волн любой длины и крутизны. Введено понятие предельного режима обтекания как режима с максимально возможной интенсивностью вихря, при которой существует стационарное решение. Выявлено три типа предельных режимов задачи обтекания. Приведен анализ чисел Фруда, при которых реализуется выход на тот или иной предельный режим.

Как видно из представленного обзора, нелинейная задача о движении вихря под границей раздела двух сред в наиболее общей постановке практически не исследована. В настоящей работе эта задача решается новым методом, основным достоинством которого является учет бесконечной волновой системы, возникающей в дальнем поле за вихрем. Несомненный интерес также представляет определение области параметров задачи, для которых существует ее решение.

1. Постановка задачи

Рассмотрим две полубесконечные области D_1, D_2 , разделенные границей L и заполненные тяжелой однородной несжимаемой жидкостью с плотностями ρ_1, ρ_2 . Движение жидкости в каждой области полагаем плоскопараллельным, стационарным и потенциальным в си-

стеме координат Oxy , связанной с невозмущенной границей раздела. В области D_1 , расположенной под границей раздела, в точке $(0, -h)$ находится вихрь заданной интенсивности Γ . Предположим, что в бесконечном удалении перед вихрем возмущенное движение затухает и жидкость движется с постоянной скоростью V_∞ . При сделанных предположениях движение жидкости в каждой области D_k описывается комплексной скоростью $\bar{V}_k(z)$, являющейся аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$. Сформулируем краевую задачу для $\bar{V}_k(z)$, $z \in D_k$, $k = 1, 2$.

На границе раздела L , определяемой уравнением $y = f(x)$, должны быть выполнены кинематическое и динамическое условия

$$\operatorname{Im}(\bar{V}_1(z)(1 + i f'(x))) = \operatorname{Im}(\bar{V}_2(z)(1 + i f'(x))) = 0, \quad z = x + i f(x), \quad (1)$$

$$p_1(x, y) = p_2(x, y), \quad y = f(x), \quad |x| < \infty, \quad (2)$$

где p_k — гидродинамическое давление в области D_k ($k = 1, 2$). В бесконечно удаленных точках D_1, D_2

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{V}_k(z) = V_\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0. \quad (3)$$

Гидродинамическое давление связано со скоростью жидкости интегралом Бернулли (g — ускорение силы тяжести)

$$p_k(z) - p_{k\infty} = -\frac{1}{2} \rho_k (|\bar{V}_k(z)|^2 - V_\infty^2) - \rho_k g y, \quad z \in D_k, (k = 1, 2). \quad (4)$$

Динамическое условие (2) с учетом (4) можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{2g(\rho_1 - \rho_2)} \left(\rho_2 \left(|\bar{V}_2^+(z)|^2 - V_\infty^2 \right) - \rho_1 \left(|\bar{V}_1^-(z)|^2 - V_\infty^2 \right) \right). \quad (5)$$

Здесь $\bar{V}_1^-(z), \bar{V}_2^+(z)$ — предельные значения комплексных скоростей при подходе к L .

2. Вывод системы нелинейных интегральных уравнений

Краевая задача (1), (3) и (5) для аналитических функций $\bar{V}_k(z)$ в областях D_k ($k = 1, 2$) нелинейна. Сведем эту задачу к решению двух нелинейных уравнений относительно двух вещественных функций одной переменной. Распределим вдоль L вихревой слой с интенсивностью $\gamma(x)$, $-\infty < x < +\infty$. Предположим, что L — гладкая кривая, $\gamma(x)$ удовлетворяет условию Гельдера и $\gamma(-\infty) = 0$. Рассмотрим функцию

$$\bar{V}(z) = V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z + ih} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(\xi)}{z - \zeta(\xi)} \frac{1 - i f'(\xi)}{\sqrt{1 + (f'(\xi))^2}} d\xi, \quad \zeta(\xi) = \xi + i f(\xi), \quad (6)$$

которая является аналитической во всей плоскости z вне L и точки расположения вихря и описывает некоторое течение жидкости. В бесконечно удаленной точке

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{V}(z) = V_\infty. \quad (7)$$

Предельные значения функции $\bar{V}(z)$ при подходе к $z = x + i f(x)$

$$\bar{V}^+(z) = \bar{V}_0(z) - \frac{1}{2}\gamma(x)\frac{1 - i f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}, \quad \bar{V}^-(z) = \bar{V}_0(z) + \frac{1}{2}\gamma(x)\frac{1 - i f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}, \quad (8)$$

