ОБ ОДНОМ УСТОЙЧИВОМ МЕТОДЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С. А. Атанбаев
Казахский государственный университет им. Аль-Фараби
Алматы, Казахстан
e-mail: kainar@ittl.kz

A difference analogue of the quasidiversion method is considered with additional regularization for the solution of the inverse problem of thermal conductivity. The stability of the solution of the difference regularized problem has been proved, the stability estimate has been obtained and the selection method of the regularization parameter has been presented.

1. Постановка задачи

Первая краевая задача для уравнения теплопроводности ставится следующим образом.

Требуется найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t'} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + f(x, t'), \tag{1}$$

определенное в прямоугольнике $\Pi = \left\{0 \le t' \le T,\ 0 \le x \le 1\right\}$, удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(x, T) = u(x) \tag{2}$$

при $t' = T$ и граничным условиям

$$\varphi(0, t') = 0, \quad \varphi(1, t') = 0. \tag{3}$$

В общем случае краевые условия (3) могут быть неоднородными. Однако с помощью некоторого преобразования всегда можно получить однородные краевые условия вида (3).

Задача (1) – (3), называемая обратной задачей теплопроводности (ОЗТ), является классически некорректной: решение $\varphi(x, t')$ не зависит непрерывно от начального условия (2).

На практике вместо решения задачи (1) – (3) решают следующую прямую задачу для уравнения теплопроводности (ОЗТ):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t'} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + f(x, t'), \quad 0 \le t' \le T, \tag{4}$$

$$\varphi(x, 0) = \xi(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

$$\varphi(0, t') = 0, \quad \varphi(1, t') = 0, \tag{6}$$

которая является классически некорректной. Здесь $\xi(x)$ — неизвестная функция. Она определяется из условия

$$J(\psi) = \int_0^1 [\varphi(x, T; \xi(x) - u(x)]^2 dx \leq \epsilon^2, \qquad (7)$$

где ϵ — заданная точность. Выбрав функцию $\xi(x)$, удовлетворяющую условию (7), решают корректную задачу (4) – (6) и ее решение $\varphi(x, t'; \xi(x))$ принимают за приближенное решение исходной некорректной задачи (1) – (3). Такая постановка задачи исследована многими авторами. В частности, в работе [1] доказывается существование такой функции $\xi(x)$, которая доставляет минимум функционалу $J(\psi)$. С точки зрения вычислительной математики всевозможный выбор функции $\xi(x)$ и далее неоднократное решение корректной задачи (4) – (6) с целью проверки условия (7) не является конструктивным. Поэтому решают задачу (1) – (3) с помощью различных методов регуляризации, которые дают возможность найти функцию, удовлетворяющую условию (7). К таким методам можно отнести методы регуляризации А. Н. Тихонова [2] и Р. Лионса [1]. Метод регуляризации А. Н. Тихонова основан на сведении задачи (1) – (3) к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода и нахождению приближенного решения этого интегрального уравнения с помощью минимизирующих функционалов. А метод Лионса, который называется методом квазиобращения, сохраняет дифференциальный вид уравнения (1), и задача (1) – (3) заменяется семейством регуляризованных задач [2], которое является классически корректным, и его решение при определенных условиях сходится к решению исходной задачи (1) – (3). Метод квазиобращения впервые был применен для решения уравнения теплопроводности с обратным течением времени французским ученым Р. Лионсом, далее он был развит в работах [3–5]. Метод квазиобращения с дополнительной регуляризацией был применен в работе [6] для решения общей некорректной задачи Коши для эволюционного уравнения. В частности, в этой работе вместо решения Коши для эволюционного уравнения

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi, \quad \varphi(0) = u, \quad 0 \leq t \leq T \qquad (8)$$

рассматривается решение следующей регуляризованной задачи:

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dt} = (A - \alpha A^2)\varphi_\alpha, \quad \varphi_\alpha = \varphi_\alpha(t), \quad \alpha > 0, \qquad (9)$$

$$\varphi_\alpha(0) = u, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где — положительно определенный неограниченный самосопряженный оператор, не зависящий от t $(0 \leq t \leq T)$.