где $\bar{V}_0(z)$ определяется (6) для $z = x + i f(x)$. Интенсивность вихревого слоя на L :

$$\gamma(x) = \left(\bar{V}^-(z) - \bar{V}^+(z) \right) \frac{1 - i f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} = V_s^-(x) - V_s^+(x). \quad (9)$$

Решение краевой задачи (1), (3) и (5) ищем в виде

$$\bar{V}_k(z) = \bar{V}(z), \quad z \in D_k, (k = 1, 2). \quad (10)$$

Из (6), (7), (10) следует, что $\bar{V}_k(z)$ являются аналитическими функциями в D_k ($k = 1, 2$), удовлетворяющими условию (3) затухания возмущенных скоростей в бесконечно удаленных точках. Осталось выполнить условия (1), (5). Кинематическое условие (1) с учетом (6), (8), (10) сводится к уравнению

$$\text{Im} \left(\bar{V}_0(z)(1 + i f'(x)) \right) = 0, \quad z = x + i f(x). \quad (11)$$

Перейдем к рассмотрению (5). В соответствии с (8)–(11)

$$\begin{aligned} |\bar{V}_1^-(z)|^2 &= \bar{V}^-(z)V^-(z) = \left(V_{0s}(z) + \frac{1}{2}\gamma(x) \right)^2, \\ |\bar{V}_2^+(z)|^2 &= \bar{V}^+(z)V^+(z) = \left(V_{0s}(z) - \frac{1}{2}\gamma(x) \right)^2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$V_{0s}(z) = \text{Re} \left(\bar{V}_0(z) \frac{1 + i f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right), \quad z = x + i f(x).$$

Подставляя (12) в (5), получим

$$f(x) = \frac{1}{2g} \left(V_\infty^2 - V_{0s}^2(z) - \frac{1}{\rho_*}\gamma(x)V_{0s}(z) - \frac{1}{4}\gamma^2(x) \right), \quad z = x + i f(x), \quad \rho_* = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (13)$$

Выражения (11), (13) представляют собой два нелинейных уравнения относительно функций $\gamma(x)$, $f(x)$, к определению которых свелась краевая задача (1), (3) и (5).

Волновое сопротивление R_x и подъемная сила R_y определяются формулами

$$R_y + i R_x = -\rho_1 \Gamma \left(V_\infty - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma(\xi)}{ih + \zeta(\xi)} \frac{1 - i f'(\xi)}{\sqrt{1 + (f'(\xi))^2}} d\xi \right). \quad (14)$$

3. Метод решения системы интегральных уравнений

Следуя методу итераций Ньютона применительно к нелинейным функциональным уравнениям [3], представим систему (11), (13) в виде

$$G^{(n)} + G_\gamma^{(n)} \Delta\gamma^{(n)} + G_f^{(n)} \Delta f^{(n)} + G_{f'}^{(n)} \Delta f'^{(n)} = 0, \quad (15)$$

$$\Delta f^{(n)} = F^{(n)} + F_\gamma^{(n)} \Delta\gamma^{(n)} + F_f^{(n)} \Delta f^{(n)} + F_{f'}^{(n)} \Delta f'^{(n)}, \quad (16)$$

$$\Delta\gamma^{(n)} = \gamma^{(n+1)} - \gamma^{(n)}, \Delta f^{(n)} = f^{(n+1)} - f^{(n)}, \Delta f'^{(n)} = f'^{(n+1)} - f'^{(n)}, n = 0, 1, \dots,$$

$$\gamma^{(0)}(x) = 0, f^{(0)}(x) = 0, f'^{(0)}(x) = 0, -\infty < x < +\infty, \quad (17)$$

где $G(\gamma, f, f')$ и $F(\gamma, f, f')$ — соответственно левая часть (11) и правая часть (13), $G^{(n)}$, $F^{(n)}$, $G_\gamma^{(n)}$, $F_\gamma^{(n)}$, $G_f^{(n)}$, $F_f^{(n)}$, $G_{f'}^{(n)}$, $F_{f'}^{(n)}$ — значения функционалов и их частных производных по γ, f, f' при $\gamma = \gamma^{(n)}$, $f = f^{(n)}$, $f' = f'^{(n)}$.

Будем рассматривать контур $L : (x, f(x))$, $-\infty < x < +\infty$ на конечном промежутке $[x_a, x_b]$, $x_a < 0$, $|x_a| \gg h$, $x_b \gg h$. Функции $f(x)$ и $\gamma(x)$ при $x \geq x_b$ будем предполагать периодическими, а при $x \leq x_a$ $\gamma(x) = f(x) = 0$. Тогда комплексная скорость $\bar{V}(z)$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{V}(z) = & V_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z + ih} + \frac{1}{2\pi i} \int_{x_a}^{x_b} \frac{\gamma(\xi)}{z - \zeta(\xi)} \frac{1 - i f'(\xi)}{\sqrt{1 + (f'(\xi))^2}} d\xi + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{x_b}^{x_b + \lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\gamma(\xi)}{z - (\xi + k\lambda + i f(\xi))} \frac{1 - i f'(\xi)}{\sqrt{1 + (f'(\xi))^2}} d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь последнее слагаемое обусловлено периодическим продолжением функции $\gamma(x)$ и $f(x)$ при $x \geq x_b$, λ — длина волны в бесконечном удалении за вихрем.

Систему линейных интегродифференциальных уравнений (15), (16) будем решать методом коллокаций. Для этого введем разбиение отрезка $[x_a, x_b]$ на интервалы $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = 1, \dots, N$), $x_1 = x_a$, $x_{N+1} = x_b$. Выполнения уравнений (15) и (16) будем требовать в точках $x_{0k} \in [x_k, x_{k+1}]$. В соответствии с панельным методом высокого порядка [10] будем аппроксимировать на каждом интервале границу раздела сред параболой, а интенсивность вихревого слоя $\gamma(x)$ линейной функцией ($\gamma(x_a) = f(x_a) = 0$). Значение производной $f'(x_{0k})$ ($k = 1, \dots, N$) выразим через значения $f(x)$ в соседних узлах при помощи формул численного дифференцирования четвертого порядка. Таким образом, система интегродифференциальных уравнений (15) и (16) сведена к системе линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta\gamma^{(n)}(x_k)$ и $\Delta f^{(n)}(x_k)$ ($k = 2, \dots, N + 1$).

Алгоритм решения задачи следующий. Выполняется итерационный процесс Ньютона до получения некоторого решения. Начальное приближение определяется из (17). При этом на каждом шаге итераций с использованием метода верхней релаксации решается система линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta\gamma^{(n)}(x_k)$ и $\Delta f^{(n)}(x_k)$ ($k = 2, \dots, N + 1$). Последнее слагаемое в (18) опускается. Далее выполняется второй итерационный процесс, связанный с уточнением полученного решения. Для этого в качестве нулевого приближения берется решение задачи, полученное на предыдущем шаге итераций. Комплексная скорость $\bar{V}(z)$ вычисляется по формуле (18). В качестве λ берется длина волны, полученная из предыдущего решения. Дополнительный итерационный процесс продолжается до достижения необходимой точности.

4. Численный эксперимент

На рис. 1–3 и в табл. 1–4 приведены результаты численного эксперимента по решению задачи об установившемся обтекании вихря потоком весомой жидкости со свободной поверхностью ($\rho_* = 1$). Безразмерными параметрами задачи являются число Фруда $Fr =$

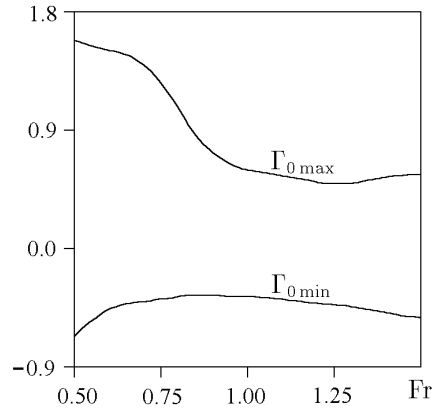


Рис. 1. Предельные значения циркуляции вихря, при которых существует решение задачи.

V_∞/\sqrt{gh} и интенсивность вихря $\Gamma_0 = \Gamma/V_\infty h$. Расчетная область рассматривалась на отрезке $x_a = -2.5\lambda_0$, $x_b = 4.5\lambda_0$ ($\lambda_0 = 2\pi V_\infty^2/g$ — длина волны, полученная по линейной теории). Число разбиений выбиралось равным 210.