Далее для приближенного решения предложена устойчивая разностная схема

$$\frac{\varphi_\alpha^{n+1}}{\Delta t} = (p+1)A\varphi_\alpha^n - pA\varphi_\alpha^{n+1} + \alpha A^2 \varphi_\alpha^{n+1},$$

$$\varphi_\alpha^0 = u, \quad t_n = n\Delta t, \quad \Delta t = \frac{T}{M} \qquad (10)$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots, M-1)$, где $p (p \geq 1)$ — целое положительное число, которое выбирается из условий аппроксимации и устойчивости схемы (9) и играет наряду с α роль дополнительного параметра регуляризации. Доказано, что (10) аппроксимирует регуляризованную задачу (9) с точностью $(O\Delta t)$ в классе решений $\varphi(t) \in C^2[0, T]$ и при выборе $p = \left[\frac{\alpha}{\Delta t}\right]$ $(\Delta t < \alpha)$

разностная схема (9) является более устойчивой схемой, чем другие, которые были предложены в работах [2–5]. Здесь [.] следует понимать как целую часть отношения $\dfrac{\alpha}{\Delta t}$. Такой метод регуляризации предложен в данной работе для решения некорректной задачи (1) – (3), где доказана устойчивость разностной регуляризованной задачи и указан способ определения регуляризующих параметров.

2. Формулировка регуляризованной задачи

Сначала с помощью замены $t = T - t'$ задачу (1) – (3) сведем к прямой задаче типа (8):

$$\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial t} = -\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x^2} + \bar{f}(x,t), \quad 0 \le t \le T, \tag{11}$$

$$\bar{\varphi}(x,t) = u(x), \tag{12}$$

$$\bar{\varphi}(0,t) = 0, \quad \bar{\varphi}(1,t) = 0, \tag{13}$$

где $\bar{\varphi}(x,t) = \varphi(x, T-t)$, $\bar{f}(x,t) = f(x, T-t)$.

Для преобразованной задачи (11) – (13) оператор A имеет вид

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Он удовлетворяет условиям, которые наложены на A в работе [6], т. е. положительно определенный неограниченный самосопряженный оператор на множестве решений уравнения (11)

$$M = \left\{ \bar{\varphi} = \bar{\varphi}(x,t) : \quad 0 \le t \le T, \quad \bar{\varphi}(0,t) = \bar{\varphi}(1,t) = 0 \right\}.$$

Тогда семейство регуляризованных задач (9) применительно для задачи (11) – (13) имеет вид

$$\frac{\partial\bar{\varphi}_\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial^2\bar{\varphi}_\alpha}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^4\bar{\varphi}_\alpha}{\partial x^4} + \bar{f}(x,t), \tag{14}$$

$$\bar{\varphi}_\alpha(x,0) = u(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{15}$$

$$\bar{\varphi}_\alpha(0,t) = 0, \quad \bar{\varphi}_\alpha(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{16}$$

Для совместности задачи (14) – (16) не хватает двух граничных условий, так как в уравнении (14) участвует производная четвертого порядка по переменной x. Они легко определяются из уравнения (11):

$$\frac{\partial^2\bar{\varphi}_\alpha}{\partial x^2}(0,t) = \bar{f}(0,t), \quad \frac{\partial^2\bar{\varphi}_\alpha}{\partial x^2}(1,t) = \bar{f}(1,t). \tag{17}$$

Согласно [1], задача (14) – (17) является семейством регуляризованных задач [2] и ее решение $\bar{\varphi}_\alpha(x,t)$ при $\alpha \to 0$ сходится к решению $\bar{\varphi}_\alpha(x,t)$ задачи (11) – (13), т. е.

$$\lim_{\alpha\to 0} \bar{\varphi}_\alpha(x,t) = \bar{\varphi}(x,t).$$

3. Разностный аналог метода квазиобращения с регуляризацией и его обоснование

В области $\Pi = \left\{ 0 \le t \le T,\ 0 \le x \le 1 \right\}$ введем равномерную разностную сетку

$$\omega_{h,\Delta t} = \left\{ (x_k, t_n) : \begin{array}{c} x_k = kh, \quad h = \dfrac{l}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, N; \\ \\ t_n = n\Delta t, \quad \Delta t = \dfrac{T}{M}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, M. \end{array} \right\}$$