Расчет коэффициента волнового сопротивления $C_x = 2R_x/\rho_1 V_\infty^2 h$ проводился по формуле (14) и с использованием теоремы импульсов [16]:

$$R_x = \frac{1}{2}\rho_1 \int_{-\infty}^{f(\xi_*)} \left((\text{Im } \bar{V}(\xi_* + i\eta))^2 - (\text{Re } \bar{V}(\xi_* + i\eta))^2 \right) d\eta + \frac{1}{2}g\rho_1 f^2(\xi_*),$$

где $\xi_* \gg h$. Расчеты проводились в широком диапазоне изменения чисел Фруда и интенсивностей вихря. Полученные результаты по этим двум методикам отличаются друг от друга на величину порядка 10^{-4} , что свидетельствует о правильности определения волнового сопротивления.

В таблицах 1, 2 проведено сравнение результатов по решению задачи об обтекании вихря заданной интенсивности потоком весомой жидкости со свободной поверхностью при $Fr = 0.8313$, полученных S. J. Liao [12] и автором. Приведены расчеты характеристик течений в ближнем и дальнем поле, волнового сопротивления для различных значений Γ_0 . Как видно из представленного сравнения, расчеты, выполненные с использованием двух различных методов, хорошо согласуются между собой.

Уровень возмущений свободной поверхности при фиксированном числе Фруда определяется величиной Γ_0 . При этом высота свободной поверхности не может быть больше предельной $y_{\text{lim}}/h = Fr^2/2$, что накладывает ограничения на Γ_0 . Зависимость предельных значений циркуляций вихря $\Gamma_{0\text{min}}$ и $\Gamma_{0\text{max}}$ от числа Фруда представлена на рис. 1. Для сравнения в табл. 3 приведены результаты расчетов $\Gamma_{0\text{min}}$ и $\Gamma_{0\text{max}}$, полученные разными авторами при $Fr = 0.8313$. Расчеты выполнены S. J. Liao [8] и G. Jensen, Z.-X. Mi, H. Söding [7] для бесконечно глубокой жидкости, а N. Salvesen, C. Kerczek [4] и Д. В. Маклаковым [9] —

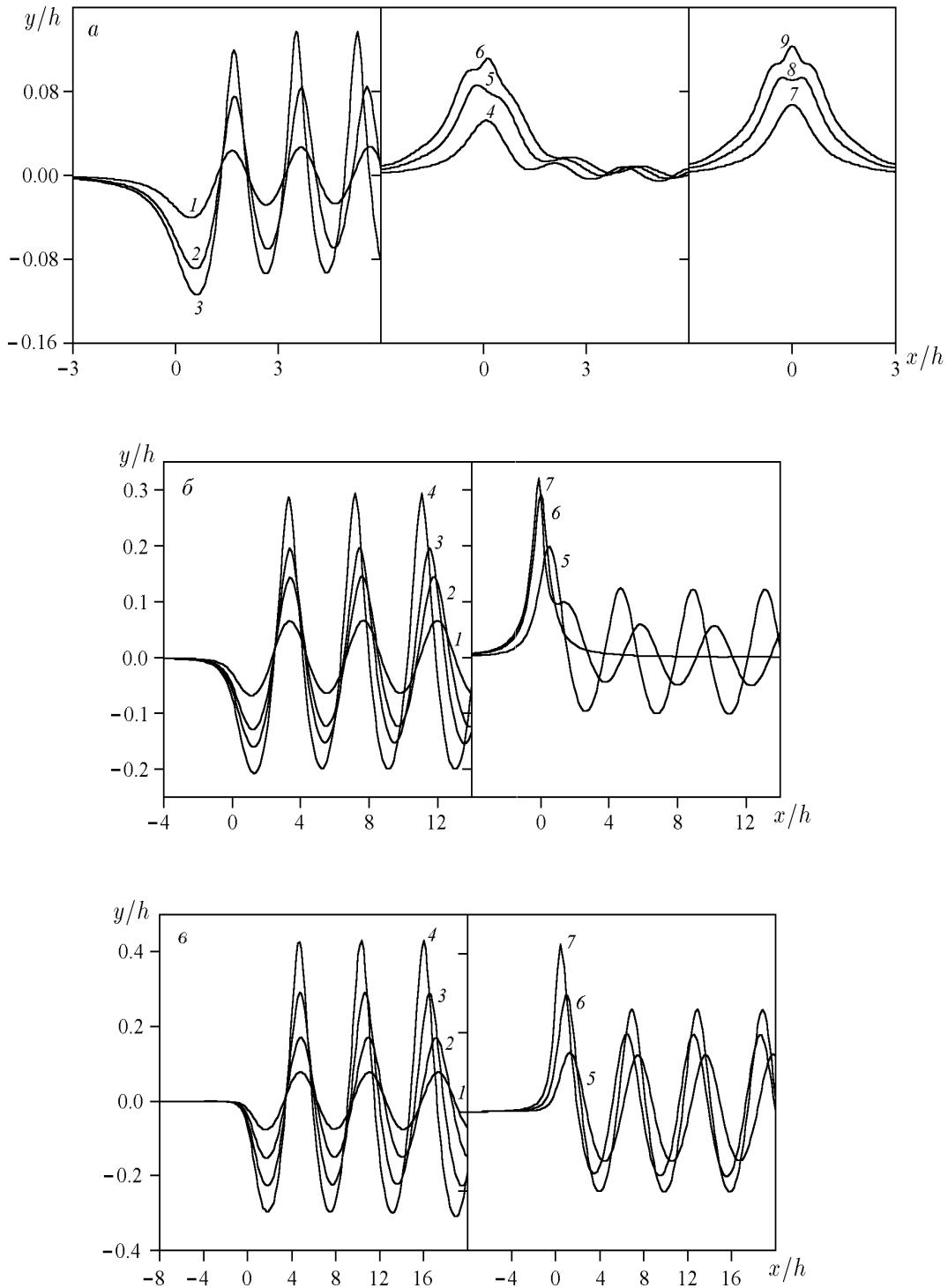


Рис. 2. Форма свободной поверхности при $Fr = 0.5657$, $\Gamma_0 = -0.2, -0.4, -0.5131, 0.375, 0.8525, 1.255, 0.5385, 1.0234, 1.4758$ (а, кривые 1–9), $Fr = 0.8313$, $\Gamma_0 = -0.1256, -0.2373, -0.2932, -0.3521, 0.4467, 0.8489, 0.9402$ (б, кривые 1–7), $Fr = 1$, $\Gamma_0 = -0.1, -0.2, -0.3, -0.3668, 0.2, 0.4, 0.6843$ (в, кривые 1–7).

для ограниченной снизу. Различия в результатах расчета предельных значений циркуляции вихрей для бесконечно глубокой и ограниченной снизу жидкостей объясняется значительным влиянием дна на характер волновых течений, рассчитанных в предполо-

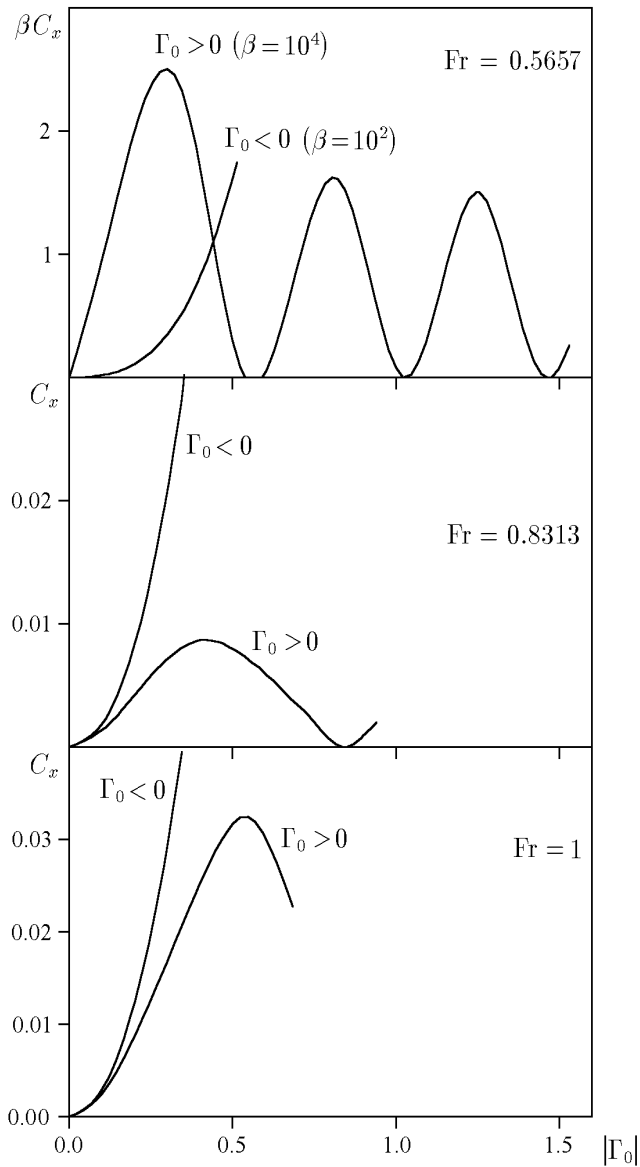


Рис. 3. Волновое сопротивление вихря.