Далее на каждом внутреннем узле (x_k, t_n) $\quad (k = 1, 2, \ldots, N-l;\ \ n = 1, 2, \ldots, M)$ сеточной области $\Pi_{h,\Delta t}$ задачу (11) – (13) аппроксимируем следующей разностной краевой задачей:

$$\frac{\psi_k^{n-1} - \psi_k^n}{\Delta t} = -(p+1)\frac{\psi_{k-1}^n - 2\psi_k^n + \psi_{k+1}^n}{h^2} + p\frac{\psi_{k-1}^{n+1} - 2\psi_k^{n+1} + \psi_{k+1}^{n+1}}{h^2} -$$

$$-\alpha\frac{\psi_{k-2}^{n+1} - 4\psi_{k-1}^{n+1} + 6\psi_k^{n+1} - 4\psi_{k+1}^{n+1} + \psi_{k+2}^{n+1}}{h^4} + \bar{f}_k^n$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, M-1), \tag{18}$$

$$\psi_k^0 = u(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, N), \tag{19}$$

$$\psi_0^n = 0, \quad \psi_N^n = 0, \tag{20}$$

$$\frac{\psi_{-1}^n + \psi_1^n}{h^2} = \bar{f}(0, t_n), \quad \frac{\psi_{N-1}^n + \psi_{N-1}^n}{h^2} = \bar{f}(1, t_n) \quad (n = 0, 1, \ldots, M), \tag{21}$$

где введено обозначение $\bar{f}_k^n = \bar{f}(x_k, t_n)$, $\ \psi_k^n = (\bar{\psi}_\alpha)_k^n$, $\ \psi_k^{n+1} = (\bar{\psi}_\alpha)_k^{n+1}$.

Теорема 1. *При условии* $P = \left[\dfrac{\alpha}{\Delta t}\right]$ *разностная схема (18) – (21) аппроксимирует регуляризованную задачу (14) – (17) с точностью* $O(\Delta t + h^2)$ *в классе решений* $C_{2,t}^{6,x}[\Pi]$ *уравнения (11).*

Теорема легко доказывается с помощью разложения в ряд Тейлора.

Теперь переходим к доказательству устойчивости разностной схемы (18) – (21). С этой целью разностное уравнение (18) приведем к виду

$$a\psi_{k-2}^{n+1} + b\psi_{k-1}^{n+1} + c\psi_k^{n+1} + b\psi_{k+1}^{n+1} + a\psi_{k+2}^{n+1} = d\psi_{k-1}^n + e\psi_k^n +$$

$$+d\psi_{k+1}^n + \Delta t\bar{f}_k^n \quad (k = 1, 2, \ldots, N-1; \quad n = 0, 1, \ldots, M-1), \tag{22}$$

где введены обозначения:

$$a = \frac{\Delta t}{h^4}, \quad b = -4\alpha\frac{\Delta t}{h^4}, \quad c = -1 + 6\alpha\frac{\Delta t}{h^4} + 2p\frac{\Delta t}{h^4}, \quad d = -(p+1)\frac{\Delta t}{h^2}, \quad e = 1 + 2(p+1)\frac{\Delta t}{h^2}.$$

Разностные уравнения (22) представим в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$B\bar{\psi}^{n+1} = C\bar{\psi}^n + \Delta t\bar{f}^n \quad (n = 0, 1, \ldots, M-1), \tag{23}$$