жении нелинейной теории. Характеристики предельных нелинейных волн в дальнем поле приведены в табл. 4. Аналитические исследования, приведенные в таблице, проводились G. G. Stokes, J. H. Michell, J. W. Thomas, L. W. Schwartz (см. обзор в [12]), эксперимент выполнен N. Salvesen [14].

Результаты по расчету формы свободной поверхности для различных значений циркуляции вихря показаны на рис. 2. В отличие от результатов, полученных по линейной теории [2], поведение волновых профилей оказалось различным для вихрей с положительной и отрицательной циркуляцией. Для отрицательных циркуляций максимального значения свободная поверхность достигает на гребне волн в дальнем поле, для положительных — непосредственно над вихрем. Поведение свободной поверхности для отрицательных циркуляций вихря имеет ярко выраженный нелинейный характер: острые гребни волн при Γ_0 , близких к предельным. С ростом интенсивности вихря в данном случае наблюдается рост как амплитуды волн, так и волнового сопротивления (см. рис. 3). Для положитель-

Т а б л и ц а 1

Максимум $y_{1 \max}/h$ и минимум $y_{1 \min}/h$, максимальный угол наклона β_1 к оси x первого гребня волн, генерируемых вихрем, при $Fr = 0.8313$

Γ_0	S. J. Liao [12]			Автор		
	$y_{1 \max}/h$	$y_{1 \min}/h$	β_1 , град	$y_{1 \max}/h$	$y_{1 \min}/h$	β_1 , град
0.9402	—	—	—	0.3216	−0.0437	29.79
0.9061	0.3242	−0.0326	29.7	0.3056	−0.0233	27.81
0.8934	0.3202	−0.0255	25.8	0.3008	−0.0156	25.18
0.8489	—	—	—	0.2931	0.0000	22.81
0.8376	0.3048	0.0000	21.7	0.2906	−0.0025	20.97
0.6981	0.2733	−0.0355	17.5	0.2649	−0.0402	16.85
0.6562	0.2631	−0.0666	16.6	0.2578	−0.0543	15.98
0.5166	0.2235	−0.0855	14.3	0.2227	−0.0886	14.13
0.4468	0.2002	−0.0931	13.1	0.1992	−0.0963	13.02
0.3769	0.1747	−0.0942	11.7	0.1733	−0.0969	11.13
0.2932	0.1473	−0.0875	9.8	0.1397	−0.0891	9.85
0.2653	0.1286	−0.0835	8.9	0.1281	−0.0848	8.93
0.2373	0.1162	−0.0784	8.1	0.1158	−0.0793	8.41
0.1955	0.0968	−0.0695	6.9	0.0965	−0.0697	6.75
0.1606	0.0804	−0.0604	5.8	0.0803	−0.0601	5.83
0.1256	0.0633	−0.0497	4.6	0.0635	−0.0493	4.67
−0.1256	0.0671	−0.0664	5.5	0.0667	−0.0670	5.49
−0.1606	0.0891	−0.0855	7.2	0.0886	−0.0862	7.12
−0.1955	0.1131	−0.1048	9.2	0.1125	−0.1056	9.31
−0.2373	0.1448	−0.1284	11.7	0.1443	−0.1134	10.66
−0.2653	0.1686	−0.1444	13.7	0.1683	−0.1446	12.85
−0.3071	0.1957	−0.1608	16.1	0.2112	−0.1676	16.78
−0.3211	0.2111	−0.1693	17.4	0.2283	−0.1747	17.15
−0.3351	0.2286	−0.1775	19.17	0.2469	−0.1839	20.01
−0.3421	0.2646	−0.1904	22.7	0.2599	−0.1873	23.07
−0.3490	0.2868	−0.1951	25.1	0.2761	−0.1897	25.21
−0.3521	—	—	—	0.2881	−0.2075	25.52