где обозначены $\bar{\psi}^{n+1} = (\psi_1^{n+1}, \psi_2^{n+1}, \ldots, \psi_{N-1}^{n+1})$, $\quad \bar{\psi}^n = (\psi_1^n, \psi_2^n, \ldots, \psi_{N-1}^n)$,

$$\bar{f}^n = (\bar{f}_1^n, \bar{f}_2^n, \ldots, \bar{f}_{N-1}^n),$$

в частности, $\bar{\psi}^0 = \bar{u}$, где $\bar{u}$ — вектор с компонентами

$$(u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_{N-1})),$$

$B = [b_{i,j}]^{N-1}$ — пятидиагональная симметричная матрица с элементами

$$b_{i,j} = \left\{c\delta_{i-1}^j + b(\delta_{i-1}^j + \delta_{i+1}^j) + a(\delta_{i-2}^j + \delta_{i+2}^j)\right\} (i \cdot j \neq 1,\ i \cdot j \neq (i-1)^2),$$

а $C = \left\{C_{i,j}\right\}_1^{N-1}$ — трехдиагональная симметрическая матрица с элементами

$$C_{i,j} = \left\{e\delta_i^j + d(\delta_{i-1}^j + \delta_{i+1}^j)\right\} \quad (i \cdot j \neq 1, \quad i \cdot j \neq (i-1)^2),$$

здесь

$$\delta_{\mathbf{i}}^{\mathbf{j}} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \mid i-j \mid \leq 2, \\ 1 & \text{при} \quad \mid i-j \mid > 2. \end{cases}$$

Матрица — положительно определена (это покажем позже), поэтому она имеет обратную матрицу $^{-1}$.

Запишем (23) в виде

$$\bar{\psi}^{n+1} = B^{-1}C\bar{\psi}^n + \Delta t B^{-1}\bar{f}^n \quad (n = 0, 1, \ldots, M-1). \tag{24}$$

Далее через $G = B^{-1}C$ обозначим матрицу перехода двухслойной разностной схемы (24).

Теорема 2. *При выборе параметров $p, \alpha, \Delta t, h$ из условий $\alpha \leq \dfrac{h^2}{4\alpha}$ и $p = \left[\dfrac{\alpha}{\Delta t}\right]$ для разностной схемы (18)–(21) имеет место условие устойчивости*

$$\parallel G \parallel_c \leq 1 + 0\left(\frac{1}{p}\right). \tag{25}$$

Доказательство. Для этого сначала вычислим собственные числа матрицы перехода G.

Очевидно, что $\lambda_s(G) = \lambda_s(B^{-1}) \cdot \lambda_s(C) = \dfrac{\lambda_s(C)}{\lambda_s(B)}$ $(s = 1, 2, \ldots, N-1)$.

Собственные числа $\lambda_s(B)$ и $\lambda_s(C)$ матриц C и B определим из следующих спектральных задач:

$$B\bar{W}^{(s)} = \lambda_s(B)\bar{W}^{(s)},$$

$$C\bar{\omega}^{(s)} = \lambda_s(C)\bar{\omega}^{(s)} \quad (s = 1, 2, \ldots, N-1). \tag{26}$$

Каждую k-ю компоненту $\bar{W}_k^{(s)}$ и $\bar{\omega}_k^{(s)}$ собственных векторов $\bar{W}^{(s)}$ и $\bar{\omega}^{(s)}$ ищем в виде

$$\bar{W}_k^{(s)} = \sin(k\pi sh), \quad \bar{\omega}_k^{(s)} = \sin(k\pi sh).$$

Подставляя их в (26) и применяя соответствующие тригонометрические формулы, имеем

$$\lambda_s(B) = 1 + 4p\frac{\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{s\pi h}{2} + 16\alpha\frac{\Delta t}{h^4}\sin^4\frac{s\pi h}{2},$$

$$\lambda_s(C) = 1 + 4(p+1)\frac{\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{s\pi h}{2} \quad (s = 1, 2, \ldots, N-1).$$

Все $\lambda_s(B)$ и $\lambda_s()$ положительны, поэтому B и C — положительно определенные и неособенные матрицы, т. е. $\det(B) \neq 0$, $\det(C) \neq 0$. В результате получим формулу

$$\lambda_s(G) = \frac{1 + 4(p+1)\dfrac{\Delta t}{h^2}\sin^2\dfrac{s\pi h}{2}}{1 + 4p\dfrac{\Delta t}{h^2}\sin^2\dfrac{s\pi h}{2} + 16\alpha\dfrac{\Delta t}{h^4}\sin^4\dfrac{s\pi h}{2}} \quad (s = 1, 2, \ldots, N-1),$$

с помощью которой определяются собственные числа $\lambda_s(G)$ $(s = 1, 2, \ldots, N-1)$.

Спектральная норма $\| G \|_c$ матрицы G имеет вид

$$\| G \|_c = \rho(G) = \max_s \lambda_s(G).$$

Для оценки $\| G \|_c$ сначала $\lambda_s(G)$ представим в виде

$$\lambda_s(G) = 1 + \Delta t \cdot \frac{\dfrac{4}{h^2}\sin^2\dfrac{s\pi h}{2}\left(1 - 4\alpha\dfrac{\Delta t}{h^2}\sin^2\dfrac{s\pi h}{2}\right)}{1 + 4p\dfrac{\Delta t}{h^2}\sin^2\dfrac{s\pi h}{2} + 16\alpha\dfrac{\Delta t}{h^4}\sin^4\dfrac{s\pi h}{2}}.$$

Если параметры $\Delta t, h, \alpha$ выбрать из условия $1 - 4\alpha\dfrac{\Delta t}{h^2}\sin^2\dfrac{s\pi h}{2} \leq 0$ $(s = 1, 2, \ldots, N-1)$, то каждое число $\lambda_s(G)$ удовлетворяет неравенству $0 < \lambda_s(G) \leq 1$. Тогда $\| G \|_c \leq 1$. В этом случае решение разностной задачи (например, при $\bar{f}(x,t) = 0$) (18)–(21) не будет расти при росте П. А это не согласуется с тем, что решение ОЗТ является растущей функцией. Следовательно, норма $\| G \|_c$ должна быть больше единицы. Поэтому параметры $\Delta t, h, \alpha$ выбираем так, чтобы выполнялось условие

$$1 - 4\alpha\frac{\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{s\pi h}{2} \leq 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, N-1). \tag{27}$$

При условии (27) функция $V_s = \sin^2\dfrac{s\pi h}{2}\left(1 - 4\alpha\dfrac{\Delta t}{h^2}\sin^2\dfrac{s\pi h}{2}\right) > 0$ и достигает своего максимума

$$\max_s V_s = V_{s_0} = \frac{1}{4\alpha},$$

где s определяется из уравнения $\sin^2 s_0 h\pi = \dfrac{h^2}{8\alpha}$.

Таким образом, для $\lambda_s(G)$ получим следующую оценку:

$$\lambda_s(G) = 1 + \Delta t \cdot \frac{\dfrac{4}{h^2}V_s}{1 + 4p\dfrac{\Delta t}{h^2}\sin^2\dfrac{s\pi h}{2} + 16\alpha\dfrac{\Delta t}{h^4}\sin^4\dfrac{s\pi h}{2}} \leq$$

$$\leq 1+\Delta t\cdot\frac{\dfrac{1}{4\alpha}}{1+4p\dfrac{\Delta t}{h^2}\sin^2\dfrac{s\pi h}{2}+16\alpha\dfrac{\Delta t}{h^4}\sin^4\dfrac{s\pi h}{2}}<1+\frac{\Delta t}{4\alpha}.$$

Если положим $p=\dfrac{\alpha}{\Delta t}$, то имеем

$$\| G\|_c=\max_s\lambda_s(G)\leq 1+\frac{1}{4p}=1+0\left(\frac{1}{p}\right).$$

Очевидно, что при любом s ($s=1,2,\ \ldots,\ N-1$) условие (27) выполняется, если параметры $\alpha,\Delta t$ и h выбрать из условия $\alpha\leq\dfrac{h^2}{4\Delta t}$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Можно усилить оценку (25). Знаменатель

$$g_s=1+4p\frac{\Delta t}{h^2}\sin^2\frac{s\pi h}{2}+16\alpha\frac{\Delta t}{h^4}\sin^4\frac{s\pi h}{2}\quad(s=1,2,\ \ldots,\ N-1)$$