ных циркуляций вихрей возможны режимы обтекания без образования волн в дальнем поле, волновое сопротивление при этом отсутствует. При $Fr = 0.8313$ (см. рис. 2, б) безволновой режим обтекания наблюдается при $\Gamma_0 = 0.8489$ (у S. J. Liao [8] при $\Gamma_0 = 0.8376$). При $Fr = 0.5657$ (см. рис. 2, а) безволновой режим обтекания наблюдается для нескольких значений $\Gamma_0 = 0.5385, 1.0234, 1.4758$. Состояния, промежуточные к безволновым, представлены на рис. 2, а для $\Gamma_0 = 0.375, 0.8525, 1.255$. Обращает на себя внимание наличие нескольких “горбов”, расположенных непосредственно над вихрем. При $Fr = 1$ значение Γ_0 не удастся довести до безволнового режима обтекания (см. рис. 2, в), но участок убывания волнового сопротивления для этих параметров также существует. Следует отметить, что для $Fr = 0.5657, 0.8313$ в работе Д. В. Маклакова [4] приведены расчеты волнового сопротивления вихря и профилей генерируемых волн в случае движения под свободной поверхностью ограниченной снизу жидкости. Для этих параметров также обнаружены симметричные безволновые формы свободной поверхности. Для неограниченной снизу жидкости такие режимы обтекания соответствуют совершенно другим параметрам, что

Т а б л и ц а 2

Максимум $y_{2\max}/h$ и минимум $y_{2\min}/h$ профилей волн, генерируемых вихрем в дальнем поле, их длина λ/h и максимальный угол наклона β_2 к оси x , волновое сопротивление вихря x при $Fr = 0.8313$

Γ_0	$y_{2\max}/h$	$y_{2\min}/h$	β_2 , град	λ/h	C_x
S. J. Liao [12]					
0.9061	0.0442	-0.0382	3.6	4.364	0.001206
0.8934	0.0362	-0.0311	2.8	4.377	0.000754
0.8376	0.0009	-0.0004	0.5	—	0.000023
0.6981	0.0595	-0.0482	4.6	4.260	0.001978
0.6561	0.0769	-0.0618	5.9	4.248	0.003267
0.5165	0.1162	-0.0915	9.0	4.195	0.007290
-0.3211	0.2309	-0.1704	19.2	4.015	0.024508
-0.3350	0.2542	-0.1760	21.5	3.929	0.026887
-0.3420	0.2680	-0.1833	23.0	3.920	0.028401
-0.3490	0.2924	-0.1884	25.8	3.860	0.029671
Автор					
0.9402	0.0566	-0.0491	5.76	4.361	0.001977
0.9061	0.0338	-0.0293	3.49	4.372	0.001121
0.8934	0.0233	-0.0211	2.85	4.375	0.000769
0.8489	0.0000	0.0000	0.08	—	0.000001
0.8376	0.0502	-0.0436	0.41	4.361	0.000022
0.6981	0.0605	-0.0525	4.66	4.277	0.003425
0.6561	0.0754	-0.0649	6.03	4.257	0.004568
0.5165	0.1136	-0.0947	9.24	4.183	0.007779
-0.3211	0.2321	-0.1672	18.83	4.015	0.024106
-0.3350	0.2510	-0.1768	20.54	3.929	0.026697
-0.3420	0.2652	-0.1798	21.17	3.920	0.027939
-0.3490	0.2861	-0.1866	25.24	3.860	0.029671
-0.3521	0.2938	-0.1983	26.01	3.881	0.030157

Т а б л и ц а 3

Предельные значения циркуляции вихря $\Gamma_{0\min}$ и $\Gamma_{0\max}$, при которых возможен стационарный режим обтекания, полученные разными авторами при $Fr = 0.8313$

Источник	$\Gamma_{0\min}$	$\Gamma_{0\max}$
Автор	-0.3521	0.9402
S. J. Liao [12]	-0.3490	0.9061
G. Jensen, Z. X. Mi и H. Söding [11]	-0.2973	0.8209
N. Salvesen и C. Kerczek [13]	-0.3769	0.4467
Д. В. Маклаков [4]	-0.3749	0.7072

Т а б л и ц а 4

Характеристики волн в дальнем поле: высота δ (в процентах от предельной), угол наклона в вершине β_2 , кривизна при $\Gamma_0 = \Gamma_{0\min}$ и $Fr = 0.8313$

Источник	δ , %	β_2 , град.	Кривизна
Автор	86.3	26.01	0.1268
S. J. Liao [12]	85.0	25.80	0.1245
N. Salvesen и C. Kerczek [13]	87.0	24.40	0.1200
Д. В. Маклаков [4]	87.9	—	0.1283
Эксперимент N. Salvesen [14]	82.0	25.00	0.1100
Аналитические исследования (обзор в [8])	100.0 %	30.00	0.141–0.145

свидетельствует о существенном влиянии дна. Этот факт подтверждают расчеты предельных значений циркуляций вихря $\Gamma_{0\min}$ и $\Gamma_{0\max}$, представленные на рис. 1, которые отличаются от результатов работы [9].