формулы для вычисления $\lambda_s(G)$ является положительной растущей функцией и достигает своего наименьшего значения при $s=1$:

$$\inf_s g_s=1+p\pi^2+\alpha\pi^4,$$

так как при малых h имеем $\sin\dfrac{\pi h}{2}\approx\dfrac{\pi h}{2}$. Тогда для нормы $\| G\|_c$ получим более сильную оценку

$$\| G\|_c\leq 1+\frac{1}{4p+4p^2\pi^2+\alpha\pi^4}=1+0\left(\frac{1}{p^2}\right),$$

т. е. чем больше p, тем ближе норма $\| G\|_c$ к единице (справа).

Теорема 3. *При условиях теоремы 2 для любого n ($n\leq M$) справедлива априорная оценка* $\|\bar\psi^n\|\leq\exp\left(\dfrac{T}{4\alpha}\right)+T\cdot\|\bar f\|$, *где*

$$\|\bar f\|=\sup_i\|\bar f^i\|.$$

Доказательство. Из векторного равенства (24) для любого n ($1\leq n\leq M$) получим

$$\bar\psi^n=G\bar\psi^0+\Delta tB^{-1}[(B^{-1})^{n-1}\bar f^0+(B^{-1})^{n-2}\bar f^1+...+\bar f^{n-1}].$$

Оценим это равенство по норме:

$$\|\bar\psi^n\|\leq\| G\|_c^n\cdot\|\bar\psi^0\|+\Delta t\| B^{-1}\|_G\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\| B^{-1}\|_G^{\Pi-1-i}\cdot\|\bar f^i\|.$$

Норма $\| B\|_c=\max_s\lambda_s(B)\geq 1$, следовательно, $\| B^{-1}\|_c\leq 1$. Поэтому

$$\|\bar\psi^n\|\leq\| G\|_c^n\cdot\|\bar\psi^0\|+\Delta t\sum_{i=1}^{n-1}\|\bar f^i\|.\tag{28}$$

Далее из (28) следует

$$\| \bar{\psi}^n \| \leq \| G \|_c^n \cdot \| \bar{\psi}^0 \| + \Delta t \cdot (n-1) \| \bar{f}^i \| . \tag{29}$$

Теперь воспользуемся оценкой (25) и отдельно оценим норму $\| G \|_c^n$:

$$\| G \|_c^n \leq \left(1 + \frac{1}{4p}\right)^n = \left(1 + \frac{\Delta t}{4\alpha}\right)^n = \left(1 + \frac{\frac{t_n}{\alpha}}{n}\right)^n < \exp\left(\frac{t_n}{4\alpha}\right).$$

Тогда из неравенства (29) получим

$$\| \bar{\psi}^n \| \leq \exp\left(\frac{t_n}{4\alpha}\right) \| \bar{\psi}^0 \| + T \| \bar{f} \| \leq \exp\left(\frac{T}{4\alpha}\right) \| \bar{u} \| + T \cdot \| \bar{f} \|,$$

так как $\Delta t(n-1) < T$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Разностная схема (18) – (21) имеет единственное решение, так как

$$\det (B^{-1}) \neq 0.$$

Ее решение можно определить пятиточечной прогонкой, которая является устойчивой.

Список литературы

[1] Латтес Р., Лионс Ж. Л. *Метод квазиобращения и его приложения.* Мир, М., 1970.

[2] Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* Наука, М., 1986.

[3] Марчук А. Н., Атанбаев С. А. Некоторые вопросы глобальной регуляризации. *Докл. АН СССР*, **190**, №3, 1970.

[4] Музылев Н. В. О методе квазиобращения. *ЖВМ и МФ*, **3**, №3, 1977, 556–561.

[5] Вабишевич П. А. Разностные методы решения некоторых некорректных задач. *Изв. вузов. Матем.*, №8, 1984, 3–9.

[6] Атанбаев С. А. Об одном разностном аналоге метода квазиобращения для эволюционных уравнений. *Вестник КазГУ. Сер. матем.*, №11, 1998, 17–24.

Поступила в редакцию 12 мая 1999 г.