5. Заключение

Решение задачи о поступательном движении вихря под свободной поверхностью весомой жидкости в полной нелинейной постановке позволяет обнаружить новые картины течений. В частности, для некоторых параметров существуют безволновые режимы обтекания, при которых волновое сопротивление отсутствует. Для этих же параметров картина течения, полученная по линейной теории, совершенно другая. Этот факт свидетельствует о существенном влиянии нелинейных эффектов при решении данной задачи. Проведенные сравнения с результатами решения задачи о движении вихря под свободной поверхностью жидкости при наличии дна, полученными другими авторами, позволяют сделать вывод о значительном влиянии дна на характер соответствующих течений. В то же время существование многогорбовых волновых профилей, обнаруженных ранее, подтверждено в настоящей работе для случая движения вихря в бесконечно глубокой жидкости.

Автор выражает глубокую признательность Д. В. Маклакову за полезные замечания, высказанные при написании статьи.

Список литературы

- [1] Амромин Э. Л., Вальдман Н. А., Иванов А. Н. К нелинейной теории плоских волн на поверхности жидкости. *Асимптотические методы. Задачи механики*, Наука, Новосибирск, 1988, 169–176.
- [2] Горлов С. И. Линейная задача о движении вихреисточника вблизи границы раздела двух сред. *ПМТФ*, **38**, №2, 1997, 68–72.
- [3] Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*. Наука, М., 1977.

- [4] МАКЛАКОВ Д. В. Обтекание препятствия с образованием нелинейных волн на свободной поверхности. Предельные режимы. *Изв. РАН. МЖТ*, №2, 1995, 108–117.
- [5] МАКЛАКОВ Д. В. *Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами*. Янус-К, М., 1997.
- [6] МАКЛАКОВ Д. В. Предельные режимы докритического обтекания препятствия. *Вычислительные технологии*. Изд. Ин-та вычисл. технологий СО РАН, Новосибирск, **2**, №4, 1993, 55–70.
- [7] НЕКРАСОВ А. И. О точечном вихре под поверхностью тяжелой идеальной жидкости в плоскопараллельном потоке. *Собр. соч.*, **2**, Изд-во АН СССР, М., 1962, 351–370.
- [8] ФИЛИПОВ И. Г. О движении вихря под поверхностью жидкости. *ПММ*, **25**, №2, 1961, 242–247.
- [9] HESS J. L. Progress in the calculation of the nonlinear free-surface problems by surface-singularity techniques. *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Numer. Ship Hydrodyn.*, Berkeley, 1977, 278–284.
- [10] HESS J. L. Higher-order numerical solution of the integral equation for the two-dimensional Neumann problem. *Comput. Meth. Appl. Mech. and Engng.*, **2**, No. 1, 1973, 1–15.
- [11] JENSEN G., MI Z.-X., SÖDING H. Rankine source methods for numerical solutions of the steady wave resistance problem. *Proc. 16th Naval Hydrodyn. Symp.*, Berkeley, 1986, 575–582.
- [12] LIAO S. J. A general numerical method for solution of gravity wave problems. Pt 2: Steady non-linear gravity waves. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, **14**, No. 10, 1992, 1173–1191.
- [13] SALVESEN N., KERCZEK C. Comparison of numerical and perturbation solution of two-dimensional nonlinear water-wave problems. *J. Ship. Res.*, **20**, No. 3, 1976, 160–170.
- [14] SALVESEN N. Second-order wave theory for submerged two-dimensional bodies. *Proc. ONR 6th Naval Hydrodyn. Symp.*, Washington, 1966, 595–628.
- [15] TUCK E.O. Ship-hydrodynamic free-surface problems without waves. *J. Ship. Res.*, **35**, No. 4, 1991, 277–287.
- [16] WEHAUSEN J.V. The wave resistance of ships. *Adv. Appl. Mech.*, **13**, 1973, 93–245.

Поступила в редакцию 1 ноября 1998 г.,
в переработанном виде 15 декабря 1998 г.